

Ολοκλήρωμα συνάρτησης

- Έννοια
 - Υπολογισμός
 - Χρήση
-
- Αόριστο και ορισμένο ολοκλήρωμα

εισαγωγικό παράδειγμα οριακού κόστους

- Έστω η συνάρτηση οριακού κόστους μιας επιχείρησης δίνεται από τη σχέση
 $MC(q)=3q^2+4$
- Πως μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση κόστους της επιχείρησης;
- Απάντηση
Θα πρέπει $C'(q)=3q^2+4$, οπότε
ίσως $C(q)=q^3+4q$ ή
 $C(q)=q^3+4q-5$ ή
 $C(q)=q^3+4q+1000$

εισαγωγικό παράδειγμα ρυθμού μεταβολής

- Έστω ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι
$$df/dx = 4x$$
- Πως μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση;

- Απάντηση

Θα πρέπει $f'(x) = 4x$, οπότε

ίσως $f(x) = 2x^2$ ή

$f(x) = 2x^2 - 304$ ή

$f(x) = 2x^2 + 3504$

Έννοια

- Σε πολλές οικονομικές εφαρμογές γνωρίζουμε τη συνάρτηση οριακού οικονομικού μεγέθους, και ζητάμε να βρούμε την αντίστοιχη συνάρτηση του οικονομικού μεγέθους.
- Γνωρίζουμε δηλαδή την παράγωγο και αναζητούμε την αρχική συνάρτηση.
- Η διαδικασία εύρεσης της συνάρτησης από την παράγωγό της, ονομάζεται ολοκλήρωση.

Μαθηματικός ορισμός

Έστω συνάρτηση $F(x)$, για την οποία ισχύει $F'(x)=f(x)$. Τότε η $F(x)+c$ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της $f(x)$, ως προς x και συμβολίζεται

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

c είναι οποιοσδήποτε αριθμός (δεν εξαρτάται από το x) αφού $(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$

Όταν υπολογίζουμε το **αόριστο** ολοκλήρωμα υποχρεωτικά πρέπει να γράφουμε και το c , έστω και αν δεν το γνωρίζουμε, διότι έτσι φαίνεται ότι το αόριστο ολοκλήρωμα δεν είναι μόνο μία συνάρτηση αλλά πολλές διαφορετικές συναρτήσεις.

Κανόνες υπολογισμού ολοκληρωμάτων

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Εύρεση της σταθερής c

- Αν έχουμε κάποιο γνωστό σημείο x_0 και y_0 , το οποίο ξέρουμε ότι είναι σημείο της συνάρτησης, μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή του c , από τη σχέση:

$$y_0 = F(x_0) + c$$

παραδείγματα

- Αν ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους δίνεται από τη σχέση $20x^{1/3}$ και ξέρουμε ότι αν $x=1$ το ζητούμενο μέγεθος είναι 150, να βρεθεί η αρχική συνάρτηση του μεγέθους.
- Άρα για $x=1$ το $15x^{4/3}+c=150$ βρίσκουμε την σταθερά c .
- $c=150-15*1=135$.
- Το ζητούμενο μέγεθος είναι $15x^{4/3}+135$.

$$\int 20x^{1/3} dx = \frac{3}{4} 20x^{4/3} + c = 15x^{4/3} + c$$

παραδείγματα

- Δίνεται η συνάρτηση οριακού κόστους $6q^2 + 7q - 35$ και ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση κόστους, όταν ξέρουμε ότι το σταθερό κόστος είναι 200.
- Σταθερό κόστος, σημαίνει ότι δεν εξαρτάται από την ποσότητα παραγωγής και υπάρχει για $q=0$.
- Άρα για $q=0$ το $C=200$ και αντικαθιστώντας βρίσκουμε την σταθερά c .
- $C(0) = 2 \cdot 0 + 3,5 \cdot 0 - 35 \cdot 0 + c = 200 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow c = 200$

$$\int (6q^2 + 7q - 35) dq = 2q^3 + 3,5q^2 - 35q + c$$

Τεχνικές εύρεσης ολοκληρώματος με αντικατάσταση

•Όταν ζητάμε να βρούμε το ολοκλήρωμα μιας σύνθετης συνάρτησης, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $[f \circ g(x)]' = f'(g(x)) g'(x)$ στην αντίστροφη πορεία. Δηλαδή

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(\omega)d\omega$$

$$\omega = g(x)$$

•Αντικατάσταση της μεταβλητής του διαφορικού dx από κάποια συνάρτηση ω που μας «διευκολύνει», και όταν βρούμε το ολοκλήρωμα αντικαθιστούμε πάλι το ω με το $g(x)$.

Παράδειγμα εύρεσης με αντικατάσταση

$$\int (1-3x)^{50} dx =$$

$$\omega = 1-3x$$

$$\int \omega^{50} \frac{1}{-3} d\omega = -\frac{1}{3} \int \omega^{50} d\omega =$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{1}{51} \omega^{51} + c = -\frac{1}{153} (1-3x)^{51} + c$$

$$\int e^{5x+4} dx =$$

$$\omega = 5x + 4$$

$$\int e^{\omega} \frac{1}{5} d\omega = \frac{1}{5} \int e^{\omega} d\omega =$$

$$= \frac{1}{5} e^{\omega} + c = \frac{1}{5} e^{5x+4} + c$$

παράδειγμα

1. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης
 $f(x) = 7x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x + 4$

Λύση:

$$\int f(x) dx = \int (7x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x + 4) dx$$

$$= 7x^6/6 - 3x^5/5 + 5x^4/4 - x^2/2 + 4x + c$$

2. Να υπολογισθεί $\int 4e^{2x} dx$

Λύση:

$$\int 4e^{2x} dx = \int 2 \cdot 2e^{2x} dx = \int 2e^{2x} d(2x) = 2e^{2x} + c$$

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων
(a) $f(x) = x^3 - x^2 + 6$ (b) $f(x) = x - 2/x$ (c) $f(x) = -4x^4$
(d) $f(x) = (-2x^3 + 4)^6$ (e) $f(x) = (x+2)^5 + (x-3)^6$
(f) $f(x) = (2x^3 - 6) - (x+1)$ (g) $f(x) = 3x^2 + 8\sqrt{x} - 4$
2. Η συνάρτηση οριακού κόστους είναι $MC(q) = 5q^3 - 6q^2 + 4q + 150$. Να βρεθεί το ολικό κόστος όταν το σταθερό κόστος είναι 100 μονάδες.
3. Αν η συνάρτηση οριακών εσόδων είναι $MR = -3q^2 - 4q + 50$ να βρεθεί η συνάρτηση εσόδων και η συνάρτηση ζήτησης $p = D(q)$.
4. Η συνάρτηση οριακού κόστους είναι $MC(q) = 10e^{-0,2q}$. Να βρεθεί το ολικό κόστος όταν το σταθερό κόστος είναι 50 μονάδες.
5. Αν η οριακή ροπή προς κατανάλωση είναι $dC/dY = 0,6$ και η κατανάλωση είναι 60 μονάδες όταν το εισόδημα είναι 0, να βρεθεί η συνάρτηση κατανάλωσης.

Παράρτημα

- ειδικά θέματα εύρεσης ολοκληρώματος
- (προαιρετικά)

Τεχνικές εύρεσης ολοκληρώματος με παραγοντική ολοκλήρωση

•Αν το ολοκλήρωμα που ζητάμε γράφεται σαν γινόμενο συνάρτησης και παραγώγου, χρησιμοποιούμε τον παρακάτω τύπο που μετατρέπει το ολοκλήρωμα σε νέο ολοκλήρωμα που είναι ευκολότερο

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

•Αν το ολοκλήρωμα στη δεξιά πλευρά, μπορούμε να το βρούμε ευκολότερα από το ολοκλήρωμα της αριστερής πλευράς.

Παράδειγμα εύρεσης με παραγοντική ολοκλήρωση

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \int x (e^x)' dx = \\ &= x e^x - \int (x)' e^x dx = \\ &= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x^5 \ln x dx &= \int \left(\frac{x^6}{6} \right)' \ln x dx = \\ &= \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{1}{6} \int x^6 \ln' x dx = \\ &= \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{1}{6} \int x^6 \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{1}{6} \int x^5 dx = \\ &= \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{1}{6} \frac{x^6}{6} + c\end{aligned}$$

Τεχνικές εύρεσης ολοκληρώματος με ανάλυση σε κλάσματα

• Αν το ολοκλήρωμα γράφεται σαν κλάσμα με το x στον παρανομαστή, προσπαθούμε να βρούμε απλούστερα κλάσματα για τα οποία γνωρίζουμε τα ολοκληρώματά τους.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \left(\frac{A}{g_1(x)} + \frac{B}{g_2(x)} + \frac{\Gamma}{g_3(x)} \right) dx$$

Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή
 $g(x) = g_1(x) g_2(x) g_3(x)$ και εντοπίζουμε τους αριθμητές
των απλών κλασμάτων A, B, Γ , λύνοντας εξισώσεις