

Γραμμικές και μη γραμμικές συναρτήσεις

- Γραμμικές συναρτήσεις
- Συναρτήσεις 2ου βαθμού
- Εκθετικές - λογαριθμικές
- Λύση συστήματος εξισώσεων
- Λύση εξίσωσης δευτέρου βαθμού

Γραμμικές συναρτήσεις

- Πρόκειται για συναρτήσεις πρώτου βαθμού της μορφής
 - $f(x)=ax+\beta$

Ευθεία με «κλίση» a

Αν $a>0$ αύξουσα («ανεβαίνει»)

Αν $a<0$ φθίνουσα («κατεβαίνει»)

Αν $a=0$ σταθερή (οριζόντια)

Εύρεση γραμμικής συνάρτησης

1. Αν ξέρουμε ένα σημείο με
συντεταγμένες (κ, λ)

για $x=\kappa$, $y=\lambda$ και την κλίση της α

Τότε η ευθεία είναι

$$y - \lambda = \alpha(x - \kappa) \Leftrightarrow y = \alpha x - \alpha\kappa + \lambda$$

2. Αν ξέρουμε δύο σημεία της με
συντεταγμένες (κ, λ) και (μ, ν)

Τότε η ευθεία είναι

$$y - \lambda = \frac{\nu - \lambda}{\mu - \kappa} (x - \kappa)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

παράδειγμα

Αν μια ασφαλιστική εταιρεία είχε το 2009, 25.000 ασφαλισμένους και η τάση της είναι γραμμική με ετήσιο ρυθμό αύξησης 2.800 ασφαλισμένους να προσδιορισθεί η εξίσωση της ευθείας που περιγράφει την τάση αύξησης και κατόπιν ο αριθμός των ασφαλισμένων το 2014.

Λύση

Για ευκολία μας, θεωρούμε ως αρχή των ετών το 2008 (=0) και το 2009 αντιστοιχεί στο 1, ενώ το 2014 στο 6.

Η εξίσωση της ευθείας αφού γνωρίζουμε την κλίση (2.800) και ένα σημείο της (1,25.000) είναι

$$y - 25.000 = 2.800(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y = 2.800x - 2.800 + 25.000 \Leftrightarrow y = 2.800x + 22.200$$

Το 2014 είναι $x=6$ οπότε θα είναι

$$Y = 2.800 \cdot 6 + 22.200 = 39.000 \text{ ασφαλισμένοι}$$

παράδειγμα

Αν η ζήτηση είναι 80 μονάδες για την τιμή 5, ενώ για την τιμή 8 είναι 65 μονάδες, να προσδιορισθεί η εξίσωση της γραμμικής συνάρτησης ζήτησης.

Αν η τιμή γίνει 9, πόση θα είναι η ζήτηση;

Λύση

Η εξίσωση της ευθείας αφού γνωρίζουμε δύο σημεία της (5,80) και (8,65) είναι

$$Q-80=(65-80)/(8-5) (P-5) \Leftrightarrow$$

$$Q= -15/3 (P-5) +80 \Leftrightarrow Q=-5P+25+80$$

$$Q=-5P+105$$

Για $P=9$ θα είναι

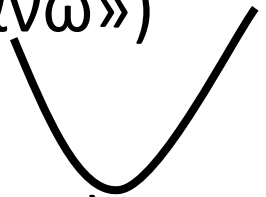
$$Q = -5 \cdot 9 + 105 = 60 \text{ μονάδες}$$

Συναρτήσεις 2ου βαθμού (τριώνυμο)

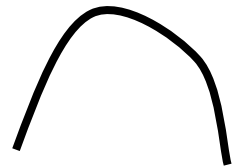
- Πρόκειται για συναρτήσεις δευτέρου βαθμού της μορφής
 - $f(x)=ax^2+bx+c$

Παραβολή

Αν $a>0$ ελάχιστο («προς τα πάνω»)



Αν $a<0$ μέγιστο («προς τα κάτω»)



Αν $a=0$ ευθεία με κλίση b

Εκθετικές συναρτήσεις

- Είναι οι συναρτήσεις στις οποίες η ανεξάρτητη μεταβλητή βρίσκεται στον εκθέτη.
- Συνήθως εκφράζουν οικονομικά μεγέθη που οι τιμές τους μεταβάλλονται στον χρόνο, και αυξάνουν ή φθίνουν με ένα σταθερό ρυθμό στη μονάδα του χρόνου.
- Π.χ. $Y(t) = a b^t$ όπου, $a, b > 0$
- Μετατρέπεται σε $Y(t) = a e^{\gamma t}$

λογαριθμικές συναρτήσεις

- Είναι οι συναρτήσεις οι αντίστροφες των εκθετικών συναρτήσεων.
- Παίρνουν διάφορες μορφές με πιο συνηθισμένη $y = \ln x$

Λύση συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων

Π.χ. $Y=5x-6$

$$3y=2x-5$$

- Μέθοδος αντικατάστασης

$$\begin{array}{l} Y=5x-6 \\ 3(5x-6)=2x-5 \Leftrightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y=5x-6 \\ 13x=13 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} y=5x-6 \\ X=1 \Leftrightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y=5 \cdot 1-6=-1 \\ x=1 \end{array} \right.$$

Λύση συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων

Π.χ. $Y=5x-6$

$$3y=2x-5$$

Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

$$Y=5x-6 \quad y-5x+6=0 \quad (*-3)$$

$$3y=2x-5 \Leftrightarrow 3y-2x+5=0$$

$$\begin{array}{l} -3y+15x-18=0 \\ 3y-2x+5=0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y-5x+6=0 \\ \Leftrightarrow \end{array} \right.$$

$$-3y+3y+15x-2x-18+5=0$$

$$13x-13=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ και } y-5*1+6=0$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet X=1 \\ \bullet Y=-1 \end{array} \right\}$$

Λύση εξίσωσης δευτέρου βαθμού

- $ax^2+bx+c=0$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα

$$\Delta=b^2-4ac$$

- Αν $\Delta < 0$ δεν έχει λύσεις
- Αν $\Delta = 0$ μία λύση $x = -b/2a$
- Αν $\Delta > 0$ δύο λύσεις

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο (4,15) και έχει κλίση -4.

Βρείτε και την παράλληλη της ευθείας που περνάει από το σημείο (1,30).

2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία (2,25) και (8,40).

Αν η τιμή $x=15$ ποια θα είναι η τιμή y της ευθείας ;

3. Να βρεθούν οι λύσεις των εξισώσεων

α) $x^2-8x+9=0$

β) $6x^2-5x-6=0$

γ) $x^4-5x^2+4=0$

4. Αν ξέρουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού είναι παραβολή βρείτε την εξίσωση που την περιγράφει, όταν δίνονται: για την τιμή $P=1$ η ζήτηση είναι $Q=20$, για τιμή $P=5$ η ζήτηση είναι $Q=10$ και όταν $P=0$ η ζήτηση είναι $Q=60$.

5. Αν η συνάρτηση προσφοράς ενός προϊόντος είναι

$Q_s=P^2+5P+1$ και η συνάρτηση ζήτησης $Q_d=9-2P^2$ να βρεθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας της αγοράς.

Ασκήσεις

6. Αν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για δύο αλληλεξαρτώμενα προϊόντα δίνονται από τις εξισώσεις:

$$Q_{d1}=6-3P_1+P_2$$

$$Q_{s1}= -6+2P_1$$

$$Q_{d2}= 24+P_1-P_2$$

$$Q_{s2}= -4 +3P_2$$

Να βρεθούν οι τιμές και οι ποσότητες στην κατάσταση ισορροπίας.

7. Ξέρουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού είναι $Q_d=100-P$.

Αν η συνάρτηση κόστους παραγωγής του αγαθού είναι

$$TC=2Q^2+4Q+156,$$

α) να προσδιορισθεί το σημείο παραγωγής Q_0 , στο οποίο η επιχείρηση δεν έχει ούτε ζημιές ούτε κέρδη (νεκρό σημείο)

β) Πόσα θα είναι τα κέρδη της επιχείρησης αν η παραγωγή είναι 20 μονάδες;

8. Η συνάρτηση ζήτησης πετρελαίου θέρμανσης μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$Q=180-20P-P^2$$

Για ποια ή ποιες τιμές η ζητούμενη ποσότητα μηδενίζεται;

Να παρουσιασθεί γραφικά η συνάρτηση ζήτησης πετρελαίου θέρμανσης.