

# Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων

(a)  $f(x) = x^3 - x^2 + 6$  (b)  $f(x) = x - 2/x$  (c)  $f(x) = -4x^4$

(d)  $f(x) = (-2x^3 + 4)^6$  (e)  $f(x) = (x+2)^5 + (x-3)^6$

(f)  $f(x) = (2x^3 - 6) - (x+1)$  (g)  $f(x) = 3x^2 + 8\sqrt{x} - 4$

## Λύση

(a)  $\int f(x) dx = x^4/4 - x^3/3 + 6x + c$

(b)  $\int f(x) dx = \int x dx - \int 2/x dx = x^2/2 - 2 \int 1/x dx =$   
 $x^2/2 - 2 \ln x + c$

(c)  $\int f(x) dx = \int -4x^4 dx = -4x^5/5 + c$

(e)  $\int f(x) dx = \int [(x+2)^5 + (x-3)^6] dx =$

$\int (x+2)^5 dx + \int (x-3)^6 dx = \int (x+2)^5 d(x+2) + \int (x-3)^6 d(x-3) =$   
 $(x+2)^6/6 + (x-3)^7/7 + c$

(f)  $\int [(2x^3 - 6) - (x+1)] dx = \int (2x^3 - 7 - x) dx =$   
 $= 2x^4/4 - 7x - x^2/2 + c$

(g)  $\int [3x^2 + 8\sqrt{x} - 4] dx = \int 3x^2 dx + \int 8\sqrt{x} dx - \int 4 dx =$   
 $3x^3/3 + 8 \int \sqrt{x} dx - 4x + c = x^3 + 8 \int x^{1/2} dx - 4x + c = x^3 + 8$   
 $x^{3/2}/3/2 - 4x + c = x^3 + 16/3 x^{3/2} - 4x + c$

# Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων  
(d)  $f(x)=(-2x^3+4)^6$

Λύση

$$(d) \int f(x) dx = \int [(-2x^3+4)^3]^2 dx =$$

$$\int [-8x^9+64+3(-2x^3)^2 4-3(2x^3)16]^2 =$$

$$\int (-8x^9+64+12x^6-96x^3)^2 dx =$$

$$\int (-8x^9+64+12x^6-96x^3) * (-8x^9+64+12x^6-96x^3) dx =$$

$$\int (64x^{18}-8*64x^9-8*12x^{15}+8*96x^{12}$$

$$-64*8x^9+64*64+64*12x^6-64*96x^3$$

$$-12*8x^{15}+12*64x^6+12*12x^{12}-12*96x^9+$$

$$+96*8x^{12}-96*64x^3-96*12x^9+96*96x^6) dx =$$

$$\int [64x^{18}- 16*12x^{15} -(16*64+96*24)x^9+(16*96+144)x^{12} -$$

$$128*96x^3+(24*64+96*96)x^6+64*64] dx =$$

$$=\int (64x^{18}- 192x^{15} -3.328x^9+1.680x^{12} -12.288x^3+2.304x^{24}-$$

$$10.752x^6+4.096) dx =$$

$$= 64x^{19}/19-192x^{16}/16-3.328x^{10}/10+1.680x^{13}/13-$$

$$12.288x^4/4+2.304x^{25}/25-10.752x^7/7+4.096x+c$$

# Ασκήσεις

2. Η συνάρτηση οριακού κόστους είναι

$MC(q)=5q^3-6q^2+4q+150$ . Να βρεθεί το ολικό κόστος όταν το σταθερό κόστος είναι 100 μονάδες.

Λύση

$$\begin{aligned} \int (5q^3 - 6q^2 + 4q + 150) dq &= \\ &= 5q^4 / 4 - 6q^3 / 3 + 4q^2 / 2 + 150q + c \\ &= 1.25q^4 - 2q^3 + 2q^2 + 150q + c \end{aligned}$$

- Σταθερό κόστος, σημαίνει ότι δεν εξαρτάται από την ποσότητα παραγωγής και υπάρχει για  $q=0$ .
- Άρα για  $q=0$  το  $C=100$  και αντικαθιστώντας βρίσκουμε
- την σταθερά  $c$ .
- $C(0)=c=100 \Leftrightarrow c=100$

# Ασκήσεις

3. Αν η συνάρτηση οριακών εσόδων είναι

$MR = -3q^2 - 4q + 50$  να βρεθεί η συνάρτηση εσόδων και η συνάρτηση ζήτησης  $p = D(q)$ .

Λύση

$$R(q) = \int (-3q^2 - 4q + 50) dq = -q^3 - 2q^2 + 50q + c$$

Εσοδα είναι 0 όταν  $q=0$  άρα  $c=0$

Συνάρτηση ζήτησης;

$R = q \cdot p$  έσοδα = τιμή επί ποσότητα

$$-q^3 - 2q^2 + 50q = q \cdot p \Leftrightarrow p = R/q = -q^2 - 2q + 50 \Leftrightarrow p = -q^2 - 2q + 50$$

# Ασκήσεις

4. Η συνάρτηση οριακού κόστους είναι

$MC(q)=10e^q-0,2q$ . Να βρεθεί το ολικό κόστος όταν το σταθερό κόστος είναι 50 μονάδες.

Λύση

$$C(q)= \int (10e^q-0,2q) dq = 10e^q-0,2q^2/2 +c = 10e^q-q^2/10 +c$$

$$C(0)=50 \Leftrightarrow 10e^0-0^2/10 +c=50 \Leftrightarrow 10 +c=50 \Leftrightarrow c=50-10=40$$

Επομένως το ολικό κόστος είναι  $C(q)= 10e^q-q^2/10 +40$

# Ασκήσεις

5. Αν η οριακή ροπή προς κατανάλωση είναι  $dC/dY=0,6$  και η κατανάλωση είναι 60 μονάδες όταν το εισόδημα είναι 0, να βρεθεί η συνάρτηση κατανάλωσης.

## Λύση

Κατανάλωση  $C=aY+b$

$$C = \int 0,6 dY = 0,6Y + c$$

αν  $Y=0$  τότε  $c=60$

Κατανάλωση  $C=0,6Y+60$