

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Ασκήσεις με οικονομική συνάρτηση δύο μεταβλητών

Ασκήσεις οικονομικών εφαρμογών

1. Δίνεται η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης $Q(K,L)=L^{4/5}K^{1/5}$ όπου K το ποσό κεφαλαίου και L το ποσό εργασίας.
- α) Να βρεθεί το οριακό προϊόν εργασίας και κεφαλαίου.
(οριακό προϊόν είναι η πρώτου βαθμού μερική παράγωγος).
- β) Υπολογίστε την μερική ελαστικότητα της παραγωγής, ως προς την εργασία και ως προς το κεφάλαιο.
- γ) Στην περίπτωση που θέλουμε η παραγωγή να είναι πάντα 100 μονάδες, γράψτε το κεφάλαιο, σαν συνάρτηση της εργασίας.

Λύση

α) $\partial Q/\partial L$ οριακό προϊόν εργασίας $= \partial(L^{4/5}K^{1/5})/\partial L = 4/5 * L^{-1/5}K^{1/5}$
 $\partial Q/\partial K$ οριακό προϊόν κεφαλαίου $\partial(L^{4/5}K^{1/5})/\partial K = 1/5 * L^{4/5}K^{-4/5}$

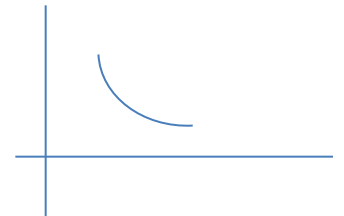
β) μερική ελαστικότητα είναι η ποσοστιαία μεταβολή του Q σε σχέση με ποσοστιαία μεταβολή του L ή του K

$$\varepsilon_L = \partial Q/\partial L * L/Q = 4/5 * L^{-1/5}K^{1/5} * L/Q = 4/5 = 0,8$$

$$\varepsilon_K = \partial Q/\partial K * K/Q = 1/5 * L^{4/5}K^{-4/5} * K/Q = 1/5 = 0,2$$

γ) $Q=100 \Leftrightarrow$ εξίσωση ίσου προϊόντος $L^{4/5}K^{1/5}=100 \Leftrightarrow$
 $K^{1/5}=100/L^{4/5} \Leftrightarrow K=100^5/L^4 \Leftrightarrow K(L)=100^5/L^4$

Λόγος υποκατάστασης $dK/dL = (100^5/L^4)' = (100^5 * L^{-4})' =$
 $= -4 * 100^5 * L^{-5} = -4 * 100^5/L^5$



Ασκήσεις οικονομικών εφαρμογών

2. Δίνεται η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης

$$Q(K,L)=4LK-3L^2-2K^2+6L+14K$$

όπου K το ποσό κεφαλαίου και L το ποσό εργασίας.

α) Να βρεθούν οι τιμές K και L που μεγιστοποιούν την παραγωγή της επιχείρησης.

β) Αν η επιχείρηση πληρώνει 700 ευρώ τη μονάδα εργασίας και 1400 ευρώ τη μονάδα κεφαλαίου, ενώ πουλάει 2.500 ευρώ τη μονάδα παραγωγής, για ποιες ποσότητες κεφαλαίου και εργασίας θα μεγιστοποιήσει τα κέρδη της;

Λύση

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι =0

$$Q_L=0 \Leftrightarrow 4K-6L+6=0 \Leftrightarrow 4K-6*10+6=0 \Leftrightarrow K=54/4=13,5$$

$$Q_K=0 \Leftrightarrow 4L-4K+14=0 \Leftrightarrow -2L+20=0 \Leftrightarrow L=20/2=10$$

Δεύτερες μερικές παράγωγοι

$$Q_{LL} = -6$$

$$Q_{LK} = 4$$

$$Q_{KL} = 4$$

$$Q_{KK} = -4$$

$$\text{Ορίζουσα} = (-6)*(-4)-4*4=24-16=8 > 0$$

έχει ακρότατο, επειδή $Q_{LL} < 0$, $Q_{KK} < 0$, έχει μέγιστο για $K=13.5$ $L=10$

Η μέγιστη παραγωγή είναι:

$$Q(13.5, 10) = 4*10*13,5 - 3*10^2 - 2*13,5^2 + 6*10 + 14*13,5 = \dots$$

$$\beta) \text{ κέρδος} = \text{έσοδα} - \text{κόστος} = 2500*Q - (700*L + 1400*K) =$$

$$\Pi(K,L) = 2500*(4LK - 3L^2 - 2K^2 + 6L + 14K) - 700*L - 1400*K =$$

$$10000LK - 7500L^2 - 5000K^2 + 15000L + 35000K - 700*L - 1400*K =$$

ΘΑ βρούμε πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους για να εντοπίσουμε το μέγιστο

Εύρεση μέγιστου κέρδους

$$\text{κέρδος} = \text{έσοδα} - \text{κόστος} = 2500*Q - (700*L + 1400*K) =$$

$$\begin{aligned}\Pi(K,L) &= 2500*(4LK - 3L^2 - 2K^2 + 6L + 14K) - 700*L - 1400*K = \\ &= 10000LK - 7500L^2 - 5000K^2 + 15000L + 35000K - 700*L - 1400*K = \\ &= 10000LK - 7500L^2 - 5000K^2 + 14300L + 33600K\end{aligned}$$

Θα βρούμε πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους για να εντοπίσουμε το μέγιστο

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι είναι:

- $\Pi_K = 10000L - 10000K + 33600$
- $\Pi_L = 10000K - 15000L + 14300$

Για να έχουμε ακρότατο, πρέπει

$$\Pi_K = 0 \Leftrightarrow 10000L - 10000K + 33600 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Pi_L = 0 \Leftrightarrow 10000K - 15000L + 14300 = 0 \Leftrightarrow -5000L + 47900 = 0 \Leftrightarrow$$

$$L = 47900/5000 = 9,58 \text{ και αντικαθιστώντας στην 1}^{\text{η}} \text{ εξίσωση}$$

$$K = (10000*9,58 + 33600)/10000 = 12,94$$

οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι

$$\Pi_{KK} = -10000$$

$$\Pi_{KL} = 10000$$

$$\Pi_{LK} = 10000$$

$$\Pi_{LL} = -15000$$

$$\text{Η ορίζουσα είναι } \Pi_{KK} * \Pi_{LL} - \Pi_{KL} * \Pi_{LK} =$$

$$= (-10000) * (-15000) - 10000 * 10000 =$$

$$= 150.000.000 - 100.000.000 = 50.000.000 > 0$$

επειδή η δεύτερες μερικές παράγωγοι αρνητικές και η ορίζουσα θετική, η συνάρτηση έχει μέγιστο για

$K=12,94$ και $L=9,58$ διαφορετικά από ότι έχει μέγιστα έσοδα που βρήκαμε στο α ερώτημα

Ασκήσεις οικονομικών εφαρμογών

3. Δίνεται η συνάρτηση χρησιμότητας ενός καταναλωτή για δύο αγαθά X και Y
 $U(X,Y)=5XY-X^2-6,5Y^2+400X+600Y$

Να βρεθούν οι ποσότητες X και Y που μεγιστοποιούν την χρησιμότητα.

Ποια είναι η μέγιστη χρησιμότητα;

Λύση

Θα βρούμε πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους για να εντοπίσουμε το μέγιστο

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι είναι:

- $U_X = 5Y - 2X + 400$
- $U_Y = 5X - 13Y + 600$

Για να έχουμε ακρότατο, πρέπει

$$U_X = 0 \Leftrightarrow 5Y - 2X + 400 = 0 \Leftrightarrow X = (5Y + 400)/2 = 2,5Y + 200$$

$$U_Y = 0 \Leftrightarrow 5X - 13Y + 600 = 0 \Leftrightarrow 5(2,5Y + 200) - 13Y + 600 = 0 \Leftrightarrow$$

$$12,5Y + 1000 - 13Y + 600 = 0 \Leftrightarrow -0,5Y + 1600 = 0 \Leftrightarrow Y = 1600/0,5 = 3200$$

και αντικαθιστώντας στην 1^η εξίσωση

$$X = 2,5 * 3200 + 200 = 8200$$

οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι

$$U_{XX} = -2$$

$$U_{XY} = 5$$

$$U_{YX} = 5$$

$$U_{YY} = -13$$

$$\text{Η ορίζουσα είναι } U_{XX} * U_{YY} - U_{XY} * U_{YX} = (-2) * (-13) - 5 * 5 = 26 - 25 = 1 > 0$$

επειδή η δεύτερες μερικές παράγωγοι αρνητικές και η ορίζουσα θετική, η συνάρτηση έχει μέγιστο για

$$X = 8200 \quad Y = 3200$$

Η μέγιστη χρησιμότητα θα βρεθεί με αντικατάσταση στον τύπο της συνάρτησης
 $U(8200,3200) = 5 * 8200 * 3200 \dots\dots\dots$

Συνάρτηση κέρδους

- Δεδομένα
έστω ένα προϊόν ενός μονοπωλίου, που πουλιέται σε δύο αγορές με διαφορετικές συναρτήσεις ζήτησης.

$P_1(Q_1)$ και $P_2(Q_2)$ (τιμές συνάρτηση ποσότητας)
κόστος $C(Q)$
έσοδα $R(P_1, P_2, Q_1, Q_2)$

- Υπολογισμός συνάρτησης κέρδους
- έσοδα $R = P_1 * Q_1 + P_2 * Q_2$
ΚΕΡΔΟΣ

$$\Pi(Q_1, Q_2) = \text{ΕΣΟΔΑ} - \text{ΚΟΣΤΟΣ} = \\ P_1 * Q_1 + P_2 * Q_2 - C(Q_1 + Q_2)$$

Ασκήσεις οικονομικών εφαρμογών

4. Ένα μονοπώλιο πουλάει δύο προϊόντα με συναρτήσεις ζήτησης:
 $Q_1(P_1) = 6 - 0,5 P_1$ και $Q_2(P_2) = 8 - 0,25 P_2$
Η συνάρτηση κόστους είναι $C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 + Q_2^2$
Να υπολογίσετε τη συνάρτηση κερδών και να βρείτε τα επίπεδα τιμών P_1 και P_2 στα οποία μεγιστοποιούνται τα κέρδη.

Λύση

$$\Pi(Q_1, Q_2) = \text{ΕΣΟΔΑ} - \text{ΚΟΣΤΟΣ} = P_1 * Q_1 + P_2 * Q_2 - C(Q_1, Q_2)$$

$$\text{Λύνουμε τις εξισώσεις } Q_1 = 6 - 0,5 * P_1 \text{ και } Q_2 = 8 - 0,25 P_2$$

Ως προς P_1 και P_2

$$P_1 = 12 - 2 * Q_1 \text{ και } P_2 = 32 - 4 Q_2$$

και αντικαθιστούμε στη συνάρτηση κέρδους

$$\begin{aligned} \Pi(Q_1, Q_2) &= (12 - 2Q_1) Q_1 + (32 - 4Q_2) Q_2 - (Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 + Q_2^2) = 12Q_1 - 2Q_1^2 + 32Q_2 - 4Q_2^2 - Q_1^2 - 2Q_1 Q_2 - Q_2^2 = \\ &= 12Q_1 - 3Q_1^2 + 32Q_2 - 5Q_2^2 - 2Q_1 Q_2 \end{aligned}$$

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι είναι:

- $\Pi_{Q_1} = 12 - 6Q_1 - 2Q_2$
- $\Pi_{Q_2} = 32 - 10Q_2 - 2Q_1$

Για να έχουμε ακρότατο, πρέπει

$$\Pi_{Q_1} = 0 \Leftrightarrow 12 - 6Q_1 - 2Q_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Pi_{Q_2} = 0 \Leftrightarrow 32 - 10Q_2 - 2Q_1 = 0 \Leftrightarrow -96 + 30Q_2 + 6Q_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-84 + 28Q_2 = 0 \Leftrightarrow Q_2 = 3$$

$$\text{και αντικαθιστώντας στην 1}^{\text{η}} \text{ εξίσωση } Q_1 = (12 - 2 * 3) / 6 = 1$$

Συνέχεια λύσης 4ης

- $\Pi_{Q_1} = 12 - 6Q_1 - 2Q_2$
- $\Pi_{Q_2} = 32 - 10Q_2 - 2Q_1$

οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι

$$\Pi_{Q_1 Q_1} = -6$$

$$\Pi_{Q_1 Q_2} = -2$$

$$\Pi_{Q_2 Q_1} = -2$$

$$\Pi_{Q_2 Q_2} = -10$$

$$\begin{aligned} \text{Η ορίζουσα είναι } \Pi_{Q_1 Q_1} * \Pi_{Q_2 Q_2} - \Pi_{Q_1 Q_2} * \Pi_{Q_2 Q_1} = \\ = (-6) * (-10) - (-2) * (-2) = 60 - 4 = 56 > 0 \end{aligned}$$

επειδή η δεύτερες μερικές παράγωγοι αρνητικές και η ορίζουσα θετική, η συνάρτηση έχει μέγιστο για

$$Q_1 = 1 \text{ και } Q_2 = 3$$

Οι ζητούμενες τιμές για μέγιστα κέρδη είναι

$$P_1 = 12 - 2 * Q_1 = 12 - 2 * 1 = 10 \quad \text{και} \quad P_2 = 32 - 4Q_2 = 32 - 2 * 3 = 20$$

Ασκήσεις οικονομικών εφαρμογών

5. Μια επιχείρηση πουλάει δύο προϊόντα με συναρτήσεις ζήτησης:

$$Q_1 (P_1, P_2) = 110 - 4P_1 - P_2$$

$$Q_2 (P_1, P_2) = 90 - 2P_1 - 3P_2$$

α) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση εσόδων της επιχείρησης και να βρείτε τα επίπεδα τιμών P_1 και P_2 στα οποία μεγιστοποιούνται τα έσοδα.

β) Για τις τιμές μεγιστοποίησης, να υπολογισθούν οι ποσότητες κάθε τύπου και τα μέγιστα έσοδα.

Λύση

$$A) \text{ Έσοδα } R = P_1 * Q_1 + P_2 * Q_2 = P_1 * (110 - 4P_1 - P_2) + P_2 * (90 - 2P_1 - 3P_2) =$$

$$R(P_1, P_2) = 110P_1 - 4P_1^2 - P_1 * P_2 + 90P_2 - 2P_1 * P_2 - 3P_2^2 =$$

$$= 110P_1 - 4P_1^2 - 3P_1 * P_2 + 90P_2 - 3P_2^2$$

Μερικές παράγωγοι

$$R_{P_1} = 110 - 8P_1 - 3P_2$$

$$R_{P_2} = -3P_1 + 90 - 6P_2$$

$$R_{P_1} = 0 \Leftrightarrow 110 - 8P_1 - 3P_2 = 0 \Leftrightarrow -220 + 16P_1 + 6P_2 = 0 \Leftrightarrow P_2 = 10$$

$$R_{P_2} = 0 \Leftrightarrow -3P_1 + 90 - 6P_2 = 0 \Leftrightarrow -130 + 13P_1 = 0 \Leftrightarrow P_1 = 10$$

Δεύτερες μερικές παράγωγοι

$$R_{P_1 P_1} = -8$$

$$R_{P_1 P_2} = -3$$

$$R_{P_2 P_1} = -3$$

$$R_{P_2 P_2} = -6$$

$$\text{Ορίζουσα } (-8)(-6) - (-3)(-3) = 48 - 9 > 0$$

Έχουμε μέγιστα έσοδα για $P_1 = 10$, $P_2 = 10$

$$\beta) Q_1 (P_1, P_2) = 110 - 4 * 10 - 10 = 60$$

$$Q_2 (P_1, P_2) = 90 - 2 * 10 - 3 * 10 = 40$$

$$\text{Μέγιστα έσοδα } 60 * 10 + 40 * 10 = 1000$$