

Βελτιστοποίηση συναρτήσεων

- Χρήση παραγώγου
- Παράγωγοι εκθετικών λογαριθμικών συναρτήσεων
- Ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής
- Παράγωγοι ανώτερης τάξης
- Εύρεση μεγίστων-ελαχίστων
- Οικονομικές συναρτήσεις

Χρήση παραγώγου

- Όταν βρίσκουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης, προκύπτει μια νέα συνάρτηση από το x στο $f'(x)$.
- Η παράγωγος συνάρτηση μας δίνει πολλές πληροφορίες για τον τρόπο μεταβολής της αρχικής συνάρτησης, όπως που αυξάνει, που μειώνεται και που έχει μέγιστο ή ελάχιστο σημείο.
- Όταν $f'(x) \geq 0$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι αύξουσα
- Όταν $f'(x) \leq 0$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι φθίνουσα
- Όταν $f'(x) = 0$ η συνάρτηση $f(x)$ έχει μέγιστο ή ελάχιστο σημείο ή αλλάζει καμπή
- .

Παράγωγοι εκθετικών λογαριθμικών συναρτήσεων

- $f(x)=e^x$ $g(x)=\log x$ ή $\ln x$
- $f'(x)=e^x$ $g'(x)=1/x$

- Αν $K(x)=\log f(x)$
- $K'(x)=[\log f(x)]' = f'(x)/f(x)$

Ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής

- Η παράγωγος εκφράζει το ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της.
- Κάποιες φορές μας ενδιαφέρει ο ρυθμός μεταβολής σε σχέση με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Ο ρυθμός αυτός εκφράζεται με τη διαίρεση της παραγώγου $f'(x)$ δια την τιμή $f(x)$, αντιστοιχεί σε ποσοστό μεταβολής και ονομάζεται

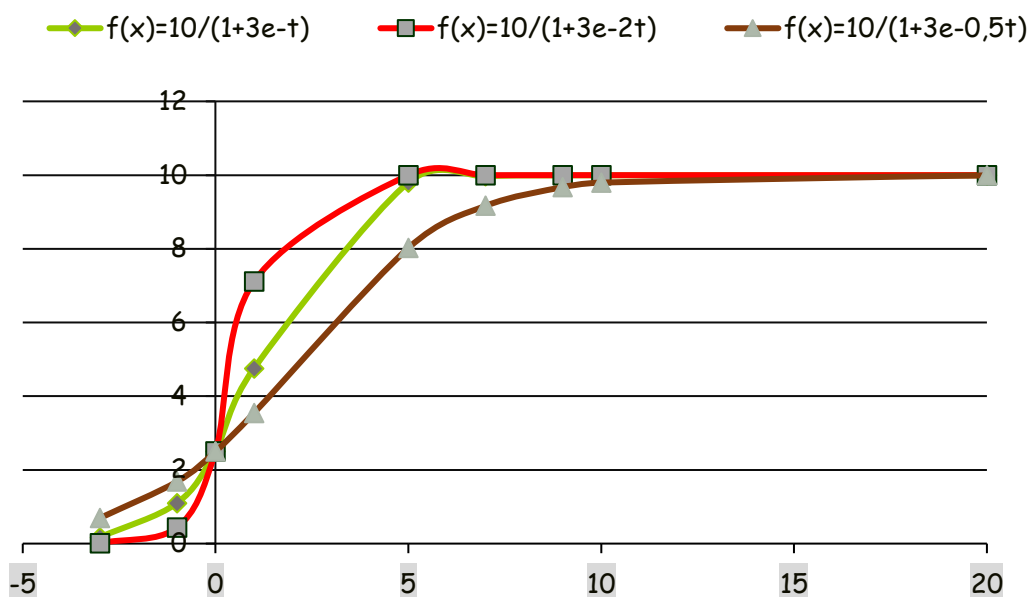
$$\text{ρυθμός ποσοστιαίας μεταβολής} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

- Μπορεί να εκφραστεί και ως παράγωγος του λογαρίθμου μιας συνάρτησης αφού

$$\log' f(x) = f'(x) / f(x)$$

Λογιστική καμπύλη

- Παράδειγμα εκθετικής συνάρτησης είναι η “Λογιστική καμπύλη” που περιγράφει μια αύξηση πληθυσμού στο χρόνο
- Η γραφική της παράσταση έχει σχήμα S
- Η παράγωγος της θα είναι
$$f'(t) = -A(1 + \gamma e^{-\beta t})' / (1 + \gamma e^{-\beta t})^2 = +A\beta \gamma e^{-\beta t} / (1 + \gamma e^{-\beta t})^2$$



Παράγωγοι ανώτερης τάξης

- Επειδή η παράγωγος μιας συνάρτησης, είναι μια νέα συνάρτηση $f'(x)$, μπορούμε να ξανα-υπολογίσουμε την παράγωγο της παραγώγου συνάρτησης. Αυτή ονομάζεται **δεύτερη** παράγωγος και συμβολίζεται **$f''(x)$** ή d^2f/dx^2

Συνεχίζοντας να υπολογίζουμε εκ νέου παράγωγο, έχουμε την τρίτη παράγωγο κλπ.

Οι παράγωγοι που προκύπτουν λέγονται παράγωγοι **ανώτερης τάξης**. Χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της αρχικής συνάρτησης.

Δεύτερη παράγωγος

- Αφού η παράγωγος $f'(x)$ συνάρτηση είναι με τη σειρά της μια συνάρτηση, μπορούμε να βρούμε ξανά την παράγωγό της.
- Αυτή λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της αρχικής συνάρτησης ή παράγωγος δευτέρου βαθμού και συμβολίζεται με $f''(x)$ ή d^2f/dx^2
- Είναι χρήσιμη, στην εύρεση των ακρότατων τιμών (μέγιστο ή ελάχιστο) της αρχικής συνάρτησης $f(x)$.
- Ειδικότερα στα σημείο όπου η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται, ελέγχουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου.

Ακρότατα και σημεία καμπής

	Τοπικό μέγιστο για $x = a$	Τοπικό ελάχιστο για $x = a$
Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου (ΚΠΠ)	$f'(a) = \frac{df(a)}{dx} = 0$	$f'(a) = \frac{df(a)}{dx} = 0$
Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου (ΚΔΠ)	$f''(a) = \frac{df^2(a)}{dx^2} < 0$	$f''(a) = \frac{df^2(a)}{dx^2} > 0$

Σημειώνεται ότι αν $f''(a) = 0$ τότε έχουμε σημείο καμπής.

Όταν η πρώτη παράγωγος είναι μηδέν και η δεύτερη παράγωγος **αρνητική**, έχουμε τοπικό **μέγιστο** της αρχικής συνάρτησης.

Όταν η πρώτη παράγωγος είναι μηδέν και η δεύτερη παράγωγος **θετική**, έχουμε τοπικό **ελάχιστο** της αρχικής συνάρτησης.

Όταν η πρώτη παράγωγος είναι μηδέν και η δεύτερη παράγωγος μηδέν, έχουμε σημείο **καμπής** της αρχικής συνάρτησης.

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές της συνάρτησης
 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$
2. Να βρεθούν οι παράγωγοι ανώτερης τάξης και τα ακρότατα της συνάρτησης
 $f(x) = -2x^4 + 5x^2 - 3.$
3. Να βρεθούν τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x) = 5x^3.$
4. Να προσδιορισθεί το διάστημα στο οποίο η συνάρτηση
 $f(x) = (x-2)^2 + (x-5)^2 + 2x,$ είναι φθίνουσα.

Οικονομικές συναρτήσεις

- Συναρτήσεις που μετρούν οικονομικά μεγέθη
- Οι πιο γνωστές είναι
 - συνάρτηση ζήτησης
 - συνάρτηση παραγωγής
 - συνάρτηση κόστους
 - συνάρτηση εσόδων
 - συνάρτηση κέρδους

Συνάρτηση ζήτησης

- Συνδέει την τιμή P με τη ζητούμενη ποσότητα Q ενός προϊόντος.
- Είναι φθίνουσα συνάρτηση η οποία ορίζεται μόνο για θετικές τιμές του P και Q
- Εκφράζεται (ανάλογα της ευκολίας)
- είτε $Q(P)$ ποσότητα σε σχέση με τιμή
είτε $P(Q)$ τιμή σε σχέση με ποσότητα

Εύρεση πεδίου ορισμού συνάρτηση ζήτησης

- Για να προσδιορισθεί το πεδίο ορισμού, θα πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα τρεις συνθήκες:

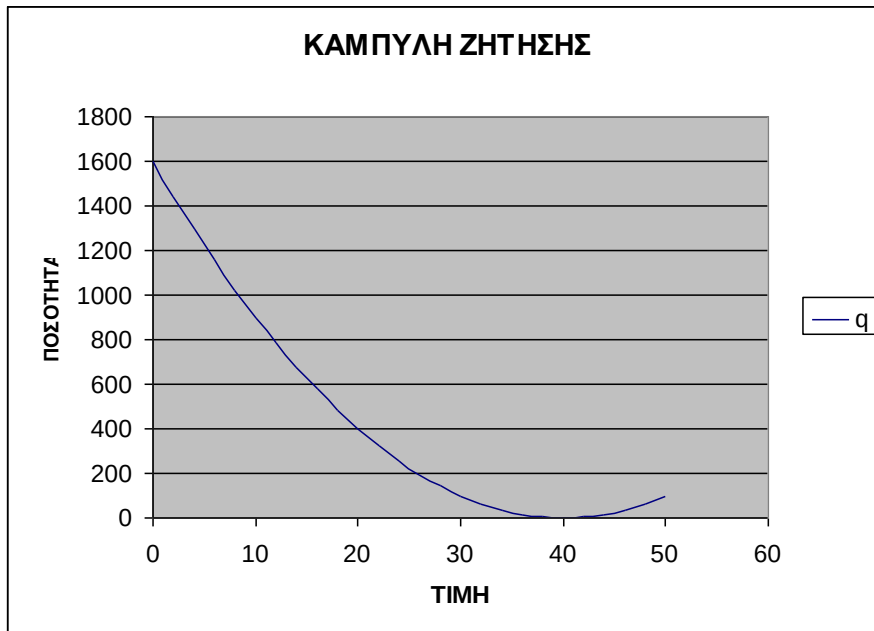
$P > 0$ τιμές θετικοί αριθμοί

$Q > 0$ ποσότητες θετικοί αριθμοί

$Q' < 0$ συνάρτηση φθίνουσα

- Προσδιορίζεται το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ζήτησης με την επίλυση των παραπάνω ανισοτήτων, ή με την παρατήρηση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ζήτησης.

Εύρεση πεδίου ορισμού συνάρτηση ζήτησης παράδειγμα



- Στο παραπάνω γράφημα παρουσιάζεται η καμπύλη ζήτησης όπως έχει κατασκευαστεί στο Excel. Η καμπύλη ζήτησης πρέπει να βρίσκεται στο **θετικό** τεταρτημόριο και να έχει **αρνητική** κλίση όπως απαιτείται από την θεωρία των οικονομικών.
- Έτσι ο περιορισμός $p \geq 0$, που αντιστοιχεί σε $Q \leq 1600$, είναι αναγκαίος για να παραμείνει η καμπύλη ζήτησης στο θετικό τεταρτημόριο. Επίσης για να έχει η καμπύλη ζήτησης κλίση προς τα κάτω θα πρέπει $p \leq 40$.
- Αυτό συμβαίνει επειδή για $p > 40$ η καμπύλη ζήτησης αρχίζει να έχει κλίση θετική. Έτσι έχουμε μια συνάρτηση ζήτησης της οποίας το πεδίο ορισμού είναι περιορισμένο.
- Στο γράφημα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης έχει επεκταθεί ελαφρώς πέραν του 40 για να δειχθεί η θετική κλίση της καμπύλης ζήτησης.

Συνάρτηση παραγωγής

- Η **συνάρτηση παραγωγής** (production function) μετασχηματίζει τους πόρους παραγωγής (εισόδους-inputs) σε παραγόμενες μονάδες(έξοδο-output). Αυτή μπορεί να είναι της μορφής

$$Q = f (L,K,R,T ,S,...)$$

όπου οι μεταβλητές $L,K,R,T ,S,...$ παριστάνουν, την εργασία L , το φυσικό κεφάλαιο (κτήρια, μηχανές, κ.λπ.) ή το πραγματικό κεφάλαιο K , την πρώτη ύλη R , την τεχνολογία T , τη γη S , κ.λ.π.

Εμείς θα υποθέσουμε ότι το Q είναι συνάρτηση ενός μόνο πόρου του x και έτσι γράφουμε $Q = f (x)$.

- Από την $Q = f (x)$ (που ονομάζεται και συνάρτηση ολικής παραγωγής) παράγονται οι συναρτήσεις που δίδονται στον παρακάτω πίνακα.

Συνάρτηση παραγωγής

τύπος

Στα αγγλικά

Συνολικό προϊόν	$Q(x)$	Production function
Οριακό προϊόν	$MQ(x) = Q'(x)$	Marginal product
Μέσο προϊόν	$AQ(x) = Q(x)/x$	Average product

Είδη συναρτήσεων παραγωγής

- Η $f'(x)$ παριστά την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$
- Όταν εξειδικεύσουμε την φύση του x , δηλαδή όταν προσδιορίσουμε τι αυτό παριστάνει τότε εξειδικεύουμε και το όνομα της συνάρτησης παραγωγής
- Έτσι αν $Q = f(L)$ μιλάμε για συνάρτηση **ολικού προϊόντος της εργασίας**.
- Το $MP(L) = f'(L)$ λέγεται **οριακό προϊόν της εργασίας** (Marginal product of labour-MPL).
- Το $AP(L) = f(L) / L$ λέγεται **μέσο προϊόν της εργασίας** (Average product of labour-APL).
- Ανάλογες διατυπώσεις έχουμε όταν το x εκφράζει άλλες μεταβλητές π.χ. Κεφάλαιο

συνάρτηση κόστους

- Η **συνάρτηση κόστους** (Cost function), εκφράζει το κόστος που συνεπάγεται η παραγωγή q μονάδων ενός προϊόντος και έχει την έκφραση
- $TC = C(q)$ ή $TC(q) = C(q)$

Χωρίζεται σε μεταβλητό και σταθερό κόστος

Το σταθερό κόστος είναι το κόστος που αντιστοιχεί σε $q=0$.

Το υπόλοιπο είναι το μεταβλητό κόστος.

$$TC(q) = VC(q) + FC$$

Η παράγωγος του κόστους συμβολίζεται

- $MC(q) = C'(q) = VC'(q)$

Και ονομάζεται στα Οικονομικά **οριακό κόστος**

Συναρτήσεις κόστους

συνάρτηση	τύπος	Στα αγγλικά
Συνολικό κόστος	$TC=TC(q) =C(q)$	Total cost
Σταθερό κόστος	$TFC = FC = C(0)$	Total fixed cost
Μεταβλητό κόστος	$VC(q) =TC(q)-TFC$	Variable cost
Μέσο κόστος	$AC=AC(q) = TC(q) /q$	Average total cost

συνάρτηση	τύπος	Στα αγγλικά
Οριακό κόστος	$MC(q) =C'(q)$	Marginal cost
Οριακό μεταβλητό κόστος	$MVC(q) =VC'(q)$	Marginal variable cost

Συναρτήσεις εσόδων και κερδών

- Η συνάρτηση εσόδων R , στην περίπτωση πώλησης της παραγωγής Q σε τιμή P , υπολογίζεται ως γινόμενο: $R=Q \times P$
- Η συνάρτηση κερδών Π , προκύπτει αν από τα έσοδα αφαιρεθεί το συνολικό κόστος.
 - $\Pi = R - TC$
 - **Κέρδη = Έσοδα – Κόστος**

Σημείο μεγιστοποίησης κερδών

- Κέρδη = $R(Q) - C(Q)$

- Οριακά κέρδη = $R'(Q) - C'(Q)$

Μεγιστοποίηση όταν

Οριακά κέρδη = 0 (πρώτη παράγωγος = 0)

$$R'(Q) - C'(Q) = 0$$

Άρα $R'(Q) = C'(Q)$ ή

$$MR(Q) = MC(Q)$$

(οριακά έσοδα = οριακό κόστος)

παράδειγμα

- Η συνάρτηση συνολικού κόστους (TC) μιας επιχείρησης δίνεται από την εξίσωση, $TC = 2Q^3$, όπου Q είναι η ποσότητα του αγαθού. Η συνάρτηση ζήτησης του αγαθού είναι $P = 120 - Q$, όπου P είναι η τιμή του αγαθού και Q η ζητούμενη ποσότητα.

1. Να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις. Συνολικού εσόδου (TR), οριακού εσόδου MR, κέρδους (Π) οριακού κέρδους ΜΠ. Οριακού κόστους της επιχείρησης.
2. Υπολογίστε για ποιες ποσότητες αγαθού (Q) τα κέρδη της επιχείρησης είναι μηδέν.
3. Να προσδιορίσετε τις παραγόμενες ποσότητες Q (ή διαστήματα ποσοτήτων) του αγαθού (Q) για τις οποίες η επιχείρηση έχει: (i) Μηδενικό κέρδος, (ii) κέρδος και (iii) ζημιά.

Λύση 1.

- Συνολικού εσόδου $TR=TR(Q) = PQ = (120 - Q)Q = 120Q - Q^2$
- Οριακού εσόδου $MR= MR(Q)= (120Q - Q^2)' = 120 - 2Q$
- Κέρδους $\Pi= \Pi(Q) = TR - TC = (120Q - Q^2) - 2Q^3 = 120Q - Q^2 - 2Q^3$
- Οριακού Κέρδους $ΜΠ=ΜΠ(Q)= (120Q - Q^2 - 2Q^3)' = 120 - 2Q - 6Q^2$
- Οριακό κόστος $MC=MC(Q)= (2Q^3)' = 6Q^2$

Λύση 2.

$$\begin{aligned} \bullet \Pi(Q) = 0 &\Rightarrow 120Q - Q^2 - 2Q^3 = 0 \Rightarrow \\ Q(120 - Q - 2Q^2) &= 0 \end{aligned}$$

Από αυτήν έχουμε $Q=0$ ή $120 - Q - 2Q^2=0$.

Η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης μας δίνει $Q=7.5$ και $Q=-8$. Η αρνητική τιμή απορρίπτεται και συνεπώς οι ποσότητες που μηδενίζουν το κέρδος είναι $Q=0$ και $Q=7.5$

- 1) Μηδενικό κέρδος αντιστοιχεί στις ποσότητες $Q=0$ και $Q=7.5$
- 2) Κέρδος προκύπτει για ποσότητες $0 < Q < 7.5$, (λύση της ανισότητας $\Pi(Q) > 0$)
- 3) Ζημιά προκύπτει για ποσότητες $Q > 7.5$ (λύση της ανισότητας $\Pi(Q) < 0$)

Άσκηση

- Βρείτε τη συνάρτηση κερδών, όταν η συνάρτηση κόστους είναι $C=150 + 30 Q$ και η συνάρτηση ζήτησης είναι $Q=40-2 P$.

- Η συνάρτηση κερδών είναι αύξουσα ή φθίνουσα;
- Πότε έχει μέγιστο;

Ασκήσεις

1. Η συνάρτηση κόστους είναι $C(q)=5q^3-6q^2+4q+150$. Να βρεθεί το οριακό κόστος και το μέσο κόστος όταν $q=5$.
2. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους της άσκησης 1.
3. Αν $R(q)=-5q^2+90q$ να βρείτε:
α) τα οριακά έσοδα για $q=2$,
β) τα μέσα έσοδα για $q=4$.
4. Η συνάρτηση κόστους είναι $C(q)=0.25q^2+2q+25$. Αν η τιμή είναι $p=5$ μονάδες, να βρεθεί η ποσότητα στην οποία μεγιστοποιούνται τα κέρδη.
5. Η συνάρτηση μέσου κόστους είναι $AC(q)=5/q+4q+3$, να βρεθεί η συνάρτηση οριακού κόστους.
6. Μια επιχείρηση έχει πάγιο κόστος 240 ευρώ το μήνα και μεταβλητό κόστος $4q^2-40q$, όπου q η παραγόμενη μηνιαία ποσότητα. Να βρεθεί
α) η συνάρτηση συνολικού κόστους
β) η συνάρτηση μέσου κόστους και το σημείο που αυτό ελαχιστοποιείται
γ) Στο σημείο ελαχιστοποίησης του μέσου κόστους, πόσο είναι το συνολικό κόστος και πόσο το μέσο κόστος;