

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Παραγωγή συνάρτησης πολλών μεταβλητών
- Μερικές παράγωγοι πρώτου και δευτέρου βαθμού
- Ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών
- Ασκήσεις

μερική παράγωγος

- Στην περίπτωση συναρτήσεων με πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές υπολογίζουμε μια παράγωγο συνάρτηση για κάθε μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές όταν οι άλλες θεωρούνται σταθερές.
- Κάθε τέτοια παράγωγος συνάρτηση ονομάζεται **μερική παράγωγος**. Συμβολίζεται με ειδικό σύμβολο ∂ ακολουθούμενο από το σύμβολο της συνάρτησης με μια κάθετη γραμμή ακολουθούμενη από ∂ και το όνομα της ανεξάρτητης μεταβλητής.

(π.χ. $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$, $\partial f / \partial v$).

Άλλος τρόπος συμβολισμού είναι με ένα δείκτη στο σύμβολο της συνάρτησης. (π.χ. f_x , f_y , f_v)

- Η μερική παράγωγος εκφράζει το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής, που οφείλεται σε μεταβολή μιας από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, ενώ οι υπόλοιπες ανεξάρτητες μεταβλητές παραμένουν σταθερές.
- **Σημείωση:** Η μερική παράγωγος είναι και αυτή συνάρτηση, στην οποία μπορούμε να αντικαταστήσουμε διάφορες τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών, και να υπολογίσουμε την τιμή του ρυθμού μεταβολής για τις τιμές αυτές.

Μερική παράγωγος δευτέρου βαθμού

- Αν έχουμε υπολογίσει τη μερική παράγωγο, μπορούμε να ξαναυπολογίσουμε μερική παράγωγο για τη συνάρτηση της μερικής παραγώγου, οπότε προκύπτει η **μερική παράγωγος δευτέρου βαθμού** της αρχικής συνάρτησης.
- Συμβολίζεται με ειδικό σύμβολο ∂^2 ακολουθούμενο από το σύμβολο της συνάρτησης με μια κάθετη γραμμή ακολουθούμενη από ∂ και το όνομα της ανεξάρτητης μεταβλητής ή των ανεξάρτητων μεταβλητών.

(π.χ. $\partial^2 f / \partial x^2$, $\partial^2 f / \partial y^2$, $\partial^2 f / \partial x \partial y$, $\partial^2 f / \partial y \partial x$).

- Άλλος τρόπος συμβολισμού είναι με διπλό δείκτη στο σύμβολο της συνάρτησης. (π.χ. f_{xx} , f_{yy} , f_{xy} , f_{yx})

Υπολογισμός μερικής παραγώγου

- Στην πράξη, για να βρούμε τη μερική παράγωγο μίας συνάρτησης ως προς μία ανεξάρτητη μεταβλητή, κρατάμε σταθερές όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές εκτός από αυτή για την οποία θέλουμε να βρούμε τη μερική παράγωγο και
- παραγωγίζουμε ως προς αυτή με βάση τους κανόνες παραγωγίσισης που ισχύουν για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Ασκήσεις μερικών παραγώγων

- Να βρεθούν όλες οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων:

1) $f(x, y) = x^2 - x^2y + 4xy - y$

2) $f(x, y) = x \ln y - x + \sin x + xy$

3) $f(x, y) = \ln x + \sin y + 2xy$

- 4) Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση
 $f(x, y) = \ln(x^2 + 3xy + y^2)$ ισχύει
 $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2.$

Ασκήσεις μερικών παραγώγων

- Να βρεθούν όλες οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$1) \quad f(x, y) = x^2 - x^2y + 4xy - y$$

πρωτες μερικές παράγωγοι

$$f_x = \partial f / \partial x = 2x - 2yx + 4y$$

$$f_y = \partial f / \partial y = -x^2 + 4x - 1$$

Δεύτερες μερικές παράγωγοι

$$f_{xx} = \partial^2 f / \partial x^2 = 2 - 2y$$

$$f_{yy} = \partial^2 f / \partial y^2 = 0$$

$$f_{xy} = \partial^2 f / \partial x \partial y = -2x + 4$$

$$f_{yx} = \partial^2 f / \partial y \partial x = -2x + 4$$

Ασκήσεις μερικών παραγώγων

- Να βρεθούν όλες οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$2) f(x, y) = x \eta \mu y - x + \sigma \upsilon \nu x + x y$$

πρωτες μερικές παράγωγοι

$$f_x = \partial f / \partial x = \eta \mu y - 1 - \eta \mu x + y$$

$$f_y = \partial f / \partial y = x \sigma \upsilon \nu y + x$$

Δεύτερες μερικές παράγωγοι

$$f_{xx} = \partial^2 f / \partial x^2 = -\sigma \upsilon \nu x$$

$$f_{yy} = \partial^2 f / \partial y^2 = x \eta \mu y$$

$$f_{xy} = \partial^2 f / \partial x \partial y = \sigma \upsilon \nu y + 1$$

$$f_{yx} = \partial^2 f / \partial y \partial x = \sigma \upsilon \nu y + 1$$

Λύσεις ασκήσεων μερικών παραγώγων

1) $\partial f / \partial x = 2x - 2xy + 4y$

- $\partial^2 f / \partial x^2 = 2 - 2y$
- $\partial f / \partial y = -x^2 + 4x - 1$
- $\partial^2 f / \partial y^2 = 0$
- $\partial^2 f / \partial y \partial x = -2x + 4$

2) $\partial f / \partial x = \eta\mu y - 1 - \eta\mu x + y$,

- $\partial f / \partial y = x \sigma\upsilon\nu y + x$,
- $\partial^2 f / \partial y \partial x = \sigma\upsilon\nu y + 1$
- $\partial^2 f / \partial x \partial y = \sigma\upsilon\nu y + 1$

- $\ln x + \sigma\upsilon\nu y + 2xy$

3) $\partial f / \partial x = 1/x + 2y$, $\partial^2 f / \partial x^2 = -1/x^2$

- $\partial f / \partial y = -\eta\mu y + 2x$, $\partial^2 f / \partial y^2 = -\sigma\upsilon\nu y$
- $\partial^2 f / \partial x \partial y = 2$
- $\partial^2 f / \partial y \partial x = 2$

$f(x, y) = \ln(x^2 + 3xy + y^2)$ ισχύει $x \partial f / \partial x + y \partial f / \partial y = 2$

4) $\partial f / \partial x = (2x + 3y) / (x^2 + 3xy + y^2)$

- $\partial f / \partial y = (3x + 2y) / (x^2 + 3xy + y^2)$
- Αντικαθιστώντας στη ζητούμενη σχέση έχουμε
- $x \partial f / \partial x + y \partial f / \partial y = x(2x + 3y) / (x^2 + 3xy + y^2) + y(3x + 2y) / (x^2 + 3xy + y^2) =$
- $= (2x^2 + 3xy + 3xy + 2y^2) / (x^2 + 3xy + y^2) = 2(x^2 + 3xy + y^2) / (x^2 + 3xy + y^2) = 2$

$$f(x, y) = \ln (x^2 + 3xy + y^2)$$

$$\text{ισχύει } x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) * g'(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x + 3y) / (x^2 + 3xy + y^2)$$

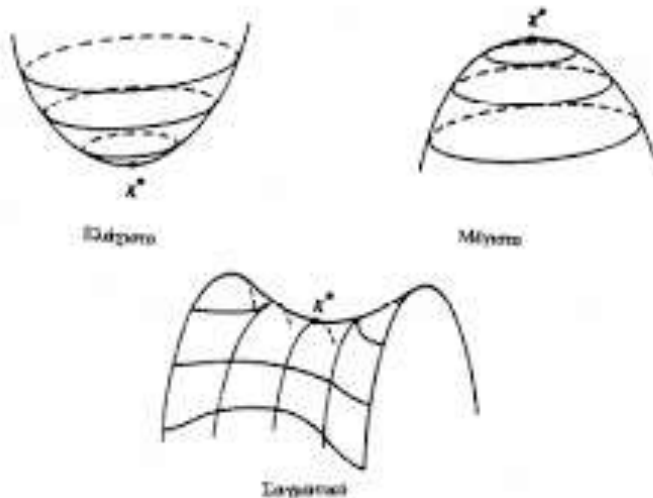
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (3x + 2y) / (x^2 + 3xy + y^2)$$

Αντικαθιστώντας στη ζητούμενη σχέση έχουμε

- $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} =$
- $x (2x + 3y) / (x^2 + 3xy + y^2) +$
- $y (3x + 2y) / (x^2 + 3xy + y^2) =$
- $= (2x^2 + 3xy + 3xy + 2y^2) / (x^2 + 3xy + y^2) =$
- $2(x^2 + 3xy + y^2) / (x^2 + 3xy + y^2) = 2$

Μέγιστο ελάχιστο ή σαγματικό σημείο;

- Παρακάτω βλέπετε γραφικές παραστάσεις 3 διαφορετικών συναρτήσεων δύο μεταβλητών
- Εντοπίστε αν υπάρχει σημείο μέγιστο ή ελάχιστο



ακρότατα

Για να βρούμε τα ακρότατα μίας συνάρτησης δύο μεταβλητών εργαζόμαστε ως εξής:

Λύνουμε το σύστημα $f_x = 0$ και $f_y = 0$.

Έστω το σημείο (x_0, y_0) είναι μία λύση του συστήματος.

Υπολογίζουμε την ποσότητα $D(x_0, y_0)$

$$D(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right]^2$$

και διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Πρόσημο D	Πρόσημο δεύτερης μερικής παραγώγου	Ακρότατο σημείο (x_0, y_0)
$D(x_0, y_0) > 0$	$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$, $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} < 0$	Τοπικό μέγιστο
	$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$, $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} > 0$	Τοπικό ελάχιστο
$D(x_0, y_0) < 0$		Αυχενικό ή σαγματικό σημείο
$D(x_0, y_0) = 0$		Κανένα συμπέρασμα

Παράδειγμα ακρότατα

Έστω $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα αυτής.

Λύση:

Με τους κανόνες μερικής παραγώγισης:

$$f_x = 2x,$$

$$f_y = 2y,$$

$$f_{xx} = (f_x)' = 2$$

$$f_{yy} = (f_y)' = 2 \text{ και}$$

$$f_{yx} = 0, \quad f_{xy} = 0.$$

- Λύνουμε το σύστημα

$f_x = 0$ και $f_y = 0 \Leftrightarrow 2x = 0$ και $2y = 0 \Leftrightarrow (x_0, y_0) = (0, 0)$ είναι το πιθανό σημείο για ακρότατο

- Υπολογίζουμε την

$$D(0,0) = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy} * f_{yx} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} * \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} - [\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}]^2 = 2 * 2 - 0 = 4$$

- Και επειδή
- $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 2 > 0, \quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 2 > 0$

$$D(0,0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου με τιμή $f(0,0) = 1$.

Ασκήσεις ακρότατα

(1) Έστω $f(x, y) = xe^y$.
Να δείξετε ότι $xf'_x - f'_y = 0$.

Λύση: Είναι $xf'_x - f'_y = x e^y - x e^y = 0$.

(2) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της
 $f(x, y) = -x^2 - y^2 + xy - x - 1$.

Λύση: Είναι

$$f'_x = -2x + y - 1,$$

$$f'_y = -2y + x,$$

$$f''_{xx} = -2 \quad f''_{yy} = -2, \quad f'_{yx} = 1.$$

Άρα:

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow -2x + y - 1 = 0 \quad \text{και} \quad f'_y = 0 \Leftrightarrow -2y + x = 0$$

$(-2/3, -1/3)$ η λύση και το πιθανό σημείο ακροτάτου

$$D_{(-2/3, -1/3)} = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$D = \partial^2 f(-2/3, -1/3) / \partial x^2 \cdot \partial^2 f(-2/3, -1/3) / \partial y^2 - [\partial^2 f(-2/3, -1/3) / \partial x \partial y]^2 =$$

$$= (-2)(-2) - 1^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \text{και}$$

$$\partial^2 f(-2/3, -1/3) / \partial x^2 = -2 < 0,$$

$$\partial^2 f(-2/3, -1/3) / \partial y^2 = -2 < 0$$

- Επομένως το $(-2/3, -1/3)$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου με τιμή $f(-2/3, -1/3) = -2/3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τις ακόλουθες συναρτήσεις 2 μεταβλητών:

Να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι ως προς x και ως προς y .

Να βρεθούν πιθανά ακρότατα

$$1. \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$$

$$f_x = 2x + y + 3 \quad f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 1$$

$$f_y = x + 2y - 3 \quad f_{yx} = 1 \quad f_{yy} = 2$$

$$D = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$$

Πρέπει να βρούμε τη λύση του συστήματος

$$f_x = 2x + y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$f_y = x + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow -2x - 4y + 6 = 0 \Leftrightarrow -3y + 9 = 0 \Leftrightarrow 3y = 9 \Leftrightarrow y = 3$$

στο σημείο $(-3, 3)$ έχω ελάχιστο που είναι $f(-3, 3) = 9 - 9 + 9 - 9 - 9 + 4 = -5$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για τις ακόλουθες συναρτήσεις 2 μεταβλητών:

Να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι ως προς x και ως προς y .

Να βρεθούν πιθανά ακρότατα

2. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6,$

3. $f(x, y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2,$

4. $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4,$

5. $f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5,$

6. $f(x, y) = y^2 + xy - 2x - 2y + 2,$

7. $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4,$

8. $f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4,$

9. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3y + 3,$

10. $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 7y^2 - 2x + 4y,$

11. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y,$

12. $f(x, y) = 4x^2 - 6xy + 5y^2 - 20x + 26y,$

13. $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 5x - 2y,$

14. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6,$

15. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6,$

16. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1,$

17. $f(x, y) = x^2 + 2xy,$

18. $f(x, y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2,$

19. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - 4y + 5,$

20. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4.$

ασκήσεις

Μια επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα κ και λ , τα οποία πωλούνται προς 27 και 26 ευρώ η κάθε μονάδα αντίστοιχα. Το κόστος παραγωγής των δύο προϊόντων δίνεται από τη συνάρτηση

$$C = \kappa^2 + 3\kappa\lambda + 2\lambda^2 - 50$$

- Γράψτε τη συνάρτηση κέρδους
- Έχει η συνάρτηση κέρδους μέγιστο ή ελάχιστο;

Δύο επιχειρήσεις παράγουν το ίδιο προϊόν και το διαθέτουν στην αγορά με την ίδια τιμή p . Η πρώτη παράγει ποσότητα Q_1 και η δεύτερη ποσότητα Q_2 . Η συνάρτηση ζήτησης είναι $p = 10 - 0,1 \cdot (Q_1 + Q_2)$.

Το κόστος της πρώτης είναι $C_1 = 0,25Q_1$ και το κόστος της δεύτερης $C_2 = 0,5Q_2$.

Γράψτε τη συνάρτηση κερδών για την κάθε επιχείρηση.

Βρείτε αν υπάρχει μέγιστο ή ελάχιστο κέρδος.