

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Έννοια συνάρτησης δύο μεταβλητών
- Ισοϋψείς καμπύλες
- Ασκήσεις

Βασικές έννοιες

- Στην Οικονομία, τα περισσότερα από τα μετρούμενα μεγέθη, εξαρτώνται από άλλα μεγέθη.
Π.χ η ζήτηση από την τιμή, το κόστος από το κεφάλαιο και την εργασία, οι δαπάνες από τα διαθέσιμα και τις ανάγκες, κλπ.
- Την εξάρτηση αυτή μεταξύ δύο μεγεθών, στα μαθηματικά την ονομάζουμε συνάρτηση του ενός μεγέθους σε σχέση με το άλλο ή τα άλλα μεγέθη.
Ονομάζουμε λοιπόν στα μαθηματικά συνάρτηση μιας μεταβλητής ή συνάρτηση πολλών μεταβλητών αντίστοιχα.

συμβολισμός

- Οι συναρτήσεις συμβολίζονται με ένα αγγλικό γράμμα, ακολουθούμενο από μια παρένθεση, μέσα στην οποία γράφονται τα μεγέθη που επηρεάζουν κάποιο άλλο μέγεθος. Το εξαρτώμενο μέγεθος (μόνο ένα!) εκφράζεται με το αποτέλεσμα της συνάρτησης.
- Π.χ. $F(x)$, $f(x,y)$, $g(z,v)$, $h(a,b,c)$ κλπ.
- η ζήτηση εξαρτώμενη από την τιμή, θα γραφεί σαν συνάρτηση $Q(p)$
- το κόστος εξαρτώμενο από το κεφάλαιο K και την εργασία L , θα γραφεί σαν συνάρτηση $C(K,L)$

Τύπος συνάρτησης

- Εκτός από τον συμβολισμό, σε μια συνάρτηση υπάρχει και η αναλυτική μαθηματική σχέση μεταξύ των μετρούμενων μεγεθών, η οποία λέγεται τύπος της συνάρτησης ή απλά επικράτησε να λέγεται «συνάρτηση».
- Ο μαθηματικός αυτός τύπος, μας βοηθάει να υπολογίσουμε την «τιμή» του εξαρτώμενου μεγέθους, αν γνωρίζουμε την τιμή των μεγεθών από τα οποία εξαρτάται. (αυτά ονομάζονται ανεξάρτητες μεταβλητές).

Παραδείγματα οικονομικών συναρτήσεων 2 μεταβλητών

- Κόστος παραγωγής (σε χρήματα)
- $C(K,L) = 0,10K + 30L$
- Κατανάλωση δύο αγαθών A και B (σε χρήματα)
- $C(A, B) = 30A + 15B$
- Χρησιμότητα από τα δύο αγαθά A και B (σε απόλαυση)
- $U(A,B) = 5A + 3B$

Πεδίο ορισμού

- Πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, ονομάζεται το αριθμητικό σύνολο που περιέχει όλες τις δυνατές τιμές των μεταβλητών της συνάρτησης, για τις οποίες μπορεί να γίνει υπολογισμός του «τύπου» της συνάρτησης, δηλαδή μπορεί να υπολογισθεί ή εξαρτημένη μεταβλητή της συνάρτησης.
- Συνήθως το πεδίο ορισμού κάθε μεταβλητής είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών εκτός και αν
 - οι μεταβλητές αφορούν οικονομικά μεγέθη που δεν μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές
 - κάποιες μεταβλητές είναι στον παρανομαστή, δεν μπορούν να υπολογισθούν όταν ο παρανομαστής γίνει 0.
 - κάποιες μεταβλητές είναι σε ρίζα ή σε λογάριθμο, δεν μπορούν να υπολογισθούν όταν η ποσότητα γίνει αρνητική

Παραδείγματα για πεδίο ορισμού

α) Αν $f(x, y) = 3x - 7y$ τότε το πεδίο ορισμού είναι

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

β) Αν $f(x, y) = 1/(x-y)$ τότε το πεδίο ορισμού είναι

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y\}$$

γ) Αν $f(x, y, z) = 1/(x+y+z)$ τότε το πεδίο ορισμού είναι

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z \neq 0\}$$

δ) Αν $f(x, y, z) = \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}$ τότε το πεδίο ορισμού είναι

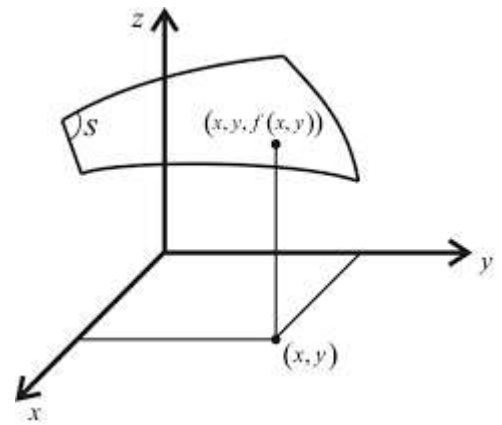
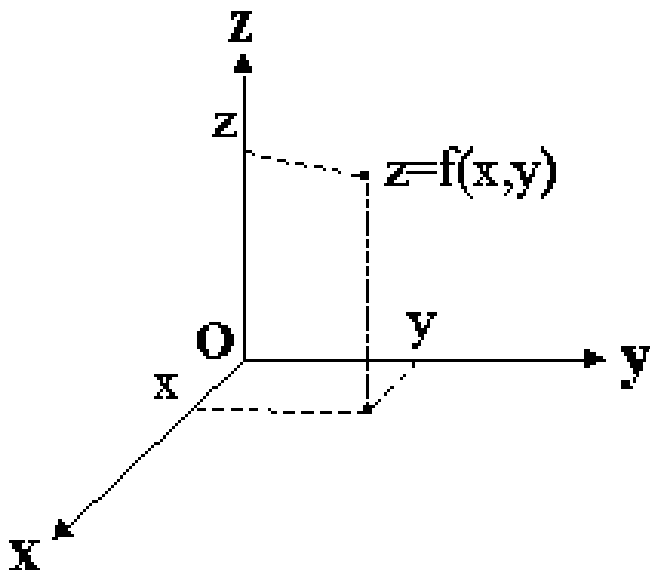
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

Γραφική παράσταση

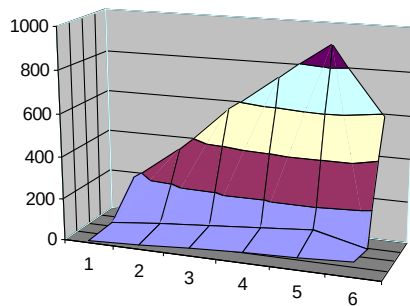
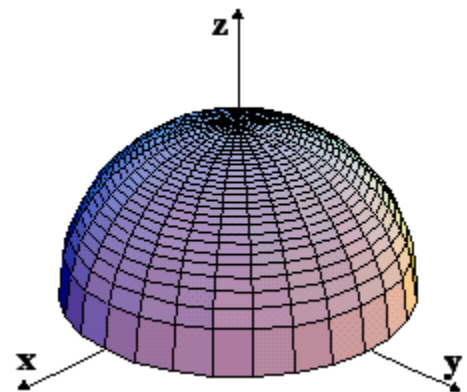
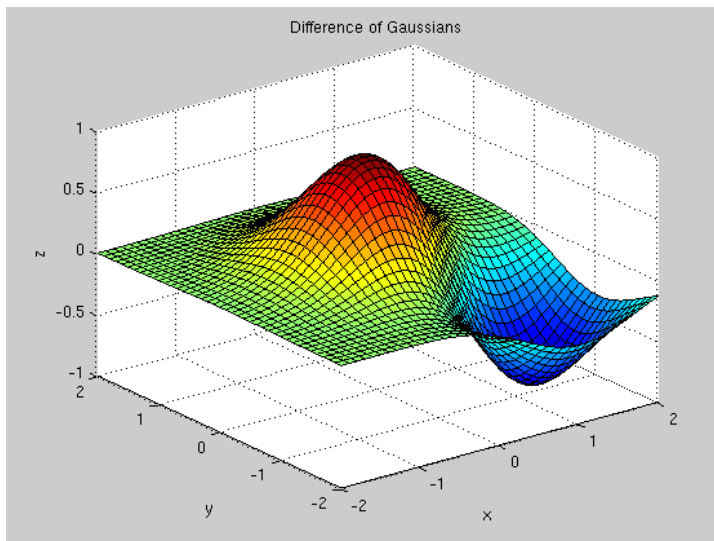
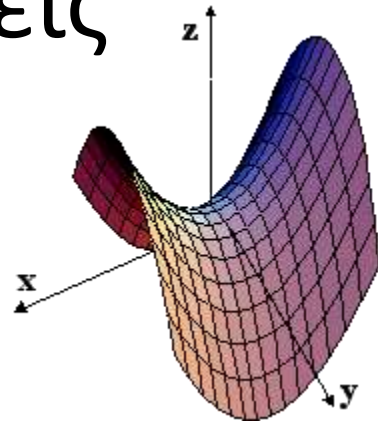
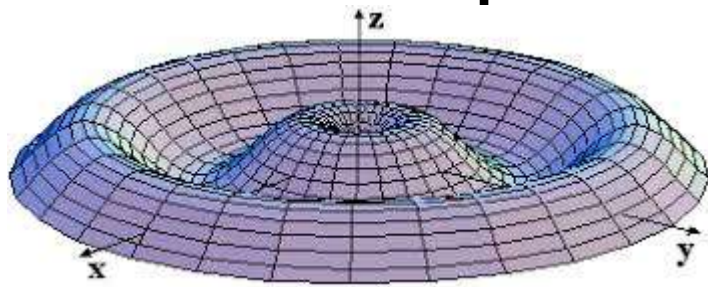
Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης δύο μεταβλητών γίνεται σε τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (τρεις άξονες x, y, z κάθετοι ανά δύο που τέμνονται σε ένα σημείο).

Σ' αυτό παριστάνουμε τριάδες (x, y, z) , όπου το z υπολογίζεται από

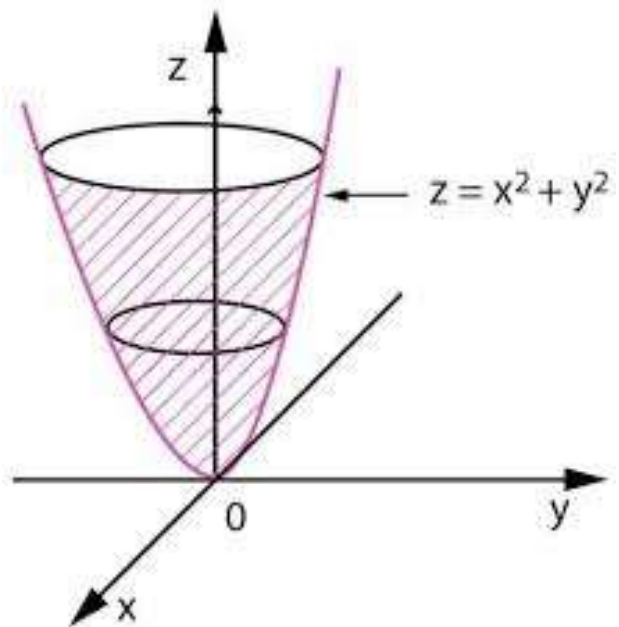
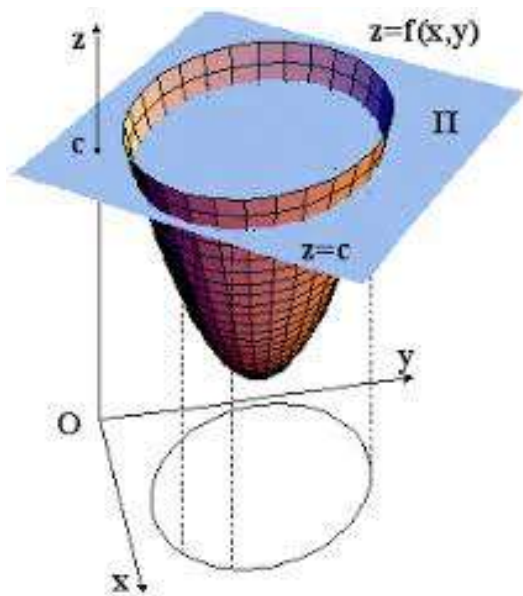
$z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, και D είναι το πεδίο ορισμού της f .



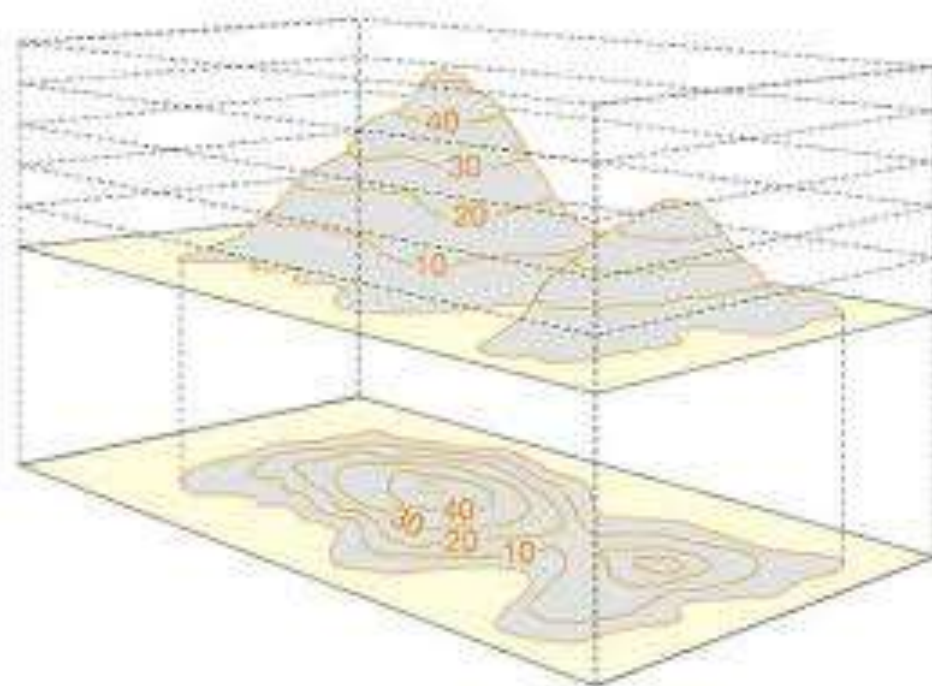
Διάφορες γραφικές παραστάσεις



Οριζόντια τομή γραφικής παράστασης



- Αν θεωρήσουμε $z=k$ σταθερά, τότε έχουμε μια σχέση $f(x,y)=k$ με τις δύο μόνο μεταβλητές x , y .
- Η σχέση αυτή κάποιες φορές μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο xy .



Ισοϋψής καμπύλη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του εδάφους, τα οποία έχουν το ίδιο υψόμετρο.

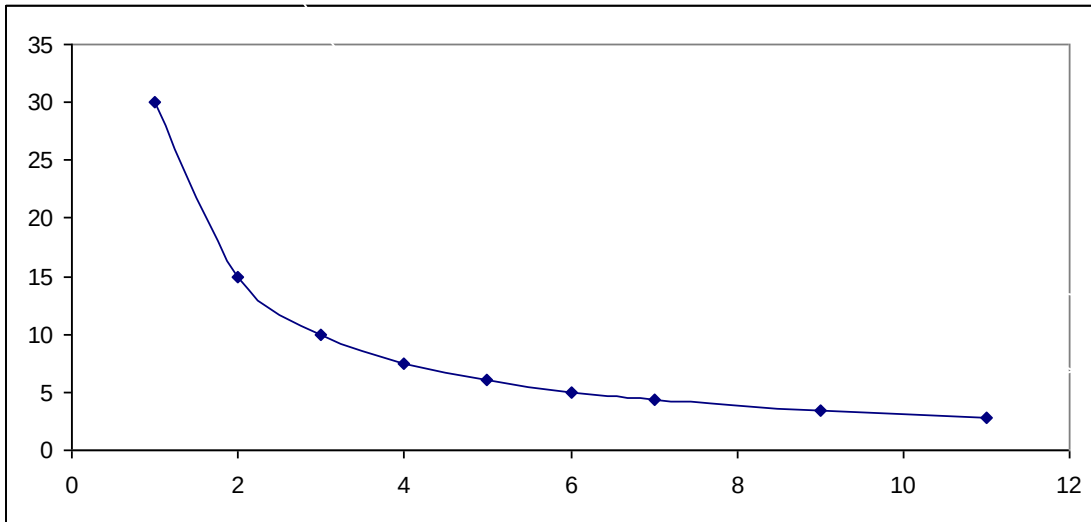
Για τις τρέχουσες τοπογραφικές εργασίες, οι ισοϋψείς καμπύλες, προκύπτουν από την τομή της επιφάνειας του εδάφους με ισαπέχοντα οριζόντια επίπεδα.



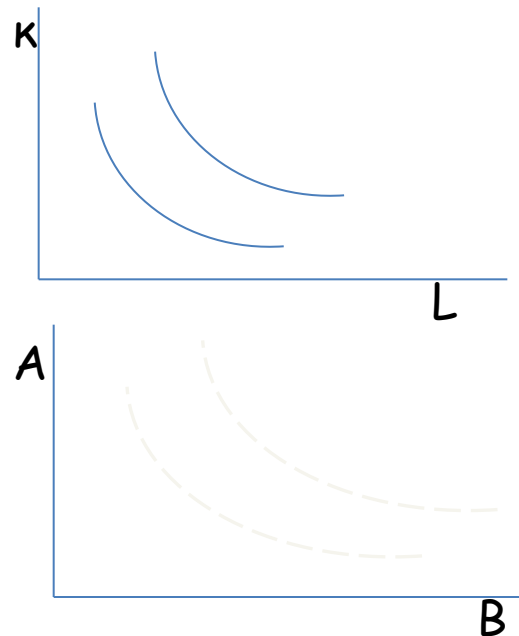
Ισοϋψείς καμπύλες

- Όταν περιορίζουμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών να είναι ίση με μια σταθερή τιμή k , δημιουργείται μια καμπύλη στο επίπεδο, η οποία ονομάζεται ισοψής, γιατί η τιμή της είναι πάντα ίση με την σταθερή τιμή k .
- Στις οικονομικές εφαρμογές, πολλές φορές μας ενδιαφέρουν οι συναρτήσεις δύο μεταβλητών, οι οποίες έχουν την ίδια σταθερή τιμή, αλλά με διαφορετικούς συνδυασμούς των δύο μεταβλητών.
- Αν πρόκειται για συνάρτηση χρησιμότητας, κάθε ισοϋψής καμπύλη ονομάζεται **καμπύλη αδιαφορίας**.
- Στην περίπτωση συνάρτησης παραγωγής, κάθε ισοϋψής καμπύλη ονομάζεται καμπύλη **ίσου προϊόντος**.

Γράφημα ισοϋψών καμπυλών



- Στο παραπάνω γράφημα παρουσιάζεται με μπλε η καμπύλη $\ln(x_1 * x_2) = 3,40$
- και οι καμπύλες που βρίσκονται δεξιά παρουσιάζουν τις $\ln(x_1 * x_2) = 5,60$ και $\ln(x_1 * x_2) = 7$
- Π.χ. συνάρτηση παραγωγής
- ίση με 1000 ή 1200 σε σχέση με Κεφάλαιο και Εργασία
- Συνάρτηση χρησιμότητας
- καταναλωτή ίση με 2000 ή 2500
- σε σχέση με τις ποσότητες αγαθού Α και αγαθού Β.



παράδειγμα

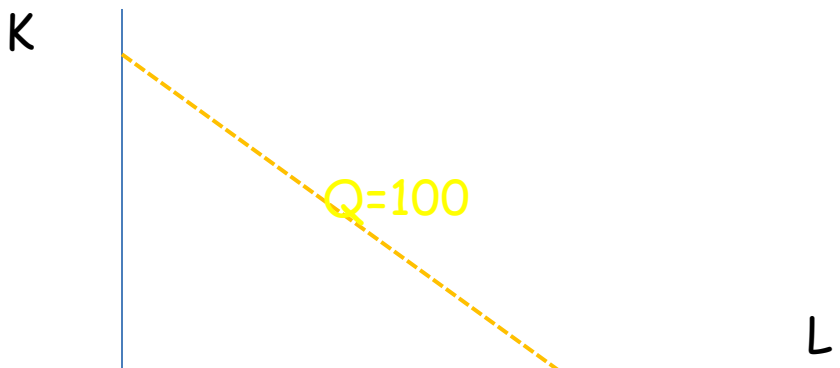
Έστω η συνάρτηση παραγωγής $Q(K,L)$
η οποία έχει τύπο $Q(K,L)$
 $=0,05K+20L$.

Βρείτε τη ισοϋψή καμπύλη όπου η
παραγωγή είναι 100 μονάδες. Τι
σχήμα θα έχει στο επίπεδο;

Λύση

Η ισοϋψής θα βρεθεί από την εξίσωση
 $Q(K,L) = 100$ και θα είναι
 $0,05K+20L=100$

Πρόκειται για εξίσωση ευθείας
γραμμής στο επίπεδο των K, L



παράδειγμα

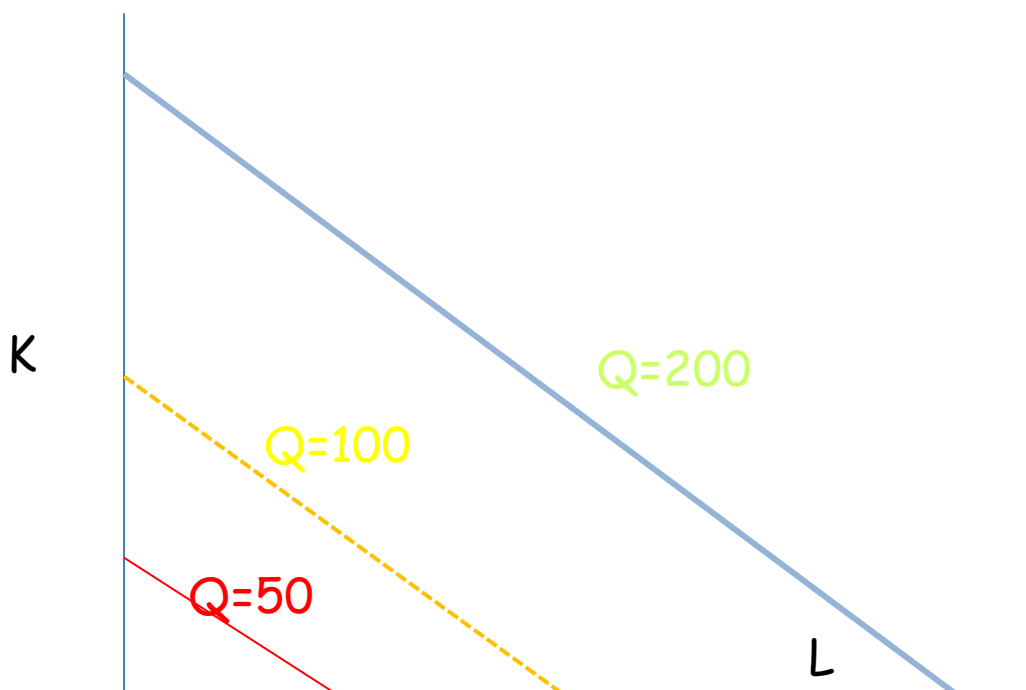
Έστω η συνάρτηση παραγωγής $Q(K,L)$ η οποία έχει τύπο $Q(K,L) = 0,05K + 20L$.

Βρείτε τη ισοϋψή καμπύλη όπου η παραγωγή είναι 50 μονάδες, καθώς και όταν είναι 200 μονάδες. Τι σχήμα θα έχει στο επίπεδο;

Λύση

Η πρώτη ισοϋψής θα βρεθεί από την εξίσωση $Q(K,L) = 50$ και θα είναι $0,05K + 20L = 50$

Η δεύτερη θα είναι $0,05K + 20L = 200$



Μετατροπή ισοϋψών σε συνάρτηση μιας μεταβλητής και Παραγωγή

Κάθε ισοϋψής καμπύλη μιας
συνάρτησης δύο μεταβλητών,
αντιστοιχεί σε μια εξίσωση μεταξύ
των δύο μεταβλητών.

Μπορεί να επιλυθεί ως προς την μία
μεταβλητή και να θεωρηθεί σαν
συνάρτηση της μιας μεταβλητής σε
σχέση με τη δεύτερη. Από τη
συνάρτηση αυτή της μιας
μεταβλητής μπορούμε να βρούμε
την παράγωγό της και το ρυθμό
μεταβολής της.

οριακός λόγος υποκατάστασης

- Η κλίση των ισοϋψών καμπυλών σε κάποιο σημείο, υπολογίζεται με την παράγωγο, συμβολίζεται με dy/dx κι ονομάζεται **οριακός λόγος υποκατάστασης μεταξύ του y και x**
- Δείχνει με ποιο τρόπο πρέπει να αντικαταστήσουμε την ποσότητα x με ποσότητα y , ώστε να είμαστε πάνω στην ίδια ισοϋψή.

παράδειγμα

Για η συνάρτηση παραγωγής $Q(K,L)$ η οποία έχει τύπο $Q(K,L) = 0,05K + 20L$,

Βρείτε για την ισοϋψή καμπύλη όπου η παραγωγή είναι 100 μονάδες, τον οριακό λόγο υποκατάστασης του dK/dL .

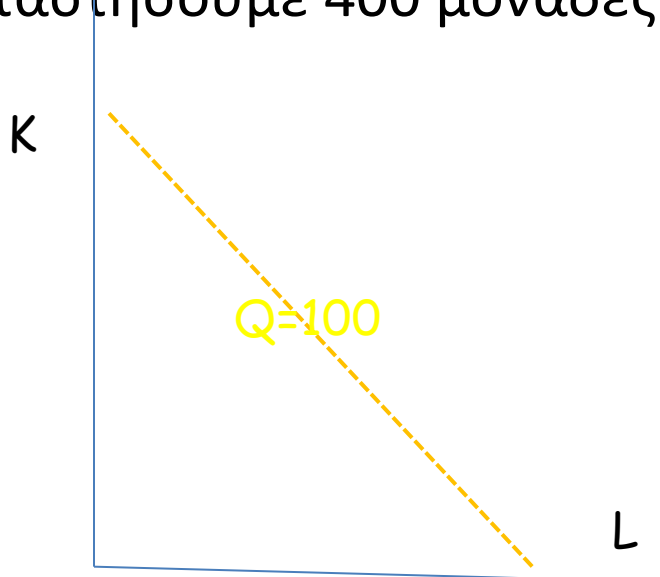
Λύση

Η ισοϋψής θα είναι $0,05K + 20L = 100 \Leftrightarrow$

$0,05K = 100 - 20L \Leftrightarrow K = (100 - 20L)/0,05 \Leftrightarrow K = 2000 - 400L$

$dK/dL = -400$

Χρειαζόμαστε 1 μονάδα εργασίας L , για να υποκαταστήσουμε 400 μονάδες κεφαλαίου K



παράδειγμα

Για η συνάρτηση παραγωγής $Q(K,L)$ η οποία έχει τύπο $Q(K,L) = K^{1/2} * L^{1/2}$,

Βρείτε για την ισοϋψή καμπύλη όπου η παραγωγή είναι 100 μονάδες, τον οριακό λόγο υποκατάστασης του dK/dL .

Λύση

Η ισοϋψής θα είναι $K^{1/2} * L^{1/2} = 100 \Leftrightarrow$

$$K^{1/2} = 100/L^{1/2} \Leftrightarrow K = 100^2/L$$

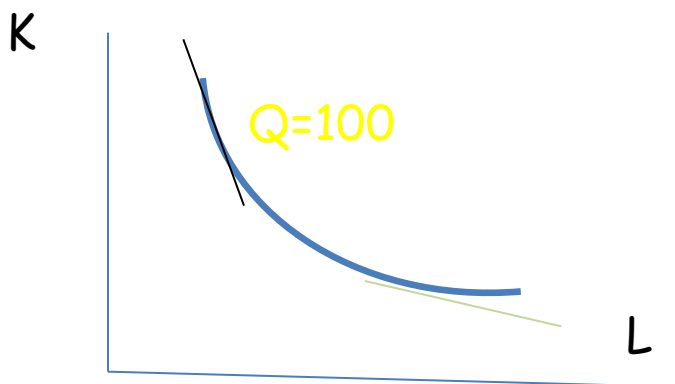
$$dK/dL = -100^2/L^2$$

Ο οριακός λόγος υποκατάστασης δεν είναι σταθερός, αλλά εξαρτάται από την τιμή του L .

Αν $L=10$ τότε $dK/dL = -100^2/10^2 = -100$

χρειαζόμαστε 1 μονάδα εργασίας L , για να υποκαταστήσουμε 100 μονάδες κεφαλαίου K

Αν $L=50$ τότε $dK/dL = -100^2/50^2 = -4$ χρειαζόμαστε 1 μονάδα εργασίας L , για να υποκαταστήσουμε 4 μονάδες κεφαλαίου K



ασκήσεις

1. Να βρείτε την κλίση dy/dx των παρακάτω ισοϋψών καμπυλών:

$f(x,y)=x^{-2}y$ όταν $f(x,y)=3$ στο σημείο $(1,3)$

$g(x,y)=x^2+xy$ όταν $g(x,y)=18$ στο σημείο $(3,3)$

2. Ένα προϊόν Q παράγεται με εργασία L και κεφάλαιο K , με τη σχέση $Q=L^{1/2}K^{1/4}$. Να υπολογίσετε τον οριακό λόγο υποκατάστασης πάνω στην καμπύλη ίσου προϊόντος $Q=3$, όταν χρησιμοποιείται 1 μονάδα κεφαλαίου και 9 μονάδες εργασίας.

ασκήσεις

3. Μια επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα κ και λ , τα οποία πωλούνται προς 27 και 26 ευρώ η κάθε μονάδα αντίστοιχα. Το κόστος παραγωγής των δύο προϊόντων δίνεται από τη συνάρτηση

$$C(\kappa, \lambda) = \kappa^2 + 3\kappa\lambda + 2\lambda^2 - 50$$

- Γράψτε τη συνάρτηση κέρδους ως συνάρτηση του κ και λ .
- Υπολογίστε την ισοϋψή, όταν το κέρδος θέλουμε να είναι 300 μονάδες.
- Ποιος θα είναι ο οριακός λόγος υποκατάστασης του κ ως προς λ στην ισοϋψή αυτή;

4. Δύο επιχειρήσεις παράγουν το ίδιο προϊόν και το διαθέτουν στην αγορά με την ίδια τιμή p . Η πρώτη παράγει ποσότητα Q_1 και η δεύτερη ποσότητα Q_2 . Η συνάρτηση ζήτησης είναι $p = 10 - 0,1 \cdot (Q_1 + Q_2)$.

Το κόστος της πρώτης είναι $C_1(Q_1) = 0,25Q_1$ και το κόστος της δεύτερης $C_2(Q_2) = 0,5Q_2$.

Γράψτε τη συνάρτηση κερδών, ξεχωριστά για την κάθε επιχείρηση.

Ποια συνθήκη θα πρέπει να ισχύει για τα Q_1 και Q_2 ώστε οι δύο επιχειρήσεις να έχουν ίσα κέρδη;