

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Ασκήσεις για μερικές παραγώγους πρώτου και δευτέρου βαθμού
- Ασκήσεις για ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών

ακρότατα

Για να βρούμε τα ακρότατα μίας συνάρτησης δύο μεταβλητών εργαζόμαστε ως εξής:

Λύνουμε το σύστημα $f_x = 0$ και $f_y = 0$.

Έστω το σημείο (x_0, y_0) είναι μία λύση του συστήματος.

Υπολογίζουμε την ποσότητα $D(x_0, y_0)$

$$D(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - [\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}]^2$
και διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Πρόσημο D	Πρόσημο δεύτερης μερικής παραγώγου	Ακρότατο σημείο (x_0, y_0)
$D(x_0, y_0) > 0$	$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$, $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} < 0$	Τοπικό μέγιστο
	$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$, $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} > 0$	Τοπικό ελάχιστο
$D(x_0, y_0) < 0$		Αυχενικό ή σαγματικό σημείο
$D(x_0, y_0) = 0$		Κανένα συμπέρασμα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τις ακόλουθες συναρτήσεις 2 μεταβλητών:

Να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι ως προς x και ως προς y .

Να βρεθούν πιθανά ακρότατα

$$1. \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$$

$$f_x = 2x + y + 3 \quad f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 1$$

$$f_y = x + 2y - 3 \quad f_{yx} = 1 \quad f_{yy} = 2$$

$$D = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$$

Πρέπει να βρούμε τη λύση του συστήματος

$$f_x = 2x + y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$f_y = x + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow -2x - 4y + 6 = 0 \Leftrightarrow -3y + 9 = 0 \Leftrightarrow 3y = 9 \Leftrightarrow y = 3$$

στο σημείο $(-3, 3)$ έχω ελάχιστο που είναι $f(-3, 3) = 9 - 9 + 9 - 9 - 9 + 4 = -5$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για τις ακόλουθες συναρτήσεις 2 μεταβλητών:

Να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι ως προς x και ως προς y .

Να βρεθούν πιθανά ακρότατα

2. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6,$

3. $f(x, y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2,$

4. $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4,$

5. $f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5,$

6. $f(x, y) = y^2 + xy - 2x - 2y + 2,$

7. $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4,$

8. $f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4,$

9. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3y + 3,$

10. $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 7y^2 - 2x + 4y,$

11. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y,$

12. $f(x, y) = 4x^2 - 6xy + 5y^2 - 20x + 26y,$

13. $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 5x - 2y,$

14. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6,$

15. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6,$

16. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1,$

17. $f(x, y) = x^2 + 2xy,$

18. $f(x, y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2,$

19. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - 4y + 5,$

20. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τις ακόλουθες συναρτήσεις 2 μεταβλητών:

Να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι ως προς x και ως προς y .

Να βρεθούν πιθανά ακρότατα

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$$

Λύση

$$f_x = 2x + 3y - 6$$

$$f_{xx} = 2$$

$$f_{xy} = 3$$

$$f_y = 3x + 6y + 3$$

$$f_{yx} = 3$$

$$f_{yy} = 6$$

Πρέπει να βρούμε τη λύση του συστήματος

$$f_x = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow -4x - 6y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = -8$$

$$f_y = 0 \Leftrightarrow 3x + 6y + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x + 6y + 3 = 0 \Leftrightarrow -x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 15$$

Βρίσκουμε το πρόσημο της ορίζουσας

$$D = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{yx} \cdot f_{xy} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 12 - 9 = 3 \text{ θετική}$$

Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι επίσης θετικές και επομένως στο σημείο $(15, -8)$ η συνάρτηση έχει ελάχιστο

$$\begin{aligned} f(15, -8) &= 15^2 + 3 \cdot 15 \cdot (-8) + 3(-8)^2 - 6 \cdot 15 + 3 \cdot (-8) - 6 = \\ &= 225 - 360 + 192 - 90 - 24 - 6 = -63 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2. Για τις ακόλουθες συναρτήσεις 2 μεταβλητών:

Να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι ως προς x και ως προς y .

Να βρεθούν πιθανά ακρότατα

$$f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5,$$

λύση

$$f_x = 2x + y + 3$$

$$f_{xx} = 2$$

$$f_{xy} = 1$$

$$f_y = x + 2$$

$$f_{yx} = 1$$

$$f_{yy} = 0$$

Πρέπει να βρούμε τη λύση του συστήματος

$$f_x = 0 \quad \Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow y = -2x - 3$$

$$f_y = 0 \quad \Leftrightarrow x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow x = -2$$

Βρίσκουμε το πρόσημο της ορίζουσας

$$D = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{yx} \cdot f_{xy} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \text{ αρνητική}$$

Αυθενικό σημείο είναι το $(-2, 1)$

ασκήσεις

Μια επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα κ και λ , τα οποία πωλούνται προς 27 και 26 ευρώ η κάθε μονάδα αντίστοιχα. Το κόστος παραγωγής των δύο προϊόντων δίνεται από τη συνάρτηση

$$C = \kappa^2 + 3\kappa\lambda + 2\lambda^2 - 50$$

- Γράψτε τη συνάρτηση κέρδους
- Έχει η συνάρτηση κέρδους μέγιστο ή ελάχιστο;

Λύση

το κέρδος θα είναι ίσο με έσοδα- κόστος

Τα έσοδα είναι τιμή επί ποσότητα, δηλαδή $R = 27\kappa + 26\lambda$

$$\text{Κέρδος} = R - C(\kappa, \lambda) = 27\kappa + 26\lambda - (\kappa^2 + 3\kappa\lambda + 2\lambda^2 - 50) \Leftrightarrow$$

$$\text{Κέρδος} = 27\kappa + 26\lambda - \kappa^2 - 3\kappa\lambda - 2\lambda^2 + 50$$

$$K_{\kappa} = \partial K / \partial \kappa = 27 - 2\kappa - 3\lambda$$

$$K_{\lambda} = \partial K / \partial \lambda = 26 - 3\kappa - 4\lambda$$

$$\partial K / \partial \kappa = 0 \Leftrightarrow 27 - 2\kappa - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow (27 - 3\lambda) / 2 = \kappa \Leftrightarrow$$

$$\partial K / \partial \lambda = 0 \Leftrightarrow 26 - 3\kappa - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow 26 - 3 \cdot 27 / 2 + 9 / 2 \cdot \lambda - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 145 / 5 = 29 \text{ και}$$

$$\kappa = (27 - 3 \cdot 29) / 2 = -60 / 2 = -30 \text{ αρνητική, αδύνατο οικονομικά}$$

$$\partial^2 K / \partial \kappa^2 = -2$$

$$\partial^2 K / \partial \lambda^2 = -4$$

$$\partial^2 K / \partial \kappa \partial \lambda = -3 \quad \partial^2 K / \partial \lambda \partial \kappa = -3$$

$$D = \partial^2 K / \partial \kappa^2 \cdot \partial^2 K / \partial \lambda^2 - \partial^2 K / \partial \kappa \partial \lambda \cdot \partial^2 K / \partial \lambda \partial \kappa = (-2)(-4) - (-3)(-3) = 8 - 9 = -1 \text{ αρνητική, άρα αυχενικό σημείο}$$

ασκήσεις

Δύο επιχειρήσεις παράγουν το ίδιο προϊόν και το διαθέτουν στην αγορά με την ίδια τιμή p . Η πρώτη παράγει ποσότητα Q_1 και η δεύτερη ποσότητα Q_2 . Η συνάρτηση ζήτησης είναι $p=10-0,1*(Q_1+Q_2)$.

Το κόστος της πρώτης είναι $C_1=0,25Q_1$ και το κόστος της δεύτερης $C_2=0,5Q_2$.

Γράψτε τη συνάρτηση κερδών για την κάθε επιχείρηση.

Βρείτε αν υπάρχει μέγιστο ή ελάχιστο κέρδος.

Λύση

το κέρδος θα είναι ίσο με έσοδα- κόστος

Τα έσοδα είναι τιμή επί ποσότητα, δηλαδή $R_1=p*Q_1$

Πρώτη επιχείρηση

$$\begin{aligned}\text{Κέρδος}_1 &= R_1 - C_1(Q_1) = p * Q_1 - 0,25Q_1 = \\ &= [10 - 0,1 * (Q_1 + Q_2)] * Q_1 - 0,25Q_1 = 9,75Q_1 - 0,1Q_1^2 - 0,1Q_1 * Q_2\end{aligned}$$

$$\partial K_1 / \partial Q_1 = 9,75 - 0,2Q_1 - 0,1Q_2$$

$$\partial K_1 / \partial Q_2 = -0,1Q_1$$

$$\partial K_1 / \partial Q_1 = 0 \Leftrightarrow 9,75 - 0,2Q_1 - 0,1Q_2 = 0 \quad \Leftrightarrow Q_2 = 97,5$$

$$\partial K_1 / \partial Q_2 = 0 \Leftrightarrow -0,1Q_1 = 0 \Leftrightarrow Q_1 = 0$$

$$\partial^2 K_1 / \partial Q_1^2 = -0,2$$

$$\partial^2 K_1 / \partial Q_2^2 = 0$$

$$\partial^2 K_1 / \partial Q_1 \partial Q_2 = -0,1 \quad \partial^2 K_1 / \partial Q_2 \partial Q_1 = -0,1$$

ασκήσεις

Λύση συνέχεια

$$D = \partial^2 K_1 / \partial Q_1^2 * \partial^2 K_1 / \partial Q_2^2 - \partial^2 K_1 / \partial Q_1 \partial Q_2 * \partial^2 K_1 / \partial Q_2 \partial Q_1 =$$

$$= -0,2 * 0 * (-0,1) * (-0,1) =$$

επειδή η ορίζουσα αρνητική δεν έχουμε ακρότατα

Δεύτερη επιχείρηση

$$\text{Κέρδος}_2 = R_2 - C_2(Q_2) = p * Q_2 - 0,5 Q_2^2 =$$

$$= [10 - 0,1 * (Q_1 + Q_2)] * Q_2 - 0,5 Q_2^2 = 9,5 Q_2 - 0,1 Q_1 * Q_2 - 0,1 Q_2^2$$

$$\partial K_2 / \partial Q_1 = -0,1 Q_2$$

$$\partial K_2 / \partial Q_2 = 9,5 - 0,1 Q_1 - 0,2 Q_2$$

$$\partial K_2 / \partial Q_1 = 0 \Leftrightarrow -0,1 Q_2 = 0 \Leftrightarrow Q_2 = 0$$

$$\partial K_2 / \partial Q_2 = 0 \Leftrightarrow 9,5 - 0,1 Q_1 - 0,2 Q_2 = 0 \Leftrightarrow Q_1 = 95$$

$$\partial^2 K_2 / \partial Q_1^2 = 0$$

$$\partial^2 K_2 / \partial Q_2^2 = -0,2$$

$$\partial^2 K_2 / \partial Q_1 \partial Q_2 = -0,1 \quad \partial^2 K_2 / \partial Q_2 \partial Q_1 = -0,1$$

$$D = \partial^2 K_2 / \partial Q_1^2 * \partial^2 K_2 / \partial Q_2^2 - \partial^2 K_2 / \partial Q_1 \partial Q_2 * \partial^2 K_2 / \partial Q_2 \partial Q_1 =$$

$$= 0 * (-0,2) - (-0,1) * (-0,1) = 0 - 0,01 = -0,01 < 0$$

Δεν έχει ακρότατο, αλλά αυχενικό σημείο στο (95,0)

Παράδειγμα συνάρτησης κέρδους

Έστω οι δύο συναρτήσεις ζήτησης

$$P_1(Q_1) = 5 - 0,2Q_1 \quad \text{και} \quad P_2(Q_2) = 8 - 0,3Q_2$$

για 2 προϊόντα που παράγει μια επιχείρηση με

$$\text{κόστος } C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 7Q_1Q_2 + Q_2^2$$

Να βρεθεί αν η συνάρτηση κέρδους έχει μέγιστο

Λύση

$$\begin{aligned} \text{έσοδα } R &= P_1 * Q_1 + P_2 * Q_2 = \\ (5 - 0,2Q_1) * Q_1 &+ (8 - 0,3Q_2) * Q_2 = \\ 5Q_1 - 0,2Q_1^2 &+ 8Q_2 - 0,3Q_2^2 \end{aligned}$$

- ΚΕΡΔΟΣ

$$\begin{aligned} \Pi(Q_1, Q_2) &= \text{ΕΣΟΔΑ} - \text{ΚΟΣΤΟΣ} = \\ &= P_1 * Q_1 + P_2 * Q_2 - C(Q_1, Q_2) = \\ &= 5Q_1 - 0,2Q_1^2 + 8Q_2 - 0,3Q_2^2 - (Q_1^2 + 7Q_1Q_2 + Q_2^2) = \\ &= -1,2Q_1^2 - 7Q_1Q_2 - 1,3Q_2^2 + 5Q_1 + 8Q_2 \end{aligned}$$

Εύρεση μεγίστου κέρδους

$$\Pi(Q_1, Q_2) = -1,2Q_1^2 - 7Q_1Q_2 - 1,3Q_2^2 + 5Q_1 + 8Q_2$$

Μερικές παράγωγοι πρώτου βαθμού

- $\Pi_{Q_1} = -2,4Q_1 - 7Q_2 + 5$
- $\Pi_{Q_2} = -7Q_1 - 2,6Q_2 + 8$

Σημείο μεγίστου $\Pi_{Q_1} = 0$ και $\Pi_{Q_2} = 0$

- $-2,4Q_1 - 7Q_2 + 5 = 0$
- $-7Q_1 - 2,6Q_2 + 8 = 0$

Λύση $Q_1 = \mathbf{0,013}$ και $Q_2 = \mathbf{0,369}$

Δεύτερες μερικές παράγωγοι

- $\Pi_{Q_1Q_1} = -2,4$ $\Pi_{Q_2Q_2} = -2,6$ $\Pi_{Q_1Q_2} = -7$
- $D = -2,4 * (-2,6) - (-7)^2 = 6,24 - 49 = -42,76 < 0$
- επομένως σαγματικό σημείο και δεν υπάρχει μέγιστο.

άσκηση συνάρτησης κέρδους για λύση

1. Έστω μια επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα με συναρτήσεις ζήτησης:

$$P_1(Q_1) = 56 - 4Q_1 \quad \text{και} \quad P_2(Q_2) = 48 - 2Q_2$$

$$\text{Η συνάρτηση κόστους είναι } C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + Q_2^2$$

Να υπολογίσετε τη συνάρτηση εσόδων της επιχείρησης, την συνάρτηση κερδών και να βρείτε τα επίπεδα παραγωγής Q_1 και Q_2 στα οποία μεγιστοποιείται το κέρδος.

Να υπολογισθούν οι τιμές πώλησης των ποσοτήτων που μεγιστοποιούν το κέρδος.

άσκηση συνάρτησης εσόδων για λύση

2. Έστω μια επιχείρηση παράγει δύο τύπους υπολογιστών με ανταγωνιστική θέση στην αγορά και με συναρτήσεις ζήτησης:

$$Q_1(P_1, P_2) = 4000 - 2P_1 + P_2 \quad \text{και}$$

$$Q_2(P_1, P_2) = 6000 + P_1 - 3P_2$$

- Να υπολογίσετε τη συνάρτηση εσόδων της επιχείρησης και να βρείτε τα επίπεδα τιμών P_1 και P_2 στα οποία μεγιστοποιούνται τα έσοδα.
- Για τις τιμές μεγιστοποίησης, να υπολογισθούν οι ποσότητες κάθε τύπου υπολογιστών και τα μέγιστα έσοδα.

άσκηση τρίτου βαθμού

συνάρτηση (απροσδιόριστο ακρότατο)

Για την συνάρτηση : $f(x, y) = x^3 - 4xy + y^3 + 5x - 2y$

Να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι ως προς x και ως προς y .

Να βρεθούν πιθανά ακρότατα

λύση

$$f_x = 3x^2 - 4y + 5$$

$$f_{xx} = 6x$$

$$f_{xy} = -4$$

$$f_y = -4x + 3y^2 - 2$$

$$f_{yx} = -4$$

$$f_{yy} = 6y$$

Πρέπει να βρούμε τη λύση του συστήματος

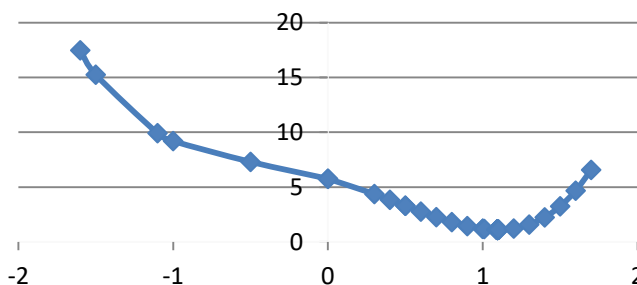
$$f_y = 0 \Leftrightarrow -4x + 3y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 4x = 3y^2 - 2 \Leftrightarrow x = (3y^2 - 2)/4$$

$$f_x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (3y^2 - 2)^2 / 16 - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(9y^4 - 12y^2 + 4)/16 - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow (27y^4 - 36y^2 + 12)/16 - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 27/16 y^4 - 36/16 y^2 + 12/16 - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow 1,69y^4 - 2,25y^2 - 4y + 5,75 = 0$$

Για να βρούμε πιθανή λύση, δοκιμάζουμε διάφορες τιμές του y και κάνουμε τη γραφική παράσταση



Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι δεν μηδενίζεται πουθενά, και επομένως δεν μπορούμε να βρούμε τη λύση του συστήματος

Κατά συνέπεια, δεν μπορούμε να βρούμε την τιμή της ορίζουσας

$$D = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{yx} \cdot f_{xy} = 36xy - (-4)(-4) = 36xy - 16$$

δεν μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης