

Μαθηματικά στα οικονομικά φαινόμενα

- **Ασκήσεις**

Άσκηση

Α. Βρείτε τη συνάρτηση κερδών, όταν η συνάρτηση κόστους είναι $C=150+30Q$

και η συνάρτηση ζήτησης είναι $Q=40-2P$.

Β. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση των κερδών σε σχέση με την τιμή.

Γ. Βρείτε την τιμή ισορροπίας (νεκρό σημείο) όταν η συνάρτηση κόστους είναι $C=150+30Q$ και η συνάρτηση ζήτησης είναι $Q=40-2P$.

Λύση

Α. Κέρδη = έσοδα – έξοδα

Έσοδα = πωλούμενη ποσότητα χ τιμή = $Q \times P$

Κέρδη = $\Pi(P) = Q \times P - C = (40-2P)P - (150 + 30Q) =$

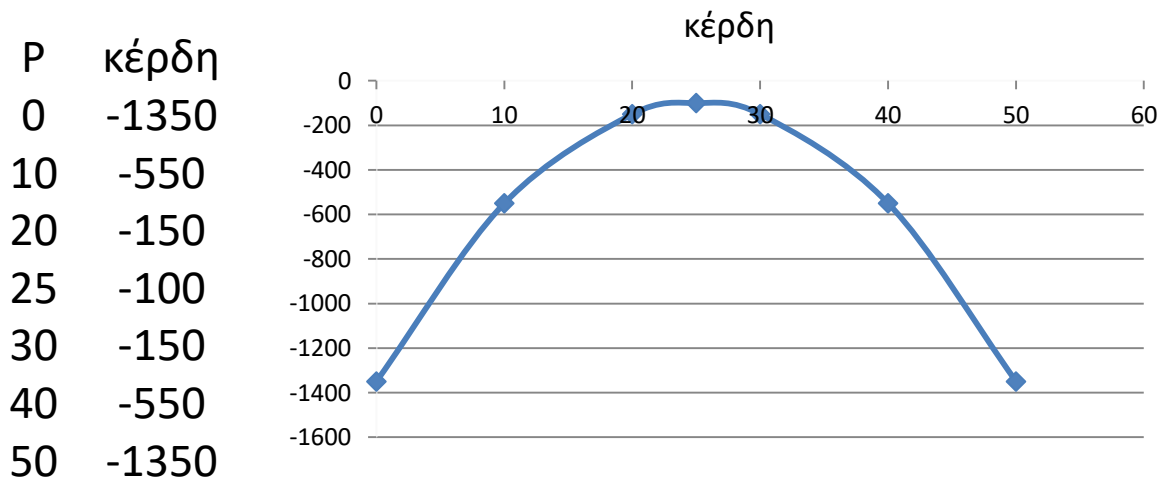
$= 40P - 2P^2 - 150 - 30Q = 40P - 2P^2 - 150 - 30(40-2P) \Leftrightarrow$

Επομένως τα κέρδη είναι $\Pi(P) = -2P^2 + 100P - 1350$.

Πρόκειται για συνάρτηση δευτέρου βαθμού, η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή προς τα άνω.

Β. Εντοπίζουμε αν υπάρχουν τα σημεία μηδενισμού των κερδών, δίνουμε ορισμένες θετικές τιμές στο P για να κάνουμε τη γραφική παράσταση

Γ. Τα κέρδη είναι πάντα αρνητικά και δεν υπάρχει νεκρό σημείο.



Ασκήσεις

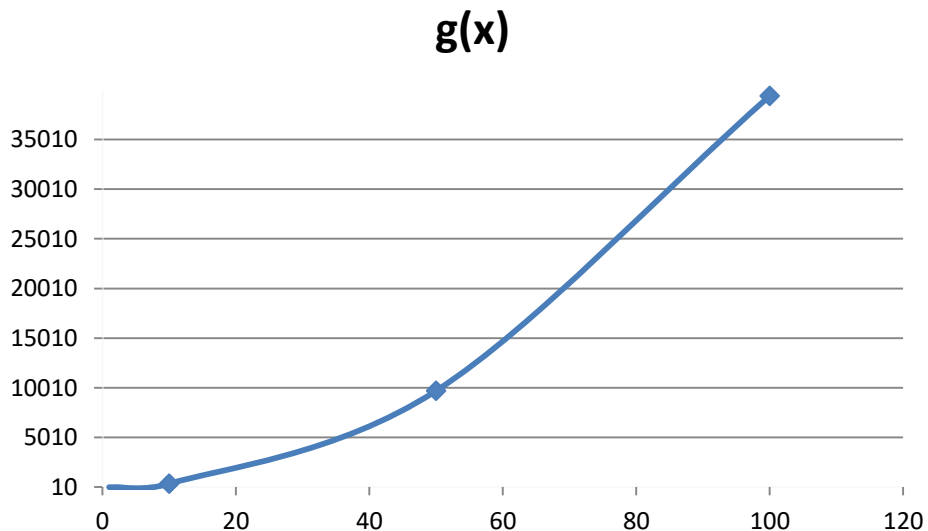
1. Να γίνει η γραφική απεικόνιση της συνάρτησης $g(x)=5-6x+4x^2$ όταν οι τιμές του x είναι θετικές.

Λύση

Θα πάρουμε διάφορες θετικές τιμές του x και θα βρούμε τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $g(x)$.

Στη συνέχεια θα απεικονίσουμε τα σημεία $(x, g(x))$ σε ένα σύστημα αξόνων x, y και θα τα ενώσουμε μεταξύ τους για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση όλης της συνάρτησης

x	1	2	10	50	100
$g(x)=5-6x+4x^2$	$5-6+4=3$	$5-12+16=9$	$5-60+400=345$	9705	39405



Ασκήσεις

2. Να γραφεί ο τύπος της συνάρτησης φόρου για μια επιχείρηση σε σχέση με τα κέρδη της, όταν ο φόρος είναι το 25% των κερδών έως 40.000 ευρώ και για άνω των 40.000 γίνεται 30% των επιπλέον κερδών.

α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση.

β) Είναι η συνάρτηση φόρου συνεχής;

Λύση

Φόρος Φ , υπολογίζεται ως ποσοστό των κερδών Π

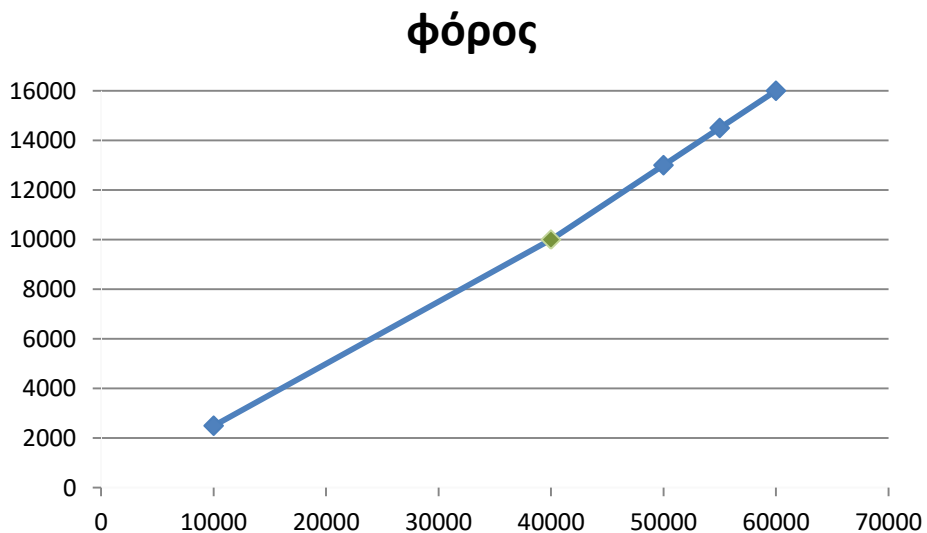
$\Phi(\Pi) = 0,25 * \Pi$ όταν $\Pi \leq 40.000$

$\Phi(\Pi) = 0,25 * 40.000 + 0,30 * (\Pi - 40.000)$ όταν $\Pi > 40.000$

$\Phi(\Pi) = 10.000 + 0,3\Pi - 12.000 = -2000 + 0,3\Pi$

α)

β) Στο σημείο (40.000, 10.000) εξετάζουμε αν είναι συνεχής



Ασκήσεις

3. Η σχέση $y=15-5x$ μπορεί να αντιστοιχεί σε συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος; Ποια θα είναι η συνάρτηση εσόδων; Πως θα μεταβάλλεται όταν η τιμή x αυξηθεί κατά μία μονάδα;

Λύση

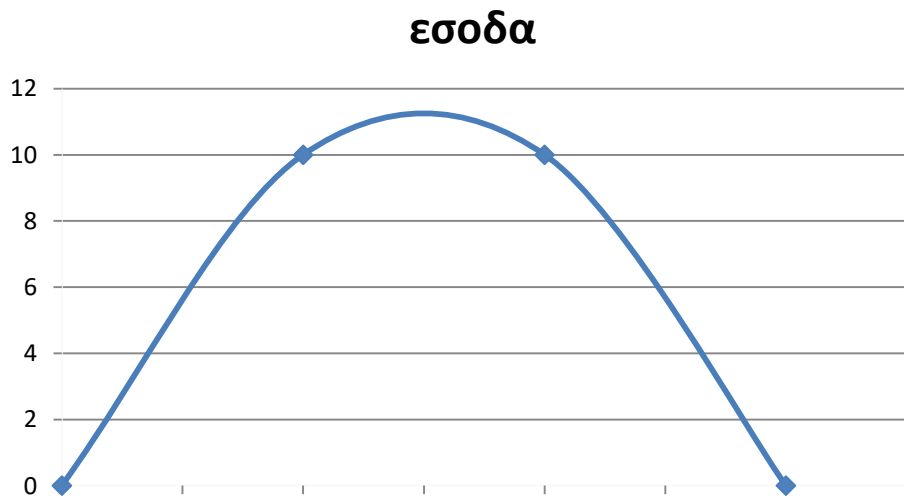
Επειδή η κλίση της είναι -5 , αρνητική, μπορεί να αντιστοιχεί σε συνάρτηση ζήτησης όπου x θα είναι η τιμή και y η ζητούμενη ποσότητα.

Πεδίο ορισμού; $x \geq 0$ και $y \geq 0 \Leftrightarrow 15-5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ $[0,3]$

Η συνάρτηση εσόδων θα είναι $R = x \cdot y = x(15-5x) \Leftrightarrow$

$$R(x) = 15x - 5x^2$$

Όταν η τιμή x αυξηθεί κατά μία μονάδα, η τιμή των εσόδων στην αρχή μεγαλώνει ενώ μετά το 1,5 αύξηση της τιμής προκαλεί μείωση με διαφορετικό ρυθμό μεταβολής



Ασκήσεις

4. Η σχέση $y=15+3x$ μπορεί να αντιστοιχεί σε συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος; Ποια θα είναι η συνάρτηση εσόδων; Πως θα μεταβάλλεται όταν η τιμή x αυξηθεί κατά μία μονάδα;

Λύση

Επειδή η κλίση της είναι $+3$, θετική, δεν μπορεί να αντιστοιχεί σε συνάρτηση ζήτησης όπου x θα είναι η τιμή και y η ζητούμενη ποσότητα.

Πεδίο ορισμού και σημείο ισορροπίας

Για ένα αγαθό η συνάρτηση ζήτησης είναι $Q_d=20-2P$ και η συνάρτηση προσφοράς είναι $Q_s=4P-10$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού για την τιμή P καθώς και η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας.

Λύση

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη 3 συνθήκες

1. $P \geq 0$, και
2. $Q \geq 0$, και
3. ζήτηση φθίνουσα

Η συνθήκη 3 ισχύει για όλες τις τιμές P .

Η συνθήκη 2 γίνεται $20-2P \geq 0 \Leftrightarrow P \leq 10$

$4P-10 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq 2,5$

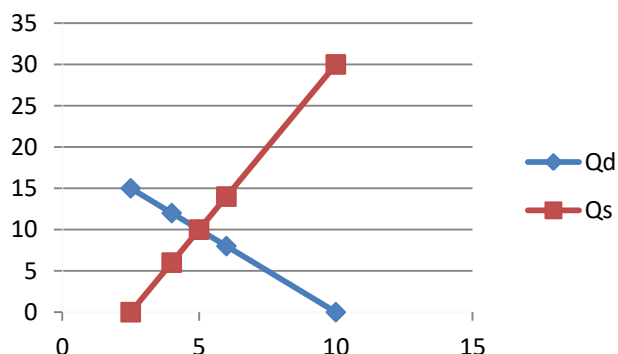
Επομένως πεδίο ορισμού για το P είναι το διάστημα $[2,5 \text{ έως } 10]$

Για να βρούμε το σημείο ισορροπίας λύνουμε την εξίσωση

$Q_s=Q_d \Leftrightarrow 4P-10=20-2P \Leftrightarrow 6P=30 \Leftrightarrow P=5$ και

Αντικαθιστώντας στη συνάρτηση ζήτησης ή προσφοράς βρίσκουμε $Q_s=Q_d=10$

το σημείο ισορροπίας είναι το σημείο $(5,10)$.



Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να γίνει η γραφική απεικόνιση της συνάρτησης $g(x)=5+3x-2x^2$ όταν οι τιμές του x είναι θετικές.
2. Να γραφεί ο τύπος της συνάρτησης φόρου για μια επιχείρηση σε σχέση με τα κέρδη της, όταν ο φόρος είναι το 25% των κερδών έως 20.000 ευρώ και για άνω των 20.000 γίνεται 30% των επιπλέον κερδών.
 - α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση.
 - β) Είναι η συνάρτηση φόρου συνεχής;
3. Η σχέση $y=25-5x$ μπορεί να αντιστοιχεί σε συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος; Ποια θα είναι η συνάρτηση εσόδων; Πως θα μεταβάλλεται όταν η τιμή x αυξηθεί κατά μία μονάδα;
4. Για ένα αγαθό η συνάρτηση ζήτησης είναι $Q_d=20-0,5P$ και η συνάρτηση προσφοράς είναι $Q_s=1,5P-10$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού για την τιμή P καθώς και η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας.