

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Συνάρτηση παραγωγής
- Ελαστικότητα
- Μακροοικονομικό μοντέλο

Συνάρτηση παραγωγής

Η παραγωγή Q ενός προϊόντος, εξαρτάται

- από την εργασία που καταβάλλουμε,
- το κεφάλαιο που έχουμε επενδύσει (πχ. Μηχάνημα, γη, κτίριο) και
- άλλους παράγοντες (δύσκολο να μετρηθούν)

Συνάρτηση παραγωγής

$$Q(L, K)$$

Τύπος της συνάρτησης παραγωγής

Cobb-Douglas

Από μελέτες που έγιναν, η συνάρτηση παραγωγής δεν είναι γραμμική αλλά πολλαπλασιαστική συνάρτηση

Συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas

Ο Cobb-Douglas πρότεινε τον ακόλουθο τύπο για την συνάρτηση παραγωγής ενός προϊόντος, σε σχέση με την εργασία L και το κεφάλαιο K

$$Q(K,L) = A L^{\alpha} K^{\beta}$$

όπου:

- A : εξωγενής παράμετρος (π.χ. τεχνολογία)
- α, β : σταθερές παράμετροι (λόγος ποσοστιαίας μεταβολής Q όταν μεταβάλλεται είτε το K είτε το L μονομερώς)
- Μερικές παράγωγοι (οριακό προϊόν)

$$Q_L = A \alpha L^{\alpha-1} K^{\beta}$$

$$Q_K = A \beta L^{\alpha} K^{\beta-1}$$

Παράμετροι συνάρτησης Cobb-Douglas

$$Q(K,L) = A L^{\alpha} K^{\beta}$$

Μερικές παράγωγοι (οριακό προϊόν)

$$Q_L = A \alpha L^{\alpha-1} K^{\beta}$$

$$Q_K = A \beta L^{\alpha} K^{\beta-1}$$

Όσο αυξάνει η εργασία και το κεφάλαιο,
αυξάνει η παραγωγή, επομένως $\alpha, \beta > 0$,
αλλά μετά από κάποιο σημείο συνήθως ο
ρυθμός αύξησης μικραίνει (νόμος
φθινουσών αποδόσεων) οπότε
 $\alpha-1 < 0$ και $\beta-1 < 0$

Στις περισσότερες περιπτώσεις ισχύει
 $0 < \alpha, \beta < 1$

ελαστικότητα

Ορισμός ελαστικότητας

- Ποσοστιαία μεταβολή της y σε σχέση με μια μικρή ποσοστιαία μεταβολή της x .

Γενικός τύπος

- $\varepsilon = \partial Y / Y / \partial X / X = \partial Y / \partial X * X / Y$

Ειδικότερα για την Cobb-Douglas

- $\varepsilon_L = \partial Q / Q / \partial L / L = \partial Q / \partial L * L / Q =$
- $A \alpha L^{\alpha-1} K^{\beta} * L / Q = A \alpha L^{\alpha} K^{\beta} / Q = \alpha Q / Q = \alpha$
- $\varepsilon_K = \partial Q / Q / \partial K / K = \partial Q / \partial K * K / Q =$
- $= A \beta L^{\alpha} K^{\beta-1} * K / Q = \beta Q / Q = \beta$

Μακροοικονομικό μοντέλο κλειστής οικονομίας

- Οικονομικά μεγέθη είναι η συνολική Κατανάλωση C , η συνολική Επένδυση I (Αποταμίευση) και το συνολικό Εισόδημα Y .
- Δεχόμαστε ότι το Εισόδημα είναι ίσο με την Κατανάλωση και την Επένδυση, ενώ η Κατανάλωση εξαρτάται γραμμικά από το Εισόδημα.

$$Y = C + I$$

$$C = C_0 + cY$$

Επομένως αντικαθιστώντας :

$$Y = C_0 + cY + I \Leftrightarrow (1-c) Y = C_0 + I \Leftrightarrow Y = C_0 / (1-c) + I / (1-c)$$

$$\partial Y / \partial I = 1 / (1-c)$$

Μεταβολή στην επένδυση μιας μονάδας, προκαλεί μεταβολή στο εισόδημα $1/(1-c)$ μονάδες.

Η ποσότητα $1/(1-c)$ ονομάζεται πολλαπλασιαστής

Μακροοικονομικό μοντέλο ανοικτής οικονομίας

- Οικονομικά μεγέθη είναι η συνολική Κατανάλωση C , η συνολική Επένδυση I (Αποταμίευση) και το συνολικό Εισόδημα Y , οι εισαγωγές M και οι εξαγωγές X .
- Δεχόμαστε ότι το Εισόδημα είναι ίσο με την Κατανάλωση και την Επένδυση, ενώ η Κατανάλωση εξαρτάται γραμμικά από το Εισόδημα και οι εισαγωγές εξαρτώνται γραμμικά από το εισόδημα.

$$Y = C + I + X - M$$

$$C = C_0 + cY$$

$$M = M_0 + mY$$

Επομένως αντικαθιστώντας :

$$Y = C_0 + cY + I + X - (M_0 + mY) \Leftrightarrow Y - cY + mY = C_0 + I + X - M_0 \Leftrightarrow Y = (C_0 + I + X - M_0) / (1 - c + m)$$

$$\partial Y / \partial I = 1 / (1 - c + m)$$

Μεταβολή στην επένδυση μιας μονάδας, προκαλεί μεταβολή στο εισόδημα $1 / (1 - c + m)$ μονάδες.

Η ποσότητα $1 / (1 - c + m)$ ονομάζεται πολλαπλασιαστής και είναι χαμηλότερος από ότι στην περίπτωση της κλειστής οικονομίας

Ασκήσεις οικονομικών εφαρμογών

1. Δίνεται η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης $Q(K,L)=L^{4/5}K^{1/5}$ όπου K το ποσό κεφαλαίου και L το ποσό εργασίας.
- α) Να βρεθεί το οριακό προϊόν εργασίας και κεφαλαίου.
(οριακό προϊόν είναι η πρώτου βαθμού μερική παράγωγος).
- β) Υπολογίστε την μερική ελαστικότητα της παραγωγής, ως προς την εργασία και ως προς το κεφάλαιο.
- γ) Στην περίπτωση που θέλουμε η παραγωγή να είναι πάντα 100 μονάδες, γράψτε το κεφάλαιο, σαν συνάρτηση της εργασίας.

Λύση

α) $\partial Q/\partial L$ οριακό προϊόν εργασίας $= \partial(L^{4/5}K^{1/5})/\partial L = 4/5 * L^{-1/5}K^{1/5}$

$\partial Q/\partial K$ οριακό προϊόν κεφαλαίου $\partial(L^{4/5}K^{1/5})/\partial K = 1/5 * L^{4/5}K^{-4/5}$

β) μερική ελαστικότητα είναι η ποσοστιαία μεταβολή του Q σε σχέση με ποσοστιαία μεταβολή του L ή του K

$\epsilon_L = \partial Q/\partial L * L/Q = 4/5 * L^{-1/5}K^{1/5} * L/Q = 4/5 = 0,8$

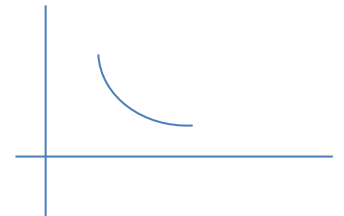
$\epsilon_K = \partial Q/\partial K * K/Q = 1/5 * L^{4/5}K^{-4/5} * K/Q = 1/5 = 0,2$

γ) $Q=100 \Leftrightarrow$ εξίσωση ίσου προϊόντος $L^{4/5}K^{1/5}=100 \Leftrightarrow$

$K^{1/5}=100/L^{4/5} \Leftrightarrow K=100^5/L^4 \Leftrightarrow K(L)=100^5/L^4$

Λόγος υποκατάστασης $dK/dL = (100^5/L^4)' = (100^5 * L^{-4})' =$

$= -4 * 100^5 * L^{-5} = -4 * 100^5 / L^5$



Ασκήσεις οικονομικών εφαρμογών

2. Δίνεται η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης

$$Q(K,L)=4LK-3L^2-2K^2+6L+14K$$

όπου K το ποσό κεφαλαίου και L το ποσό εργασίας.

α) Να βρεθούν οι τιμές K και L που μεγιστοποιούν την παραγωγή της επιχείρησης.

β) Αν η επιχείρηση πληρώνει 700 ευρώ τη μονάδα εργασίας και 1400 ευρώ τη μονάδα κεφαλαίου, ενώ πουλάει 2.500 ευρώ τη μονάδα παραγωγής, για ποιες ποσότητες κεφαλαίου και εργασίας θα μεγιστοποιήσει τα κέρδη της;

Λύση

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι =0

$$Q_L=0 \Leftrightarrow 4K-6L+6=0 \Leftrightarrow 4K-6 \cdot 10+6=0 \Leftrightarrow K=54/4=13,5$$

$$Q_K=0 \Leftrightarrow 4L-4K+14=0 \Leftrightarrow -2L+20=0 \Leftrightarrow L=20/2=10$$

Δεύτερες μερικές παράγωγοι

$$Q_{LL} = -6$$

$$Q_{LK} = 4$$

$$Q_{KL} = 4$$

$$Q_{KK} = -4$$

$$\text{Ορίζουσα} = (-6) \cdot (-4) - 4 \cdot 4 = 24 - 16 = 8 > 0$$

έχει ακρότατο, επειδή $Q_{LL} < 0$, $Q_{KK} < 0$, έχει μέγιστο για $K=13.5$
 $L=10$

Η μέγιστη παραγωγή είναι:

$$Q(13.5, 10) = 4 \cdot 10 \cdot 13,5 - 3 \cdot 10^2 - 2 \cdot 13,5^2 + 6 \cdot 10 + 14 \cdot 13,5 = \dots$$

$$\beta) \text{ κέρδος} = \text{έσοδα} - \text{κόστος} = 2500 \cdot Q - (700 \cdot L + 1400 \cdot K) =$$

$$\Pi(K,L) = 2500 \cdot (4LK - 3L^2 - 2K^2 + 6L + 14K) - 700 \cdot L - 1400 \cdot K =$$

$$10000LK - 7500L^2 - 5000K^2 + 15000L + 3500K - 700 \cdot L - 1400 \cdot K =$$

ΘΑ βρούμε πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους για να εντοπίσουμε το μέγιστο

Ασκήσεις οικονομικών εφαρμογών

3. Δίνεται η συνάρτηση χρησιμότητας ενός καταναλωτή για δύο αγαθά X και Y

$$U(X,Y)=5XY-X^2-6Y^2+400X+600Y$$

Να βρεθούν οι ποσότητες X και Y που μεγιστοποιούν την χρησιμότητα.

Ποια είναι η μέγιστη χρησιμότητα;

Συνάρτηση κέρδους

- Δεδομένα
έστω ένα προϊόν ενός μονοπωλίου, που πουλιέται σε δύο αγορές με διαφορετικές συναρτήσεις ζήτησης.

$P_1(Q_1)$ και $P_2(Q_2)$ (τιμές συνάρτηση ποσότητας)
κόστος $C(Q)$
έσοδα $R(P_1, P_2, Q_1, Q_2)$

- Υπολογισμός συνάρτησης κέρδους
- έσοδα $R = P_1 * Q_1 + P_2 * Q_2$
ΚΕΡΔΟΣ

$$\Pi(Q_1, Q_2) = \text{ΕΣΟΔΑ} - \text{ΚΟΣΤΟΣ} = \\ P_1 * Q_1 + P_2 * Q_2 - C(Q_1 + Q_2)$$

Ασκήσεις οικονομικών εφαρμογών

4. Ένα μονοπώλιο πουλάει δύο προϊόντα με συναρτήσεις ζήτησης:
 $Q_1(P_1) = 6 - 0,5 P_1$ και $Q_2(P_2) = 8 - 0,25 P_2$
Η συνάρτηση κόστους είναι $C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$
Να υπολογίσετε τη συνάρτηση κερδών και να βρείτε τα επίπεδα τιμών P_1 και P_2 στα οποία μεγιστοποιούνται τα κέρδη.
5. Μια επιχείρηση πουλάει δύο προϊόντα με συναρτήσεις ζήτησης:
 $Q_1(P_1, P_2) = 110 - 4P_1 - P_2$
 $Q_2(P_1, P_2) = 90 - 2P_1 - 3P_2$
α) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση εσόδων της επιχείρησης και να βρείτε τα επίπεδα τιμών P_1 και P_2 στα οποία μεγιστοποιούνται τα έσοδα.
β) Για τις τιμές μεγιστοποίησης, να υπολογισθούν οι ποσότητες κάθε τύπου υπολογιστών και τα μέγιστα έσοδα.