

παράδειγμα

Απορία από τα προηγούμενα

Έστω τα οριακά έσοδα να είναι
συνάρτηση του q

$$MR(q) = q^3 + 6$$

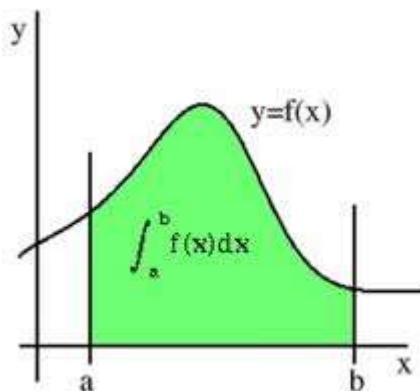
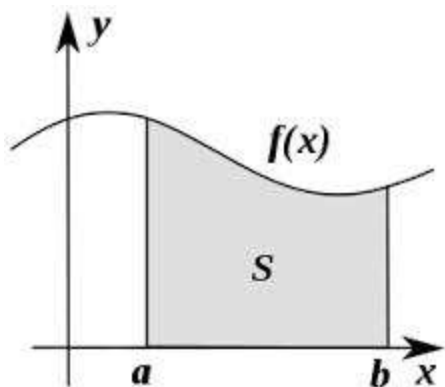
ποια συνάρτηση μας δίνει τα
έσοδα;

$$R'(q) = MR(q)$$

$$\begin{aligned} R(q) &= \int MR(q) \, dq = \int q^3 + 6 \, dq = \\ &= q^{3+1}/4 + 6q + c = q^4/4 + 6q + c \end{aligned}$$

Επειδή $R(0)$ πρέπει $= 0$ οπότε $c = 0$

ορισμένο ολοκλήρωμα



Η χρησιμότητα του ολοκληρώματος αφορά κυρίως στον υπολογισμό εμβαδού του μέρους που βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για ένα διάστημα τιμών $[κ, λ]$ του πεδίου ορισμού της.

Το εμβαδόν αυτό, λόγω του ότι υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα και αφορά ορισμένο διάστημα τιμών, ονομάζεται

ορισμένο ολοκλήρωμα και συμβολίζεται :

$$\int_{\kappa}^{\lambda} f(x)dx$$

ορισμένο ολοκλήρωμα α έως β

- Βρίσκουμε το αόριστο ολοκλήρωμα, και στη συνέχεια υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης $F(x)$ που προκύπτει για β , μείον την τιμή για α .
- Η διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$ είναι ανεξάρτητη της σταθερής c του ολοκληρώματος και την ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα από α έως β .
- Το ορισμένο ολοκλήρωμα δεν είναι συνάρτηση, αλλά ένας αριθμός.

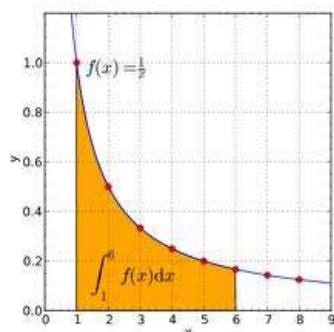
$$\begin{aligned}
 & \int_2^7 (5x^4+4x+10)dx = \left[\frac{5}{5}x^5 + \frac{4}{2}x^2 + 10x \right]_2^7 = \\
 & = (7^5 + 2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2) - (2^5 + 2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2) = \\
 & = 16807 + 168 - 60 = 16.917 \text{ εμβαδόν}
 \end{aligned}$$

Ιδιότητες

$$\int_{\kappa}^{\kappa} f(x)dx = 0$$

$$\int_{\kappa}^{\lambda} f(x)dx = -\int_{\lambda}^{\kappa} f(x)dx$$

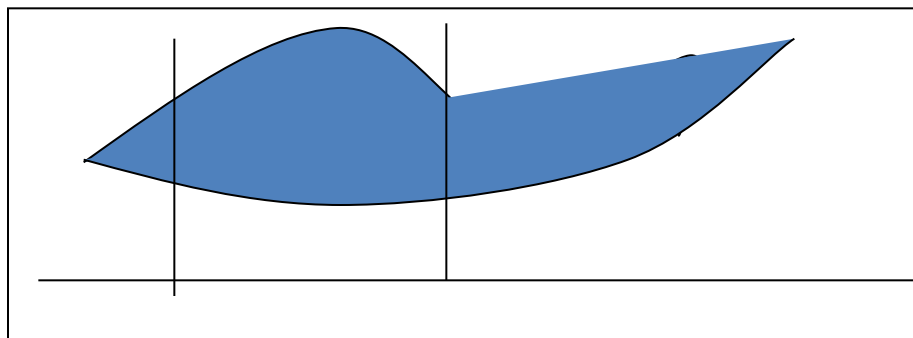
$$\int_{\kappa}^{\lambda} f(x)dx = E(\lambda) - E(\kappa)$$



Εμβαδόν του μέρους που περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης, τον οριζόντιο άξονα x και τις κάθετες γραμμές για $x=\kappa$ έως $x=\lambda$.

Εμβαδό μεταξύ δύο καμπυλών

- Αν ζητάμε το εμβαδόν μεταξύ δύο καμπύλων δύο διαφορετικών συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ για ένα διάστημα τιμών (α, β) βρίσκουμε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται κάτω από την ψηλότερη καμπύλη και στη συνέχεια αφαιρούμε το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την άλλη καμπύλη, ώστε να προκύψει ως αποτέλεσμα το εμβαδόν μεταξύ των δύο καμπυλών.



Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα ορισμένα ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων για τιμές του x από 1 έως 3.

(a) $f(x) = x^4 - x^2 + 16$ (b) $f(x) = x - 3/x$ (c) $f(x) = -5x^4$

(d) $f(x) = (x+2)^5$ (e) $f(x) = 3x^2 + 5\sqrt{x} - 2$

Λύσεις

$$\int_1^3 (x^4 - x^2 + 16) dx = x^5/5 - x^3/3 + 16x \Big|_1^3 = 3^5/5 - 3^3/3 + 16 \cdot 3 - (1^5/5 - 1^3/3 + 16 \cdot 1) = 243/5 - 9 + 48 - (1/5 - 1/3 + 16) = 108,6 + 39 - (0,20 - 0,33 + 16) = 147,6 - 15,87 = 132$$

$$\int_1^3 (x+2)^5 dx = \int_1^3 (x+2)^5 d(x+2) = (x+2)^6/6 \Big|_1^3 = (3+2)^6/6 - (1+2)^6/6 = (5^6 - 3^6)/6 = \dots$$

2. Να υπολογισθεί η το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ του άξονα των p και της συνάρτησης ζήτησης $Q(p) = -4p^2 + 6p + 80$ στα σημεία $p=3$ έως και $p=5$.
3. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τις καμπύλες των συναρτήσεων $Y = x^2$ και $Y = x$.
4. Μια εταιρεία ενοικίασης μοτοποδηλάτων, εκτιμά ότι το κόστος επισκευής και συντήρησης αυξάνει με το χρόνο. Η συνάρτηση του πρόσθετου κόστους $C(t)$ για κάθε χρόνο t , δίνεται από τη σχέση $C(t) = (1+2t)(t+t^2)^3$ για τιμές $0 < t < 7$. Ποιο είναι το συνολικό κόστος επισκευής και συντήρησης της εταιρείας στα τρία πρώτα χρόνια; Πόσο από το κόστος μπορεί να αντιστοιχηθεί σε κάθε μήνα για τα τρία πρώτα χρόνια;

Οικονομικές εφαρμογές ολοκληρωμάτων

- Συνάρτηση ολικού κόστους, ολικών εσόδων.
- Συνάρτηση κατανάλωσης από οριακή ροπή.
- Απόθεμα κεφαλαίου, επενδύσεις ως μεταβολή αποθέματος κεφαλαίου σε σχέση με το χρόνο.
- Πλεόνασμα καταναλωτή
- Πλεόνασμα παραγωγού