

Εφαρμογές οικονομικών συναρτήσεων

- Διάθεση προϊόντος με δύο συναρτήσεις ζήτησης
- Οριακά έσοδα σε σχέση με ελαστικότητα
- Επιβολή φόρου

Διάθεση προϊόντος με δύο συναρτήσεις ζήτησης

- Έστω ένας παραγωγός έχει τη δυνατότητα να πουλήσει το προϊόν του τόσο στην αγορά της πόλης του όσο και στην αγορά του εξωτερικού. Το κόστος παραγωγής του είναι $C(q)=500+60q$.

Η συνάρτηση ζήτησης για την πόλη του είναι

$$q_1=40-0,3p_1,$$

ενώ η συνάρτηση ζήτησης για το εξωτερικό είναι

$$q_2=60-0,6p_2.$$

1. Να βρεθούν οι τιμές p_1 και p_2 ώστε να μεγιστοποιηθούν τα κέρδη του παραγωγού. Πόσο είναι τότε το συνολικό κέρδος του;
2. Αν ο παραγωγός αποφασίσει να πουλήσει με την ίδια τιμή στην πόλη του και στο εξωτερικό, να βρεθεί η τιμή που μεγιστοποιεί τα κέρδη του, και τα κέρδη του.

Λύση για εύρεση τιμών

- Το κέρδος μεγιστοποιείται όταν ισχύει $MR(Q) = MC(Q)$

- $MC(Q) = C'(Q) = (500 + 60q)' > MC(Q) = 60$

- Για την πώλη του

$$q_1 = 40 - 0,3p_1 \Leftrightarrow p_1 = (40 - q_1)/0,3$$

$$MR(q_1) = (q_1 * p_1)' =$$

$$[q_1 * (40 - q_1)/0,3]' = [(40q_1 - q_1^2)/0,3]' =$$

$$= (40 - 2q_1)/0,3$$

$$\text{Πρέπει } MR(Q) = MC(Q)$$

$$(40 - 2q_1)/0,3 = 60 \Leftrightarrow q_1 = 11$$

$$\text{και } p_1 = (40 - 11)/0,3 = 97$$

- Για το εξωτερικό

$$q_2 = 60 - 0,6p_2 \Leftrightarrow p_2 = (60 - q_2)/0,6$$

$$MR(q_2) = (q_2 * p_2)' =$$

$$[q_2 * (60 - q_2)/0,6]' = [(60q_2 - q_2^2)/0,6]' =$$

$$= (60 - 2q_2)/0,6$$

$$\text{Πρέπει } MR(Q) = MC(Q)$$

$$(60 - 2q_2)/0,6 = 60 \Leftrightarrow q_2 = 12$$

$$\text{και } p_2 = (60 - 12)/0,6 = 80$$

Λύση για μέγιστο κέρδος

- Άρα η τιμή στην πόλη του θα είναι 97 μονάδες, ενώ στο εξωτερικό 80 μονάδες.
- Το μέγιστο κέρδος του παραγωγού θα είναι
- $R(Q) - C(Q) =$
 $p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 - C(q_1 + q_2) =$
 $97 \cdot 11 + 80 \cdot 12 - C(11 + 12) =$
 $1067 + 960 - C(23) =$
 $2027 - (500 + 60 \cdot 23) =$
 $2027 - 500 - 1380 = 147$

Λύση για εύρεση κοινής τιμής

- Το κέρδος μεγιστοποιείται όταν ισχύει $MR(Q) = MC(Q)$
- $MC(Q) = C'(Q) = (500 + 60q)' > MC(Q) = 60$
- Αν $p_1 = p_2 = p$
- $q = q_1 + q_2 = 40 - 0,3p + 60 - 0,6p \Rightarrow q = 100 - 0,9p$
και $p = (100 - q)/0,9$
- $MR(q) = (q \cdot p)' =$
 $[q \cdot (100 - q)/0,9]' = [(100q - q^2)/0,9]' =$
 $= (100 - 2q)/0,9$
Πρέπει $MR(Q) = MC(Q)$
 $(100 - 2q)/0,9 = 60 \Leftrightarrow q = 23$
και $p = (100 - 23)/0,9 = 85,55$
- Το μέγιστο κέρδος του παραγωγού θα είναι
 $R(Q) - C(Q) =$
 $p \cdot q - C(q) =$
 $85,55 \cdot 23 - C(23) =$
 $1967,77 - (500 + 60 \cdot 23) =$
 $1967,77 - 500 - 1380 = 87,77$

Οριακά έσοδα σε σχέση με ελαστικότητα

- $R(q) = p * q$
- $\varepsilon_{\text{τιμής}} = dp/dq * q/p$
- $dR/dq = dp/dq * q + p * 1$
(παράγωγος γινομένου ως προς q)
- $dR/dq = dp/dq * q + p =$
- $dR/dq = p(dp/dq * q/p + 1)$
- $dR/dq = p(\varepsilon_{\text{τιμής}} + 1) = p * \varepsilon_{\text{τιμής}} + p$
- Τα οριακά έσοδα είναι το γινόμενο τιμής επί την ελαστικότητα συν την τιμή.

Οριακό κόστος και αύξηση εσόδων

Το κόστος $TC(q)=2q^3-5q^2+14q$, και τα έσοδα $TR(q)=2q^3-2q^2+11q$, μιας επιχείρησης, η οποία παράγει 15 μονάδες παραγωγής.

- A) Πόσο θα στοιχίσει η παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας;
- B) Πόσο επιπλέον θα αυξηθούν τα έσοδα, αν αυξηθεί η παραγωγή κατά μία μονάδα;

Οριακό κόστος και αύξηση εσόδων

A) η παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας θα στοιχίσει
όσο είναι το οριακό κόστος για τις 15 μονάδες.

$$C'(q) = (2q^3 - 5q^2 + 14q)' = 6q^2 - 10q + 14$$

$$C'(15) = 6(15)^2 - 10 \cdot 15 + 14 = 1.214$$

B) Τα έσοδα, αν αυξηθεί η παραγωγή κατά μία μονάδα
(από 15 σε 16) θα είναι όσο τα οριακά έσοδα για 15
μονάδες.

$$R'(q) = (2q^3 - 2q^2 + 11q)' = 6q^2 - 4q + 11$$

$$R'(15) = 6(15)^2 - 4 \cdot 15 + 11 = 1301.$$

Επομένως η παραγωγή μιας επιπλέον μονάδας θα
φέρει επιπλέον έσοδα 1301, ενώ θα στοιχίσει
επιπλέον 1214. Θα φέρει δηλαδή επιπλέον κέρδος
87.

παράδειγμα προσφοράς- ζήτησης φόρου

- Ας θεωρήσουμε ότι οι εξισώσεις προσφοράς (q_s) και ζήτησης (q_d) κάποιου αγαθού είναι:

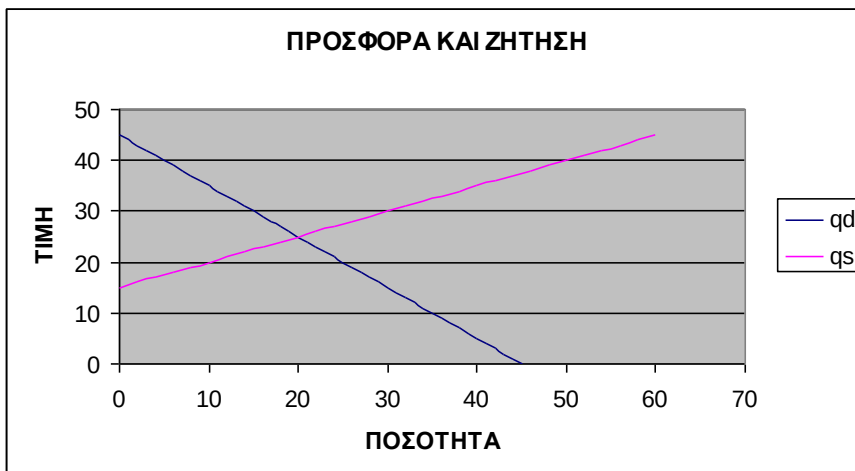
$$q_s = -30 + 2p$$

$$q_d = 45 - p$$

- **A)** Να υπολογιστούν η τιμή και η ποσότητα του αγαθού σε κατάσταση ισορροπίας.
- **B)** Να χρησιμοποιηθεί το Excel για να σχεδιαστεί η καμπύλη προσφοράς και ζήτησης του αγαθού, όπου ο άξονας Χ αντιπροσωπεύει την ποσότητα και ο άξονας Υ την τιμή. Σχολιάσατε το αποτέλεσμα ορίζοντας το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ζήτησης και προσφοράς έτσι όπως απαιτείται από τη θεωρία των οικονομικών.
- **Γ)** Υποθέσατε ότι επιβάλλεται φόρος $t=3$ νομισματικές μονάδες ανά μονάδα προσφερόμενου αγαθού. Να υπολογισθεί η τιμή και η ποσότητα του αγαθού σε κατάσταση ισορροπίας μετά την επιβολή του φόρου. Σημειώνεται ότι ο φόρος επιβαρύνει τον παραγωγό και κατά συνέπεια η συνάρτηση ζήτησης δεν επηρεάζεται από την επιβολή του.
- **Δ)** Στο γράφημα του Excel του ερωτήματος (B) προσθέσατε τις καμπύλες ζήτησης και προσφοράς του αγαθού μετά την επιβολή του φόρου. Σχολιάσατε το αποτέλεσμα, μετά την επιβολή του φόρου, ορίζοντας το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ζήτησης και προσφοράς έτσι όπως απαιτείται από τη θεωρία των οικονομικών.
- **Ε)** Ποιες οι δαπάνες του καταναλωτή, τα έσοδα του παραγωγού και τα έσοδα του κράτους μετά την επιβολή του φόρου;

λύση

- Α) Σε κατάσταση ισορροπίας
- $q_s = q_d \Leftrightarrow -30 + 2p = 45 - p \Leftrightarrow 3p = 75 \Leftrightarrow p = \frac{75}{3} \Leftrightarrow p = 25$
- Άρα η τιμή του αγαθού σε κατάσταση ισορροπίας είναι 25. Αντικαθιστώντας την τιμή στην εξίσωση ζήτησης έχουμε
$$q_d = 45 - p = 45 - 25 = 20$$
- Το ίδιο προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε την τιμή στην εξίσωση προσφοράς
- Άρα η ποσότητα του αγαθού σε κατάσταση ισορροπίας είναι
$$q = 20$$



- Οι καμπύλες πρέπει να βρίσκεται στο θετικό τεταρτημόριο και η μεν καμπύλη προσφοράς να έχει θετική κλίση (όπως σωστά παρουσιάζεται στο γράφημα) η δε καμπύλη ζήτησης αρνητική κλίση (όπως σωστά παρουσιάζεται στο γράφημα) όπως απαιτείται από την θεωρία των οικονομικών. Έτσι οι πιο κάτω περιορισμοί που δίνονται δίπλα από τις συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης είναι αναγκαίοι για να παραμείνουν οι καμπύλες προσφοράς και ζήτησης στο θετικό τεταρτημόριο.

$$q_s = -30 + 2p \quad \text{για} \quad p \geq 15$$

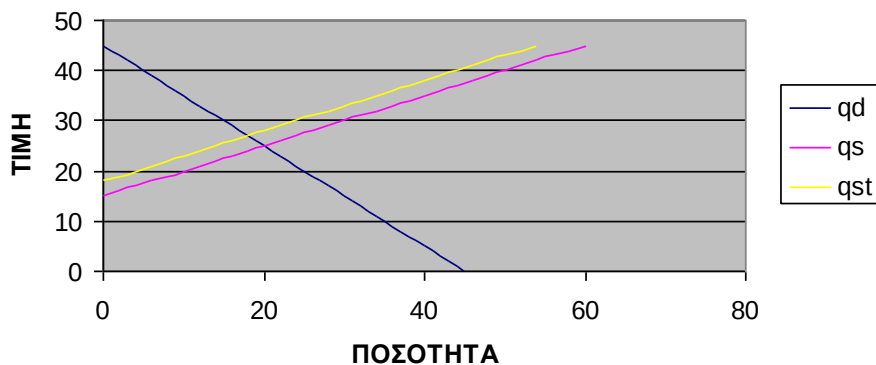
$$q_d = 45 - p \quad \text{για} \quad 0 \leq p \leq 45$$

- Οι περιορισμοί προκύπτουν με βάση το παραπάνω διάγραμμα, αλλά και αλγεβρικά ως εξής:
- Για τη συνάρτηση προσφοράς: $q_s \geq 0 \Rightarrow -30 + 2p \geq 0 \Rightarrow 2p \geq 30 \Rightarrow p \geq 15$
- Για τη συνάρτηση ζήτησης: $q_d \geq 0 \Rightarrow 45 - p \geq 0 \Rightarrow p \leq 45$
Επίσης .
- Γ) Από την στιγμή που επιβάλλεται φόρος $t=3$ νομισματικών μονάδων ανά μονάδα προσφερόμενου αγαθού η τιμή που απολαμβάνει ο παραγωγός θα είναι: $p-t$. Άρα η συνάρτηση προσφοράς γίνεται:
- $q_{st} = -30 + 2(p - t) = -30 + 2(p - 3) = -30 + 2p - 6 = -36 + 2p$
- Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η συνάρτηση ζήτησης δεν επηρεάζεται από την επιβολή του φόρου. Μετά την επιβολή του φόρου σε κατάσταση ισορροπίας και

$$q_{st} = q_d \Leftrightarrow -36 + 2p = 45 - p \Leftrightarrow 3p = 81 \Leftrightarrow p = \frac{81}{3} \Leftrightarrow p = 27$$

$$q_d = 45 - p = 45 - 27 = 18$$

ΠΡΟΣΦΟΡΑ ΚΑΙ ΖΗΤΗΣΗ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΠΟΒΟΛΗ ΤΟΥ ΦΟΡΟΥ



- Δ) Στο παραπάνω γράφημα παρουσιάζονται οι καμπύλες προσφοράς και ζήτησης όπως έχουν στο Excel. Μετά την επιβολή του φόρου η καμπύλη προσφοράς μετακινήθηκε παράλληλα προς τα επάνω κατά το ποσό του φόρου (δηλ. κατά 3 μονάδες) για κάθε μονάδα προσφερόμενου αγαθού, ενώ η καμπύλη ζήτησης παρέμεινε αμετακίνητη. Ο πιο κάτω περιορισμός που δίνεται δίπλα από την νέα συνάρτηση προσφοράς είναι αναγκαίος για να παραμείνει η νέα καμπύλη προσφοράς στο θετικό τεταρτημόριο.

$$q_{st} = -36 + 2p \quad \text{για} \quad p \geq 18$$

- Ε) Μετά την επιβολή του φόρου:
- Οι δαπάνες του καταναλωτή είναι: $pq = (27)(18) = 486$
- Τα έσοδα του παραγωγού είναι: $(p-t)q = (27-3)(18) = 432$
- Τα έσοδα του κράτους είναι: $tq = (3)(18) = 54$
- Ένας άλλος τρόπος να υπολογισθούν τα έσοδα του κράτους είναι εάν από τις δαπάνες του καταναλωτή αφαιρεθούν τα έσοδα του παραγωγού, δηλ. $486-432=54$