

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Να βρεθούν οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές της συνάρτησης
 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

λύση

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ $f'(x) = 6x^2 + 10x - 4$, $f''(x) = 12x + 10$,

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 10x - 4 = 0$, τριώνυμο και βρίσκουμε τις ρίζες του $x = 4/12$ ή $x = -24/12 = -2$

$f''(4/12) = 12(4/12) + 10 = 14 > 0$ άρα η f έχει ελάχιστο στο $x = 4/12$

$f''(-24/12) = 12(-2) + 10 = -14 < 0$ άρα η f έχει μέγιστο στο $x = -2$

2. Να βρεθούν οι παράγωγοι ανώτερης τάξης και τα ακρότατα της συνάρτησης
 $f(x) = -2x^4 + 5x^2 - 3$.

λύση

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

$f'(x) = -8x^3 + 10x$, $f''(x) = -24x^2 + 10$, $f'''(x) = -48x$, $f^{(4)}(x) = -48$, $f^{(5)}(x) = 0$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x = \sqrt{5}/2$, $x = -\sqrt{5}/2$

$f''(0) = 10 > 0$ άρα η f παρουσιάζει στο $x = 0$ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ίσο με -3 ,

$f''(\sqrt{5}/2) = -20 < 0$ άρα η f παρουσιάζει στο $x = \sqrt{5}/2$ ΜΕΓΙΣΤΟ ίσο με $1/8$,

$f''(-\sqrt{5}/2) = -20 < 0$ άρα η f παρουσιάζει στο $x = -\sqrt{5}/2$ ΜΕΓΙΣΤΟ ίσο με $1/8$

3. Να βρεθούν τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x) = 5x^3$.

λύση

$f'(x) = 15x^2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(x) = 30x$, $f''(0) = 0$ άρα η συνάρτηση παρουσιάζει στο $x = 0$ καμπή / $(0,0)$ σημείο καμπής

4. Να προσδιορισθεί το διάστημα στο οποίο η συνάρτηση
 $f(x) = (x-2)^2 + (x-5)^2 + 2x$, είναι φθίνουσα.

λύση

υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο (κανόνας παρενθέσεων ως σύνθεση συναρτήσεων)

$f'(x) = 2(x-2) + 2(x-5) + 2 = 4x - 12$

για να είναι η συνάρτηση φθίνουσα θα πρέπει $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x - 12 < 0 \Leftrightarrow x < 3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Η συνάρτηση κόστους είναι

$C(q)=5q^3-6q^2+4q+150$. Να βρεθεί το οριακό κόστος και το μέσο κόστος όταν $q=5$.

λύση

οριακό κόστος $MC(q)=15q^2-12q+4$ $MC(5)=319$

μέσο κόστος $AC(q)=(5q^3-6q^2+4q+150)/q$ $AC(5)=129$

2. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους της άσκησης 1.

λύση

ρυθμός μεταβολής =παράγωγος του μέσου κόστους

$$AC'(q) = [(5q^3 - 6q^2 + 4q + 150)/q]' = (10q^3 - 6q^2 - 150)/q^2$$

για $q=5$ Ρυθμός Μεταβολής $AC'(5) = 38$ αν η ποσότητα αυξηθεί λίγο πάνω από 5 μονάδες τότε το μέσο κόστος θα αυξηθεί κατά 38 μονάδες.

3. Αν $R(q)=-5q^2+90q$ να βρείτε:

α) τα οριακά έσοδα για $q=2$,

β) τα μέσα έσοδα για $q=4$.

λύση

α) τα οριακά έσοδα για $q=2$, υπολογίζω την παράγωγο $MR(q)=-10q+90$ και αντικαθιστώντας βρίσκω $MR(2)=70$

β) τα μέσα έσοδα για $q=4$, ισχύει $AR(q) = (-5q^2+90q)/q = -5q+90$ αντικαθιστώντας $AR(4)=70$

4. Η συνάρτηση κόστους είναι

$C(q)=0.25q^2+2q+25$. Αν η τιμή είναι $p=5$ μονάδες, να βρεθεί η ποσότητα στην οποία μεγιστοποιούνται τα κέρδη.

λύση

Για να βρω το σημείο μεγιστοποίησης των κερδών, πρέπει ή να βρω τη συνάρτηση κερδών κι κατόπιν, τότε τα οριακά κέρδη $=0$ ή τότε ισχύει οριακό κόστος = οριακό έσοδο

Έχουμε τη συνάρτηση κόστους αλλά δεν δίνεται η συνάρτηση ζήτησης.

Ξέρουμε όμως ότι η τιμή του προϊόντος είναι 5. επομένως τα έσοδα θα είναι $R(q)=5q$

(το πλήθος των πωλούμενων μονάδων επί την τιμή 5)

οριακό κόστος $MC(q)=0,5q+2$ ΚΑΙ οριακό έσοδο $MR(q)=5$

Θα είναι $MC(q)=MR(q)$ όταν $0,5q+2=5 \Leftrightarrow q=6$ μονάδες

5. Η συνάρτηση μέσου κόστους είναι
 $AC(q) = 5/q + 4q + 3$, να βρεθεί η συνάρτηση οριακού κόστους.

λύση

Για τη συνάρτηση μέσου κόστους, ισχύει $AC(q) = C(q) / q$ οπότε

$$C(q) = AC(q) \cdot q = (5/q + 4q + 3) \cdot q \Leftrightarrow C(q) = 4q^2 + 3q + 5$$

Η συνάρτηση οριακού κόστους θα είναι $MC(q) = C'(q) = (4q^2 + 3q + 5)' = 8q + 3$

6. Μια επιχείρηση έχει πάγιο κόστος 240 ευρώ το μήνα και μεταβλητό κόστος $4q^2 - 40q$, όπου q η παραγόμενη μηνιαία ποσότητα. Να βρεθεί
- α) η συνάρτηση συνολικού κόστους
 - β) η συνάρτηση μέσου κόστους και το σημείο που αυτό ελαχιστοποιείται
 - γ) Στο σημείο ελαχιστοποίησης του μέσου κόστους, πόσο είναι το συνολικό κόστος και πόσο το μέσο κόστος;

λύση

- α) Η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι
ολικό κόστος = σταθερό κόστος + μεταβλητό κόστος

$$C(q) = 4q^2 - 40q + 240$$

β) Η συνάρτηση μέσου κόστους $AC(q) = (4q^2 - 40q + 240)/q$

Η παράγωγος του μέσου κόστους είναι $AC'(q) = [(4q^2 - 40q + 240)/q]' = 4q - 240/q^2$

Στο σημείο που αυτό ελαχιστοποιείται θα είναι το σημείο μηδενισμού της παραγώγου
 $AC'(q) = 0 \Leftrightarrow 4q^2 - 240/q^2 = 0 \Leftrightarrow 4q^2 - 240 = 0 \Leftrightarrow q = \sqrt{60}$ (ή 7.75) μόνο θετικές τιμές

θα πρέπει στο σημείο αυτό, η 2η παράγωγος να είναι θετική.

Είναι $AC''(q) = [4q - 240/q^2]' = 4 + 480/q^3 > 0$ για όλες τις θετικές τιμές του q .

- γ) Στο σημείο $q = \sqrt{60}$ ελαχιστοποίησης του μέσου κόστους,

το συνολικό κόστος $C(\sqrt{60}) = 4(\sqrt{60})^2 - 40\sqrt{60} + 240 = 480 - 40\sqrt{60} = 480 - 309,85 = 170,15$

το μέσο κόστος $AC(\sqrt{60}) = (4\sqrt{60}^2 - 40\sqrt{60} + 240)/\sqrt{60} = 170,15/7,75 = 21,93$

7. Βρείτε τη συνάρτηση κερδών, όταν η συνάρτηση κόστους είναι $C = 150 + 30Q$ και η συνάρτηση ζήτησης είναι $Q = 40 - 2P$.
Η συνάρτηση κερδών είναι αύξουσα ή φθίνουσα; Πότε έχει μέγιστο;

λύση

Η συνάρτηση κερδών: $\Pi(Q) = -1/2Q^2 - 10Q - 150$

Διακρίνουμε του τριωνύμου $\Delta < 0$ η συνάρτηση δεν μηδενίζεται και είναι πάντα ομόσημη του a (αρνητική), δηλαδή για οποιοδήποτε Q έχουμε αρνητικό κέρδος, επομένως μόνο ζημιά.

πρώτη παράγωγος $\Pi'(Q) = -Q - 10$ και μηδενίζεται όταν $\Pi'(Q) = 0 \Leftrightarrow Q = -10$ ΔΕΚΤΕΣ ΤΙΜΕΣ Q μόνο θετικές $[0, +\infty]$ Η συνάρτηση κερδών είναι ΦΘΙΝΟΥΣΑ

ΜΕΓΙΣΤΟ έχει στο $Q = 0$ $\Pi(0) = -150$ η μικρότερη δυνατή ζημιά της..