

Γραμμικές και μη γραμμικές συναρτήσεις

- Ασκήσεις με τη λύση τους και παρόμοιες προτεινόμενες

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο (4,15) και έχει κλίση -4.
Βρείτε και την παράλληλη της ευθείας που περνάει από το σημείο (1,30).

Λύση

$$Y-15=-4(x-4) \Leftrightarrow y=-4x+16+15 \Leftrightarrow y=-4x+31$$

$$Y-30=-4(x-1), \Leftrightarrow y=-4x+4+30 \Leftrightarrow y=-4x+34$$

2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία (2,25) και (8,40).

Αν η τιμή $x=15$ ποια θα είναι η τιμή y της ευθείας ;

Λύση

$$y-40=(40-25)/(8-2)(x-8) \Leftrightarrow y=15/6x-15/6*8+40 \Leftrightarrow$$

$$Y=2,5x+20$$

$$\text{αν } x=15 \text{ τότε } y=2,5*15+20=57,5$$

Ασκήσεις

3. Να βρεθούν οι λύσεις των εξισώσεων

α) $x^2 - 8x + 9 = 0$

β) $6x^2 - 5x - 6 = 0$

γ) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Λύση

α) τριώνυμο $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 64 - 36 = 28 > 0$ δύο ρίζες

$$x_1 = [-(-8) + \sqrt{28}] / 2 \cdot 1 = 6,5 \text{ περίπου}$$

$$x_2 = [-(-8) - \sqrt{28}] / 2 \cdot 1 = 1,5 \text{ περίπου}$$

β) τριώνυμο $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-6) = 25 + 144 = 169 > 0$ δύο ρίζες

$$x_1 = [-(-5) + \sqrt{169}] / 2 \cdot 6 = (5 + 13) / 12 = 1,5$$

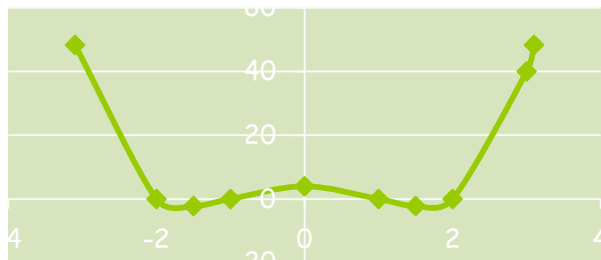
$$x_2 = [-(-5) - \sqrt{169}] / 2 \cdot 6 = (5 - 13) / 12 = -0,667$$

γ) είναι 4^{ου} βαθμού αντικαθιστούμε το $x^2 = \omega$ η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 5\omega + 4 = 0$ (μόνο θετικές τιμές ω)

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$$

$$\omega_1 = [-(-5) + \sqrt{9}] / 2 \cdot 1 = 5 + 3 / 2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$$

$$\omega_2 = [-(-5) - \sqrt{9}] / 2 \cdot 1 = 5 - 3 / 2 = 1 \Leftrightarrow x_3 = 1, x_4 = -1$$



Ασκήσεις

4. Αν ξέρουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού είναι παραβολή βρείτε την εξίσωση που την περιγράφει, όταν δίνονται: για την τιμή $P=1$ η ζήτηση είναι $Q=20$, για τιμή $P=5$ η ζήτηση είναι $Q=10$ και όταν $P=0$ η ζήτηση είναι $Q=60$.

Λύση

Αφού η συνάρτηση ζήτησης έχει την καμπύλη παραβολής θα είναι της μορφής $Q=\alpha P^2+\beta P+\gamma$.

Πρέπει να προσδιορίσουμε τα α , β , γ .

Αντικαθιστώ τις τιμές P , Q $(1,20)$ $(5,10)$ και $(0,60)$ και έχω τις παρακάτω 3 εξισώσεις:

$$20=\alpha 1^2+\beta 1+\gamma$$

$$10=\alpha 5^2+\beta 5+\gamma$$

$$60=\alpha 0^2+0P+\gamma \Leftrightarrow \gamma=60$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται

$$20=\alpha+\beta+60 \Leftrightarrow -100=-5\alpha-5\beta-300$$

$$10=25\alpha+5\beta+60 \Leftrightarrow -50=25\alpha+5\beta \quad \text{προσθέτοντας κατά μέλη:}$$

$$-150=20\alpha-300 \Leftrightarrow \alpha=7,5, \text{ οπότε } 20=7,5+\beta+60 \Leftrightarrow \beta=-47,5$$

Επομένως η συνάρτηση ζήτησης είναι $Q=7,5P^2-47,5P+60$

Ασκήσεις

5. Αν η συνάρτηση προσφοράς ενός προϊόντος είναι

$Q_s = P^2 + 5P + 1$ και η συνάρτηση ζήτησης $Q_d = 9 - 2P^2$ να βρεθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας της αγοράς.

Λύση

ισορροπίας της αγοράς σημαίνει στα μαθηματικά $Q_s = Q_d \Leftrightarrow$

$$P^2 + 5P + 1 = 9 - 2P^2 \Leftrightarrow 3P^2 + 5P - 8 = 0$$

Πρόκειται για εξίσωση τριωνύμου, και βρίσκουμε τη διακρίνουσα

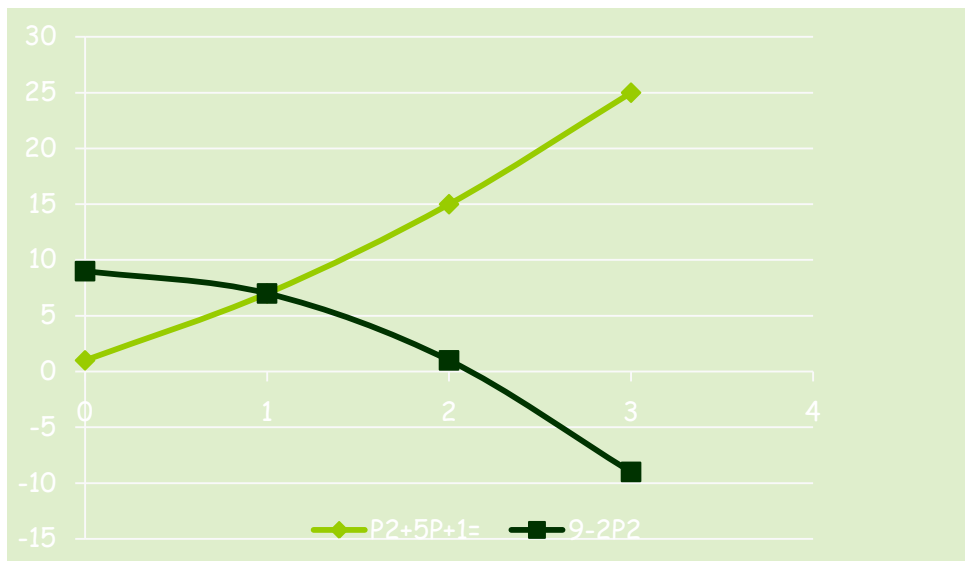
$$\Delta = (5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 25 + 96 = 121 > 0 \text{ δύο ρίζες}$$

$$P_1 = \frac{-5 + \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = 1$$

$$P_2 = \frac{-5 - \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = -16/6 \text{ μη αποδεκτή αρνητική ρίζα}$$

Όταν η τιμή $P=1$ τότε η ποσότητα $Q=1^2+5 \cdot 1+1=7$

Άρα το σημείο ισορροπίας είναι το σημείο (1,7).



Ασκήσεις

6. Αν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για δύο αλληλεξαρτώμενα προϊόντα δίνονται από τις εξισώσεις:

$$Q_{d1}=6-3P_1+P_2$$

$$Q_{s1}=-6+2P_1$$

$$Q_{d2}=24+P_1-P_2$$

$$Q_{s2}=-4+3P_2$$

Να βρεθούν οι τιμές και οι ποσότητες στην κατάσταση ισορροπίας.

Λύση

ισορροπίας της αγοράς σημαίνει στα μαθηματικά $Q_s = Q_d \Leftrightarrow$

$Q_{s1} = Q_{d1}$ και $Q_{s2} = Q_{d2} \Leftrightarrow$ δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους P_1 και P_2

$$\left. \begin{array}{l} -6+2P_1 = 6-3P_1+P_2 \\ -4+3P_2 = 24+P_1-P_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5P_1-P_2=12 \\ -P_1+4P_2=28 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} -6+2P_1 = 6-3P_1+P_2 \\ -4+3P_2 = 24+P_1-P_2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{πολ/ντας με 4 και προσθέτοντας :} \\ \text{πολ/ντας με 5 και προσθέτοντας :} \end{array}$$

$$\text{Προκύπτει } 20P_1-P_1-4P_2+4P_2=48+28 \Leftrightarrow 19P_1=76 \Leftrightarrow P_1=4$$

οπότε $5*4-P_2=12 \Leftrightarrow P_2=8$ και αντικαθιστώντας βρίσκουμε τις ποσότητες

$$Q_{s1} = Q_{d1} = -6+2*4=2$$

$$Q_{s2} = Q_{d2} = -4+3*8=20$$

Άρα το πρώτο προϊόν πουλιέται σε 2 μονάδες με τιμή 4 και το δεύτερο σε 20 μονάδες με τιμή 8.

Ασκήσεις

7. Ξέρουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού είναι $Q_d=100-P$.

Αν η συνάρτηση κόστους παραγωγής του αγαθού είναι $TC=2Q^2+4Q+156$,

α) να προσδιορισθεί το σημείο παραγωγής Q_0 , στο οποίο η επιχείρηση δεν έχει ούτε ζημιές ούτε κέρδη (νεκρό σημείο)

β) Πόσα θα είναι τα κέρδη της επιχείρησης αν η παραγωγή είναι 20 μονάδες;

Λύση

Κέρδη = έσοδα – έξοδα

Έσοδα = R = πωλούμενη ποσότητα Q τιμή = $Q \times P$

Επειδή μας ζητούν το σημείο παραγωγής Q_0 , θα βρούμε τα έσοδα και τα κέρδη ως συνάρτηση του Q

$Q=100-P \Leftrightarrow P=100-Q$ και αντικαθιστώντας έσοδα $R=Q(100-Q)=100Q-Q^2$

Κέρδη = $\Pi(Q) = Q \times P - TC = 100Q - Q^2 - (2Q^2 + 4Q + 156) =$

$= 100Q - Q^2 - 2Q^2 - 4Q - 156 = 96Q - 3Q^2 - 156 \Leftrightarrow$

Επομένως τα κέρδη είναι $\Pi(Q) = -3Q^2 + 96Q - 156$.

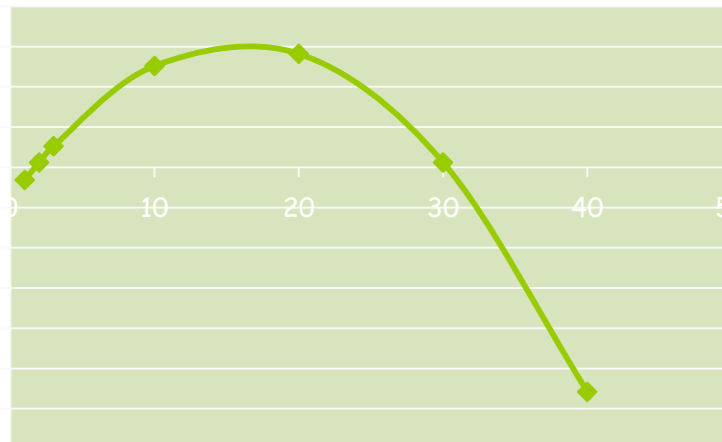
Πρόκειται για συνάρτηση δευτέρου βαθμού, η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή προς τα κάτω.

Εντοπίζουμε αν υπάρχουν τα σημεία μηδενισμού των κερδών, βρίσκοντας την διακρίνουσα του τριωνύμου,

$\Delta = 96^2 - 4(-3)(-156) = 9.216 - 1.872 = 7.344$ θετική επομένως δύο ρίζες

$Q_1 = \frac{-96 + \sqrt{7344}}{2(-3)} = 1,7$ περίπου

$Q_2 = \frac{-96 - \sqrt{7344}}{2(-3)} = 30,2$ περίπου



Ασκήσεις

8. Η συνάρτηση ζήτησης πετρελαίου θέρμανσης μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση $Q=180-20P-P^2$

Για ποια ή ποιες τιμές η ζητούμενη ποσότητα μηδενίζεται;

Να παρουσιασθεί γραφικά η συνάρτηση ζήτησης πετρελαίου θέρμανσης.

Λύση

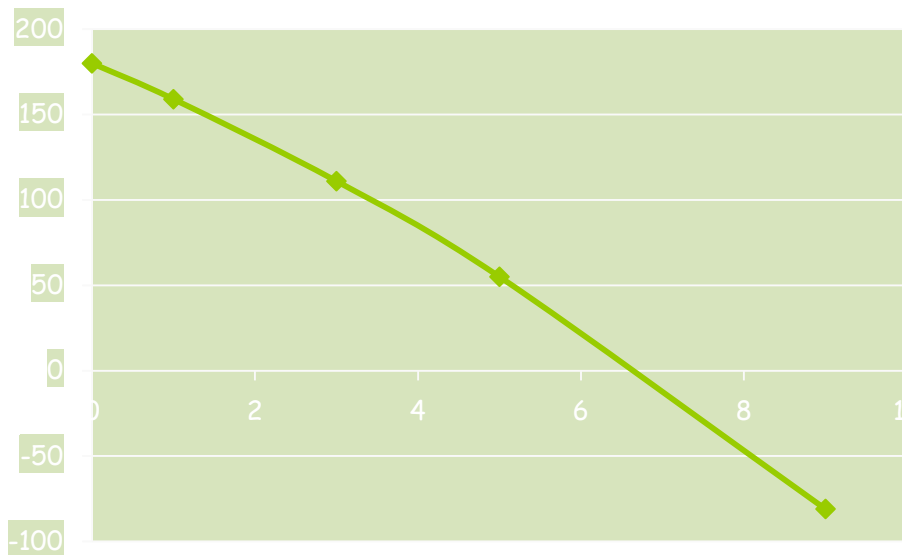
Η συνάρτηση είναι τριώνυμο και για να βρούμε πότε η ποσότητα μηδενίζεται θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$Q=0 \Leftrightarrow 180-20P-P^2=0 \Leftrightarrow -P^2-20P+180=0 \Leftrightarrow \text{διακρίνουσα } \Delta=400+720=1120$$

$$P1=[-(-20)+\sqrt{1120}]/2(-1)=-26,75 \text{ περίπου απορρίπτεται ως αρνητική}$$

$$P2=[-(-20)-\sqrt{1120}]/2(-1)=6,75 \text{ περίπου}$$

Όπως βλέπουμε και στη γραφική παράσταση η ζήτηση είναι φθίνουσα για θετικές τιμές του P και μηδενίζεται στο 6,75.



Ασκήσεις

9. Να βρεθεί η εξίσωση πεδίου του προϋπολογισμού για τις ποσότητες X και Y δύο αγαθών όταν η τιμή του X είναι 2, η τιμή του Y είναι 4 και ο μέγιστος διαθέσιμος προϋπολογισμός είναι 140 μονάδες

Να βρεθούν οι μέγιστες δυνατές ποσότητες κάθε αγαθού.

Τι θα συμβεί αν μειωθεί η τιμή του X από 2 σε 1,4;

Να βρεθούν οι μέγιστες δυνατές ποσότητες κάθε αγαθού όταν ο μέγιστος διαθέσιμος προϋπολογισμός γίνει 200 μονάδες αντί για 140.

Λύση

Τα χρήματα που θα ξοδέσουμε για την αγορά των X ποσοτήτων θα είναι $2X$, ενώ τα χρήματα για την αγορά των Y ποσοτήτων θα είναι $4Y$

συνολικά τα χρήματα μας δεν μπορούν να ξεπεράσουν τα 140 (προυπολογισμός)

Έτσι θα έχουμε την ανίσωση $2X + 4Y \leq 140$

Αν ξοδέψουμε όλα τα χρήματα μόνο για X θα αγοράσουμε 70 μονάδες X , ενώ αν τα ξοδέψουμε μόνο για Y θα αγοράσουμε 35 μονάδες Y

Αν η τιμή του X μειωθεί σε 1,4 η ανίσωση γίνεται $1,4X + 4Y \leq 140$ και η μέγιστη ποσότητα X γίνεται 100 μονάδες.

Αν αυξηθεί ο προϋπολογισμός σε 200, η ανίσωση γίνεται $2X + 4Y \leq 200$

Και η μέγιστη ποσότητα X γίνεται 100 μονάδες

και η μέγιστη ποσότητα Y γίνεται 50 μονάδες

Ασκήσεις

10. Ο πληθυσμός σε ένα χωριό ήταν 553 άτομα το 2001

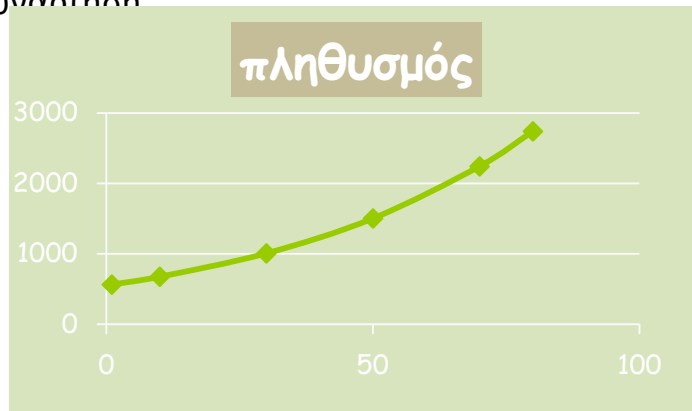
Ο πληθυσμός τα μελλοντικά έτη αναμένεται να αυξηθεί σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\Pi = 553 e^{0,02t}$$

Να σχεδιαστεί ο προβλεπόμενος πληθυσμός από $t = 0$ (2001) έως $t = 30$ (2031). Σε ποιο έτος θα φτάσει ο πληθυσμός τα 2500 άτομα;

Λύση

Έχουμε εκθετική συνάρτηση



Για να δούμε πότε $\Pi = 2500$ άτομα, εντοπίζουμε περίπου το χρόνο στο διάγραμμα

Εναλλακτικά, λύνουμε την εξίσωση

$$2500 = 553 e^{0,02t} \Leftrightarrow e^{0,02t} = 2500/553 \Leftrightarrow 0,02t = \ln(4,52) \Leftrightarrow t = 1,5/0,02 \Leftrightarrow$$

$t = 75,4$ χρόνια, δηλαδή στη μέση του 2076 περίπου

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να βρεθούν οι λύσεις των εξισώσεων

α) $x^2 - 2x - 8 = 0$

β) $3x^2 - 4x - 6 = 0$

γ) $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$

2. Αν ξέρουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού είναι παραβολή βρείτε την εξίσωση που την περιγράφει, όταν δίνονται: για την τιμή $P=1$ η ζήτηση είναι $Q=10$, για τιμή $P=4$ η ζήτηση είναι $Q=30$ και όταν $P=0$ η ζήτηση είναι $Q=50$.

3. Αν η συνάρτηση προσφοράς ενός προϊόντος είναι

$Q_s = P^2 + 4P + 1$ και η συνάρτηση ζήτησης $Q_d = 25 - 3P^2$ να βρεθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας της αγοράς.

4. Η συνάρτηση ζήτησης πετρελαίου θέρμανσης μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση $Q = 200 - 10P - P^2$

Για ποια ή ποιες τιμές η ζητούμενη ποσότητα μηδενίζεται;

Να παρουσιασθεί γραφικά η συνάρτηση ζήτησης πετρελαίου θέρμανσης.

5. Αν η συνάρτηση κόστους παραγωγής του αγαθού είναι

$TC = 2Q^2 + 6Q + 80$, η συνάρτηση ζήτησης του αγαθού είναι

$Q_d = 20 - P$, να προσδιορισθεί το σημείο παραγωγής Q_0 , στο

οποίο η επιχείρηση δεν έχει ούτε ζημιές ούτε κέρδη (νεκρό σημείο).