

Παράγωγος συνάρτησης εφαρμογές

- Ασκήσεις με τη λύση τους και παρόμοιες προτεινόμενες

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων
(a) $f(x) = x^3 - x^2 + 6$ (b) $f(x) = x - 2/x$ (c) $f(x) = -4x^4$
(d) $f(x) = (-2x^3 + 4)^6$ (e) $f(x) = (x+2)^5(x-3)^6$
(f) $f(x) = (2x^3 - 6)/(x+1)$ (g) $f(x) = 3x^2 + 8\sqrt{x} - 4$

Λύση

- (a) $f'(x) = (x^3 - x^2 + 6)' = 3x^2 - 2x$
(b) $f'(x) = (x - 2/x)' = x' - (2/x)' = 1 - 2(x^{-1})' = 1 - 2(-1)x^{-2} = 1 + 2/x^2$
(c) $f'(x) = (-4x^4)' = -4 \cdot 4x^3 = -16x^3$
(d) $f'(x) = [(-2x^3 + 4)^6]' = 6 \cdot (-2x^3 + 4)^5 \cdot (-2x^3 + 4)'$
 $= 6 \cdot (-2x^3 + 4)^5 \cdot (-6x^2) = -36x^2 \cdot (-2x^3 + 4)^5$
(e) $f'(x) = [(x+2)^5(x-3)^6]' = [(x+2)^5]'(x-3)^6 + (x+2)^5[(x-3)^6]' =$
 $5(x+2)^4 \cdot 1 \cdot (x-3)^6 + (x+2)^5 \cdot 6 \cdot (x-3)^5 \cdot 1 =$
 $5(x+2)^4(x-3)^6 + 6(x+2)^5(x-3)^5 =$
(f) $f'(x) = [(2x^3 - 6)/(x+1)]' =$
 $[(2x^3 - 6)'(x+1) - (2x^3 - 6)(x+1)']/(x+1)^2 =$
 $[6x^2(x+1) - (2x^3 - 6) \cdot 1]/(x+1)^2 = (4x^3 + 6x^2 + 6)/(x+1)^2$
(g) $f'(x) = (3x^2 + 8\sqrt{x} - 4)' = 6x + 8 \cdot 1/2 \cdot x^{(-1/2)} = 6x + 4/\sqrt{x}$

Ασκήσεις

2. Η συνάρτηση κόστους είναι $C(q)=5q^3-6q^2+4q+150$. Να βρεθεί το οριακό κόστος σε ένα σημείο q .

Λύση:

- $MC(q)=(+5q^3)'+(-6q^2)'+(4q)'=15q^2-12q+4$

αν $q=2$ τότε $MC(2)=15*2^2-12*2+4=60-24+4=40$

Αν η παραγωγή αυξηθεί από τις 2 μονάδες, το κόστος θα αυξηθεί κατά 40 μονάδες

αν $q=5$ τότε $MC(5)=15*5^2-12*5+4=375-60+4=319$

αν $q=1/2$ τότε $MC(1/2)=15*(1/2)^2-12*(1/2)+4=15/4-6+4=2$

Αν η παραγωγή αυξηθεί από τις 1/2 μονάδες, το κόστος θα αυξηθεί κατά 2 μονάδες

Ασκήσεις

3. Να υπολογισθεί η ελαστικότητα της συνάρτησης ζήτησης $Q(p) = -4p^2 + 6p + 80$ στο σημείο $p=3$ και να ερμηνευθεί.

Λύση

Η ελαστικότητα ζήτησης βρίσκεται από τον τύπο:

$$\varepsilon = dQ/dp * p/Q \text{ ή } \varepsilon = Q'(p) * p/Q(p)$$

$$Q'(p) = (-4p^2 + 6p + 80)' = -8p + 6, \text{ αντικαθιστώντας } p=3$$

$$Q'(3) = -8*3 + 6 = -24 + 6 = -18$$

Επίσης

$$Q(3) = -4*3^2 + 6*3 + 80 = -36 + 18 + 80 = 62$$

$$\text{Οπότε } \varepsilon_{p=3} = Q'(3) * 3/Q(3) = -18*3/62 = -54/62 = -0,87$$

Αν η τιμή 3 αυξηθεί κατά 1%, τότε η ποσότητα Q θα μειωθεί κατά 0,87%

Αν η τιμή 3 μειωθεί κατά 1%, τότε η ποσότητα Q θα αυξηθεί κατά 0,87%

Ασκήσεις

4. Να υπολογισθεί η ελαστικότητα της συνάρτησης

$Y = 5p^{-2}$ στα σημεία $p=3$ και $p=10$ και να ερμηνευθεί.

Λύση

Η ελαστικότητα βρίσκεται από τον τύπο:

$$\varepsilon = Y'(p) * p/Y(p)$$

$$Y'(p) = (5p^{-2})' = -2 * 5p^{-3} = -10 p^{-3} \text{ αντικαθιστώντας } p=3$$

$$Y'(3) = -10 3^{-3} = -10/27 = -0,04$$

Επίσης

$$Y(3) = 5 * 3^{-2} = 5/9 = 0,555$$

$$\text{Οπότε } \varepsilon_{p=3} = Y'(3) * 3/Y(3) = -0,04 * 3/0,555 = -0,12/0,555 = -0,2$$

Αν η τιμή 3 αυξηθεί κατά 1%, τότε η ποσότητα Y θα μειωθεί κατά 0,2%

αντικαθιστώντας $p=10$

$$Y'(10) = -10 10^{-3} = -10/1000 = -0,01$$

$$Y(10) = 5 * 10^{-2} = 5/100 = 0,05$$

$$\text{Οπότε } \varepsilon_{p=10} = Y'(10) * 10/Y(10) = -0,01 * 10/0,05 = -2$$

Αν η τιμή 10 αυξηθεί κατά 1%, τότε η ποσότητα Y θα μειωθεί κατά 2%

Ασκήσεις

5. Για τη συνάρτηση $f(x)=x^4+3x+4$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $(-1,2)$.

Λύση

Πρέπει αρχικά να βρούμε την κλίση της εφαπτομένης που είναι ίση με την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $x=-1$

$$f'(x)=4x^3+3 \text{ και } f'(-1)=4*(-1)^3+3 = -1$$

Η εφαπτομένη θα είναι μια ευθεία με κλίση -1 που περνάει από το σημείο $(-1,2)$.

Η εξίσωση της ευθείας αυτής θα βρεθεί από τον τύπο

$$y-y_1 = a(x-x_1), \text{ όπου } a=-1, x_1=-1 \text{ και } y_1=2.$$

$$y-2 = -1(x-(-1)) \Leftrightarrow y = -x+1 \text{ θα είναι η εξίσωση της ευθείας της εφαπτομένης}$$

Ασκήσεις

1. Η συνάρτηση κόστους είναι $C(q)=5q^4-6q^3+4q+250$. Να βρεθεί η παράγωγος του κόστους και να ερμηνευθεί όταν $q=5$.

Λύση

$$C'(q)=4*5q^3-3*6q^2+4=20q^3-18q^2+4 \text{ αντικαθιστώντας } q=5$$

αντικαθιστώντας $q=5$

$$C'(5)=20*5^3-18*5^2+4=2500-450+4=2054$$

Όταν η παραγωγή αυξηθεί λίγο από την τιμή 5, τότε το κόστος θα αυξηθεί κατά 2.054 μονάδες.

2. Να υπολογισθεί η ελαστικότητα της συνάρτησης ζήτησης $Q(p)=-5p^2+30p+50$ στο σημείο $p=2$ και να ερμηνευθεί.

Λύση

Η ελαστικότητα ζήτησης βρίσκεται από τον τύπο:

$$\varepsilon=Q'(p) * p/Q(p)$$

$$Q'(p)=(-5p^2+30p+50)'=-10p+30, \text{ αντικαθιστώντας } p=2$$

$$Q'(2)=-10*2+30=-20+30=+10$$

Επίσης

$$Q(2)=-5*2^2+30*2+50=-20+60+50=90$$

$$\text{Οπότε } \varepsilon_{p=2} = Q'(2) * 2/Q(2) = 10*2/90=20/90=0,22$$

Αν η τιμή 2 αυξηθεί κατά 1%, τότε η ποσότητα Q θα αυξηθεί κατά 0,22%.

Σημείωση. Από την οικονομική θεωρία είναι αφύσικο για κανονικό αγαθό να αυξάνεται η ποσότητα καθώς αυξάνεται η τιμή

Ασκήσεις

3. Αν τα έσοδα από την πώληση k τεμαχίων δίνονται από τη συνάρτηση $R(k)=3000(3-2/k)$, βρείτε τη συνάρτηση οριακών εσόδων. Κατόπιν υπολογίστε πόσα είναι τα έσοδα αν $k=4$ και πόσα είναι τα οριακά έσοδα όταν $k=4$. Ποια είναι η ελαστικότητα της συνάρτησης εσόδων ως προς το πλήθος τεμαχίων όταν $k=4$;

Λύση

$$MR(k)=R'(k)=3000(3-2/k)'=3000(+2/k^2)= 6000/ k^2$$

$$\text{Εσοδα } R(4)=3000(3-2/4)= 3000*2,5=7500$$

$$\text{Οριακά έσοδα } R'(4)= 6000/ 4^2 =6000/16= 375$$

$$\text{Ελαστικότητα } \varepsilon_{k=4} = R'(4) *4/R(4) = 375 *4/7500 =0,2$$

Ασκήσεις

4. Δίνεται η συνάρτηση ζήτησης $Q=5/p$. Να γίνει η γραφική της παράσταση. Να βρεθούν οι τιμές p για τις οποίες η ζήτηση είναι φθίνουσα. Να υπολογισθεί η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή όταν $p=10$. Να βρεθεί η συνάρτηση εσόδων και να υπολογισθεί η ελαστικότητα εσόδων ως προς την τιμή όταν $p=10$.

λύση

Δίνουμε διάφορες τιμές στο p και βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές Q

p	1	5	10	20	40
Q	5	1	0,5	0,25	0,125

$$Q'(p)=(5/p)' = -5/p^2$$



Η παράγωγος είναι πάντα αρνητική και επομένως για όλες τις τιμές p η ζήτηση είναι φθίνουσα.

Η ελαστικότητα ζήτησης βρίσκεται από τον τύπο:

$$\varepsilon = Q'(p) * p/Q(p) \quad \text{αντικαθιστώντας } p=10$$

$$Q'(10) = -5/10^2 = -0,05$$

$$\text{Επίσης } Q(10) = 5/10 = 0,5$$

$$\text{Οπότε } \varepsilon_{p=10} = Q'(10) * 10/Q(10) = -0,05 * 10/0,5 = -1$$

συνάρτηση εσόδων $R(p)=p*Q=p*5/p=5$ παντού σταθερή και επομένως η παράγωγος της 0 και η ελαστικότητα εσόδων είναι παντού 0 αφού τα έσοδα είναι σταθερά 5.

Ασκήσεις για εξάσκηση

1. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

(a) $f(x) = 7x^3 - 4x^2 + 16$ (b) $f(x) = x - 4/x$ (c) $f(x) = -4x^3$

(d) $f(x) = (-2x^3 + 6)^6$ (e) $f(x) = (x+3)^5(x-5)^6$

(f) $f(x) = (2x^3 - 6)/(x+3)$ (g) $f(x) = 3x^4 + 9\sqrt{x} - 5$

2. Η συνάρτηση κόστους είναι $C(q) = 3q^3 - 4q^2 + 10q + 150$. Να βρεθεί το οριακό κόστος σε ένα σημείο $q=4$ και να ερμηνευθεί.

3. Να υπολογισθεί η ελαστικότητα της συνάρτησης ζήτησης $Q(p) = -2p^2 + 10p + 80$ στο σημείο $p=5$ και να ερμηνευθεί.

4 Δίνεται η συνάρτηση ζήτησης $Q=8/p$. Να γίνει η γραφική της παράσταση. Να βρεθούν οι τιμές p για τις οποίες η ζήτηση είναι φθίνουσα. Να υπολογισθεί η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή όταν $p=4$. Να βρεθεί η συνάρτηση εσόδων και να υπολογισθεί η ελαστικότητα εσόδων ως προς την τιμή όταν $p=4$