

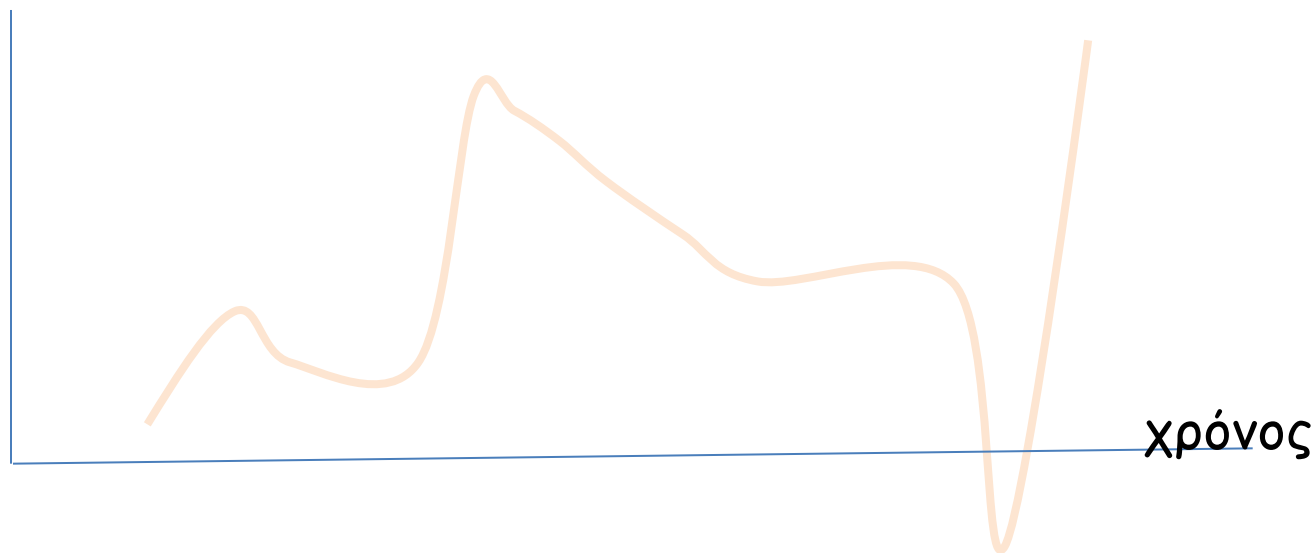
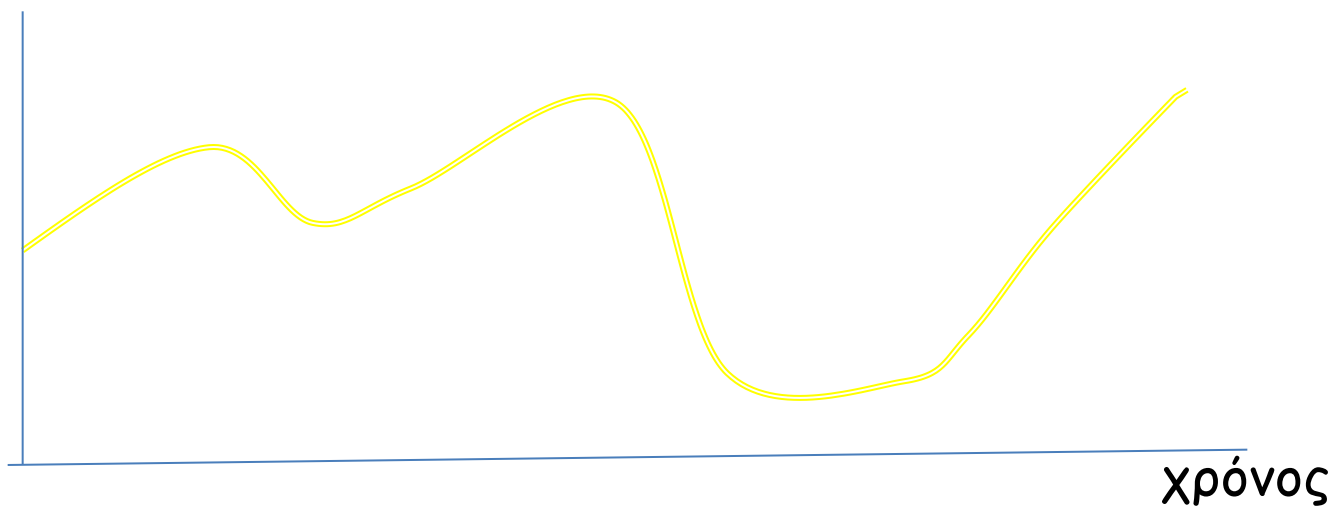
Παράγωγος συνάρτησης

- Έννοια παραγώγου
 - Υπολογισμός
 - Χρήση παραγώγου
-
- ελαστικότητα
 - Οριακές συναρτήσεις

Έννοια

- Στην οικονομική επιστήμη μας ενδιαφέρει πολλές φορές να προσδιορίσουμε την **καλύτερη** επιλογή, π.χ μέγιστη απόδοση, μέγιστη χρησιμότητα, ελάχιστο κόστος, ...
- Θέλοντας να μελετήσουμε μια συνάρτηση χρειαζόμαστε το **ρυθμό μεταβολής** της σε κάθε σημείο της, που ονομάζεται **παράγωγος**.
- Αυτή παριστάνει το **οριακό** οικονομικό μέγεθος.

Πχ δύο συναρτήσεις κέρδους



Μαθηματικός ορισμός

Έστω συνάρτηση $f(x):(κ,λ)→\mathbb{R}$ και a ανήκει $(κ,λ)$. Αν υπάρχει το όριο:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο a . Το όριο λέγεται παράγωγος της f στο σημείο a και το συμβολίζουμε με $f'(a)$.

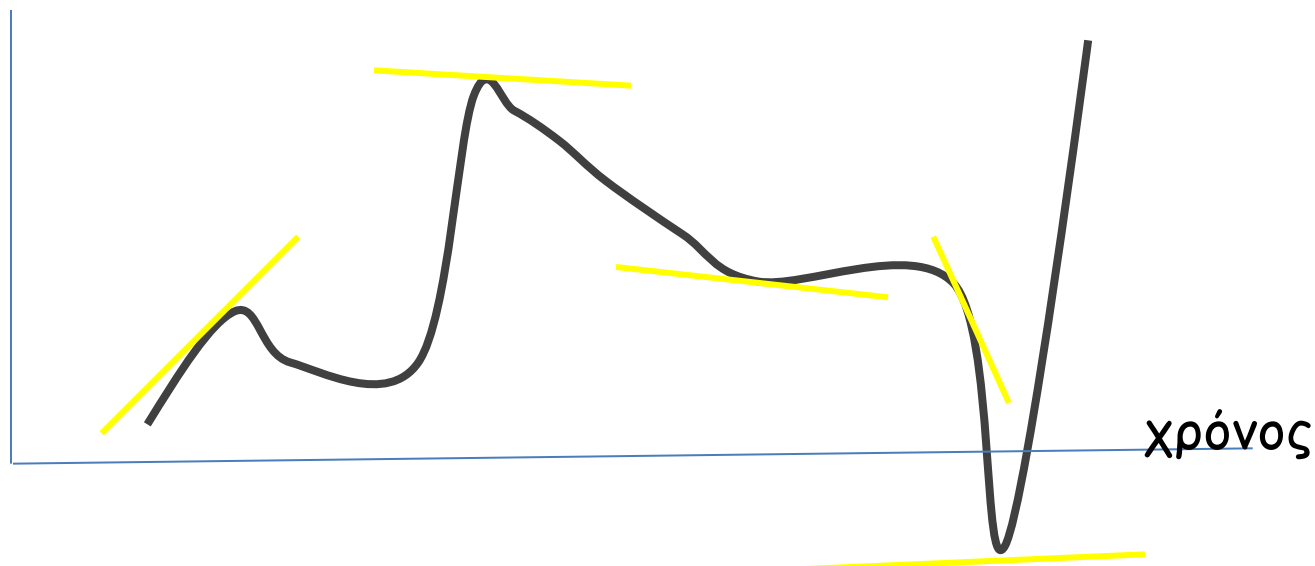
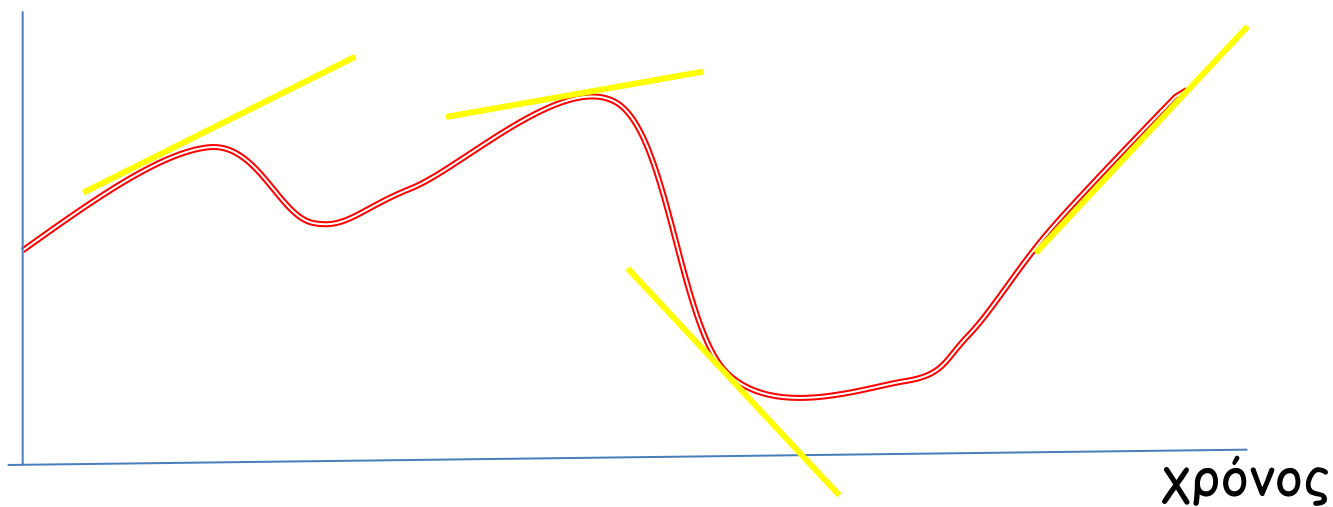
Γενικότερα η παράγωγος συνάρτηση συμβολίζεται

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ερμηνεία

- Η παράγωγος εκφράζει τη στιγμιαία μεταβολή της $f(x)$ στο σημείο x . (ή την οριακή μεταβολή)
- Η παράγωγος είναι η κλίση της εφαπτομένης στο εν λόγω σημείο x

Πχ δύο συναρτήσεις κέρδους



Εναλλακτικός συμβολισμός για την παράγωγο

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{df(x)}{dx}$$

- Τα μεγέθη **df** και **dx** ονομάζονται **διαφορικά** της f και της x αντίστοιχα. Έτσι έχουμε τελικά: $df(x) = f'(x) dx$

Κανόνες υπολογισμού παραγώγων

$$(a)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$$

$$(f^n(x))' = n \cdot f'(x) \cdot f^{n-1}(x)$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{f(x)})' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(a^{f(x)})' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

Παράγωγος σύνθεσης, αντίστροφης

•Αν $y = y(u)$ $u = u(x)$ (αλυσωτός κανόνας).

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy(u)}{du} \cdot \frac{du(x)}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

•Αν η συνάρτηση g είναι αντίστροφη της f τότε

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad y = f(x) \quad \frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx(y)}{dy}}$$

Αύξουσα ή Φθίνουσα συνάρτηση

- Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα σε ένα διάστημα ορισμού της υπολογίζουμε πρώτα την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$.
-
- Αν η παράγωγος $f'(x)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι θετική σε ένα διάστημα τότε σε εκείνο το διάστημα η συνάρτηση είναι αύξουσα
-
- Αντίθετα αν η παράγωγος είναι αρνητική, η συνάρτηση είναι φθίνουσα.

οριακή συνάρτηση

Η παράγωγος των οικονομικών μεγεθών, όπως κόστος, έσοδο, ζήτηση, κέρδος κλπ έχει ιδιαίτερη σημασία για την μέτρηση των μεταβολών και ονομάζονται με το ειδικό όνομα

οριακό κόστος, οριακό έσοδο, οριακή ζήτηση
οριακό κέρδος κλπ.

Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δώσουμε στην ανεξάρτητη μεταβλητή ως προς την οποία υπολογίζουμε το οριακό μέγεθος. (π.χ. οριακή συνάρτηση ως προς την ποσότητα ή οριακή συνάρτηση ως προς την τιμή, κλπ)

Στην περίπτωση οριακή συνάρτησης, αντί για το συμβολισμό της παραγώγου χρησιμοποιούμε το
 $R'(Q)=MR(Q)$, $C'(Q)=MC(Q)$,
κλπ.

Ελαστικότητα μιας συνάρτησης

Η παράγωγος που μετράει το ρυθμό μεταβολής επηρεάζεται πολύ από τις μονάδες μέτρησης των μεταβλητών, οπότε η κλίση αλλάζει αν αλλάξει η μονάδα μέτρησης της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Ένας ρυθμός μεταβολής που δεν επηρεάζεται από τις μονάδες μέτρησης είναι η **ελαστικότητα**, η οποία υπολογίζεται ως ποσοστιαία μεταβολή της μιας μεταβλητής σε σχέση με την άλλη.

Ο τύπος της είναι :

$$\varepsilon = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

Ερμηνεία ελαστικότητας

- Αν η τιμή του X μεταβληθεί κατά 1%, τότε η τιμή του Y μεταβάλλεται (θετικά ή αρνητικά) κατά $\varepsilon\%$.

παράδειγμα

1. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης
 $f(x) = 7x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x + 4$

Λύση:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (7x^5)' - (3x^4)' + (5x^3)' - (x)' + (4)' = \\ &= 7 \cdot 5 \cdot x^4 - 3 \cdot 4 \cdot x^3 + 5 \cdot 3x^2 - 1 \\ &= 35x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 1 \end{aligned}$$

2. Να υπολογισθεί η ελαστικότητα της συνάρτησης
ζήτησης $Q(p) = -3p^2 + 4p + 60$, όταν $p = 5$

Λύση:

$$Q(5) = -3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 60 = 5$$

$$Q'(p) = (-3p^2)' + (4p)' + (60)' = -6p + 4$$

$$Q'(5) = -6 \cdot 5 + 4 = -26$$

Αντικαθιστούμε στον τύπο της ελαστικότητας:

$$\varepsilon = \frac{\cancel{dy} / y}{\cancel{dx} / x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = Q'(5) \cdot 5 / Q(5) = -26 \cdot 5 / 5 = -26$$

παράδειγμα

1. Αν η συνάρτηση κόστους είναι $C(q) = -5q^2 + 50q$, να βρεθεί το οριακό κόστος όταν το $q=4$

Λύση:

$$MC(q) = (-5q^2)' + (50q)' = -10q + 50$$

$$MC(4) = -10 \cdot 4 + 50 = 10$$

Στην περίπτωση που παράγονται 4 μονάδες προϊόντος και επιθυμούμε αύξηση της παραγωγής, η οριακή αύξηση του κόστους θα είναι 10 μονάδες.

2. Να υπολογισθεί η οριακή συνάρτηση εσόδων όταν η συνάρτηση ζήτησης είναι $Q(p) = -3p^2 + 4p + 60$
Για ποιες τιμές p η οριακή συνάρτηση εσόδων είναι αύξουσα;

Λύση:

$$\text{Εσοδα } R(p) = P \cdot Q = p \cdot (-3p^2 + 4p + 60) = -3p^3 + 4p^2 + 60p$$

$$MR(p) = (-3p^3)' + (4p^2)' + (60p)' = -9p^2 + 8p + 60$$

$$MR'(p) = -18p + 8 \geq 0 \text{ όταν } p \leq 8/18 = 0,48$$

Παράδειγμα ελαστικότητας

- Εταιρία ενοικίασης αυτοκινήτων διαπιστώνει ότι η ζήτηση ενοικίασης αυτοκινήτων δίδεται από τη σχέση $q(p)=2530-50p$.

όπου q ο αριθμός των ενοικιαζόμενων αυτοκινήτων ανά ημέρα και p η τιμή ενοικίασης.

1. Να βρεθεί ο αριθμός ενοικίασης αυτοκινήτων από τους ενοικιαστές όταν $p=50$ και στη συνέχεια να προσδιοριστεί η ελαστικότητα ζήτησης για τη συγκεκριμένη τιμή.
2. Να βρεθεί η τιμή του p για την οποία η ελαστικότητα ζήτησης είναι ίση με -1 και να δοθεί η ερμηνεία για την τιμή αυτή.
3. Χρησιμοποιώντας την ερμηνεία της ελαστικότητας υπολογίστε τη μεταβολή της ζήτησης αν η τιμή ενοικίασης των αυτοκινήτων αυξηθεί από την τιμή που βρήκατε στα 30 ευρώ.
4. Υπολογίστε επίσης την ζήτηση με βάση την συνάρτηση ζήτησης. Εξηγήστε τις διαφορές που προκύπτουν μεταξύ των δύο υπολογισμών.

Λύση παραδείγματος

1. Για $p=50$ έχουμε : $q(50)=2530-50 \times 50=30$
οπότε 30 αυτοκίνητα ενοικιάζονται την ημέρα με την τιμή των 50€.

Η ελαστικότητα ζήτησης βρίσκεται από τον τύπο:

$$\varepsilon_d = \frac{dq}{dp} \frac{p}{q} = -50 \frac{p}{2530 - 50p} = -50 \frac{50}{2530 - 2500} = \frac{-2500}{30} = -83,33$$

2. Για $\varepsilon_d(p)=-1$ έχουμε: $-50p/(2530 - 50p)=-1 \Leftrightarrow -50p=-(2530 - 50p) \Leftrightarrow -50p=-2530+50p \Leftrightarrow 2530=100p \Leftrightarrow \Rightarrow p = 25,3$

Όταν λοιπόν η τιμή είναι $p=25,3$ ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής στην ποσότητα προς την ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή είναι 1.

Για $p = 25,3$ η ζήτηση είναι $q=2530-50(25,3)=1265$ αυτοκίνητα.

3. Η μεταβολή της τιμής από 25,3 ευρώ σε 30 ευρώ αντιστοιχεί σε ποσοστιαία αύξηση
 $(30 - 25,3) / 25,3 = 18,58\%$

Επομένως η ζήτηση θα μειωθεί επίσης κατά 18,58% δηλαδή κατά $1265 (18,58\%) = 235,04$ αυτοκίνητα και θα είναι $1265 - 235,04 = 1029,96$ αυτοκίνητα.

4. Με βάση τη συνάρτηση ζήτησης ο αριθμός των αυτοκινήτων που θα ενοικιασθούν όταν η τιμή είναι 30 ευρώ ανέρχεται σε
 $q=2530-50(30)=1030$ αυτοκίνητα.

Παρατηρούμε ότι το προσεγγιστικό αποτέλεσμα που βρέθηκε με βάση την ελαστικότητα ζήτησης προσεγγίζει πολύ στον ακριβή υπολογισμό της ζήτησης με βάση τη συνάρτηση ζήτησης.

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων
(a) $f(x) = x^3 - x^2 + 6$ (b) $f(x) = x - 2/x$ (c) $f(x) = -4x^4$
(d) $f(x) = (-2x^3 + 4)^6$ (e) $f(x) = (x+2)^5(x-3)^6$
(f) $f(x) = (2x^3 - 6)/(x+1)$ (g) $f(x) = 3x^2 + 8\sqrt{x} - 4$
2. Η συνάρτηση κόστους είναι $C(q) = 5q^3 - 6q^2 + 4q + 150$. Να βρεθεί το οριακό κόστος σε ένα σημείο q .
3. Να υπολογισθεί η ελαστικότητα της συνάρτησης ζήτησης $Q(p) = -4p^2 + 6p + 80$ στο σημείο $p=3$ και να ερμηνευθεί.
4. Να υπολογισθεί η ελαστικότητα της συνάρτησης $Y = 5p^{-2}$ στα σημεία $p=3$ και $p=10$ και να ερμηνευθεί.
5. Για τη συνάρτηση $f(x) = x^4 + 3x + 4$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $(-1, 2)$.

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων
(a) $f(x) = 7x^3 - 4x^2 + 16$ (b) $f(x) = x - 4/x$ (c) $f(x) = -4x^3$
(d) $f(x) = (-2x^3 + 6)^6$ (e) $f(x) = (x+3)^5(x-5)^6$
(f) $f(x) = (2x^3 - 6)/(x+3)$ (g) $f(x) = 3x^4 + 9\sqrt{x} - 5$
2. Η συνάρτηση κόστους είναι $C(q) = 5q^4 - 6q^3 + 4q + 250$. Να βρεθεί η παράγωγος του κόστους και να ερμηνευθεί όταν $q = 5$.
3. Να υπολογισθεί η ελαστικότητα της συνάρτησης ζήτησης $Q(p) = -5p^2 + 30p + 50$ στο σημείο $p = 2$ και να ερμηνευθεί.
4. Αν τα έσοδα από την πώληση k τεμαχίων δίνονται από τη συνάρτηση $R(k) = 3000(3 - 2/k)$, βρείτε τη συνάρτηση οριακών εσόδων. Κατόπιν υπολογίστε πόσα είναι τα έσοδα αν $k = 4$ και πόσα είναι τα οριακά έσοδα όταν $k = 4$. Ποια είναι η ελαστικότητα της συνάρτησης εσόδων ως προς το πλήθος τεμαχίων όταν $k = 4$;
5. Δίνεται η συνάρτηση ζήτησης $Q = 5/p$. Να γίνει η γραφική της παράσταση. Να βρεθούν οι τιμές p για τις οποίες η ζήτηση είναι φθίνουσα. Να υπολογισθεί η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή όταν $p = 10$. Να βρεθεί η συνάρτηση εσόδων και να υπολογισθεί η ελαστικότητα εσόδων ως προς την τιμή όταν $p = 10$.