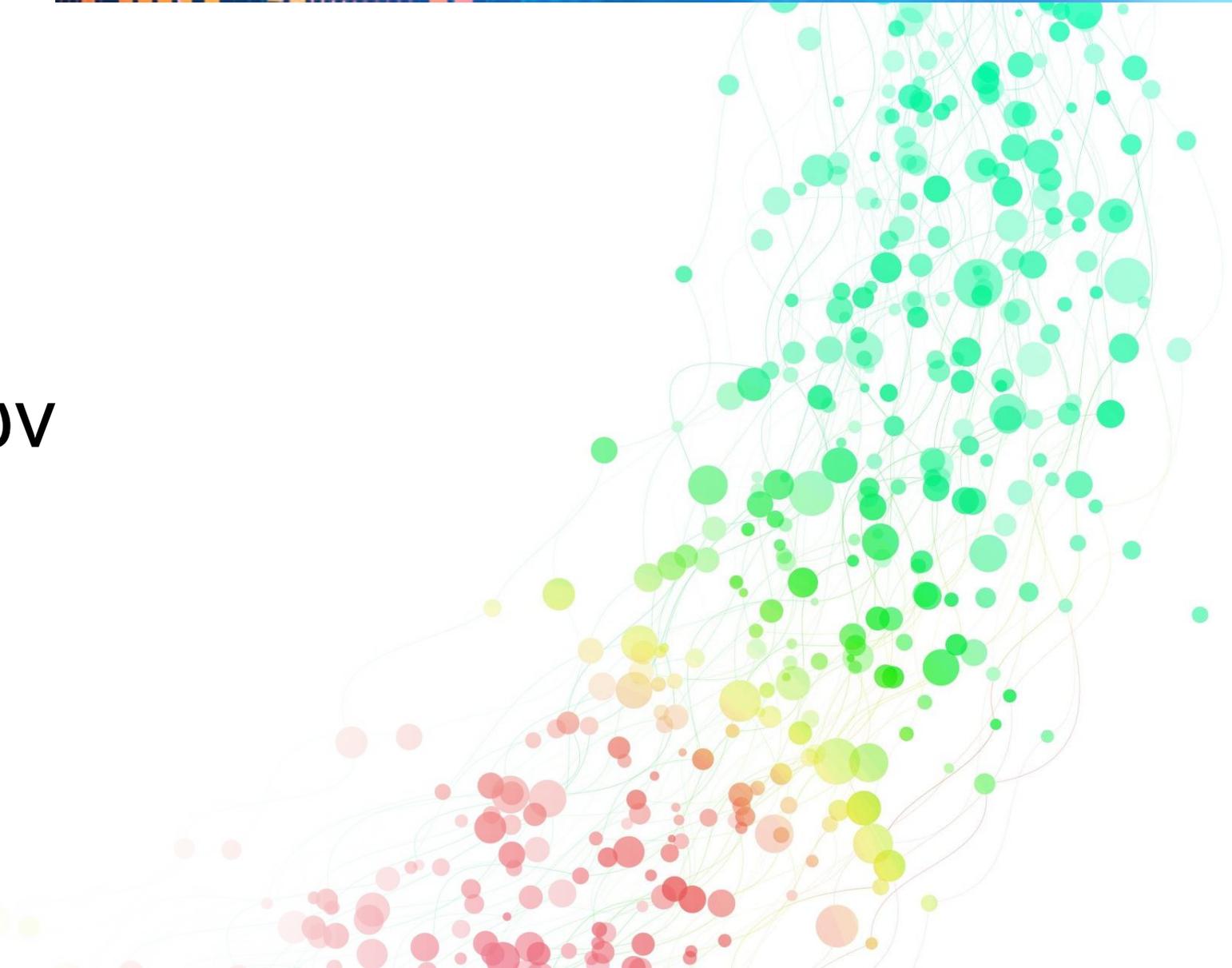


Βασικές Αρχές Αγορών Ομολόγων



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Διάρκεια (Duration) & Τύποι Διάρκειας
2. Κυρτότητα (Convexity)
3. Συνδιασμός Διάρκειας & Κυρτότητας
4. Χαρτοφυλάκιο Ομολόγων
5. Ιδιότητες Διάρκειας
6. Ιδιότητες Κυρτότητας
7. Παραδείγματα και Ασκήσεις

ΣΧΕΣΗ ΤΙΜΗΣ ΟΜΟΛΟΓΩΝ - ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ – ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΣΤΗ ΛΗΞΗ

- Υπάρχει μια αντίστροφη σχέση μεταξύ της τιμής του ομολόγου και της απόδοσης στη λήξη, όταν οι άλλοι παράγοντες παραμένουν σταθεροί. Δηλαδή, όσο υψηλότερη είναι η απόδοση του ομολόγου στη λήξη, τόσο χαμηλότερη είναι η τιμή του.
- Εναλλακτικά, όσο υψηλότερη είναι η τιμή του ομολόγου, τόσο χαμηλότερη είναι η απόδοση στη λήξη. Έτσι, οι επενδυτές που αναμένουν ότι τα επιτόκια θα μειωθούν αναμένουν θετική απόδοση από την αύξηση των τιμών των ομολόγων.
- Η σχέση τιμής - απόδοσης δεν είναι γραμμική. Για ένα ομόλογο χωρίς ενσωματωμένα δικαιώματα η σχέση είναι κυρτή (convex).

ΣΧΕΣΗ ΤΙΜΗΣ ΟΜΟΛΟΓΩΝ - ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ – ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΣΤΗ ΛΗΞΗ

- Η τιμή ομολόγων αλλάζει βάσει των μεταβολών των επιτοκίων της αγοράς.
- Η τιμή της αγοράς ομολόγων είναι η παρούσα αξία όλων των μελλοντικών πληρωμών.
- Η σχέση επιτοκίων και τιμής ομολόγων είναι **αντίστροφη**. Υπάρχει μια αντίστροφη σχέση μεταξύ της τιμής του ομολόγου και της απόδοσης στη λήξη, όταν όλα οι άλλοι παράγοντες διατηρούνται σταθεροί.
- Όσο υψηλότερη είναι η απόδοση στη λήξη, τόσο χαμηλότερη είναι η τιμή του ομολόγου. Εναλλακτικά, όσο υψηλότερη είναι η τιμή του ομολόγου, τόσο χαμηλότερη είναι η απόδοση στη λήξη. Έτσι, οι επενδυτές που αναμένουν ότι τα επιτόκια θα μειωθούν αναμένουν θετική απόδοση από την αύξηση των τιμών των ομολόγων.
- Γενικά (=σημαίνει όχι πάντα, υπάρχουν εξαιρέσεις), όταν αναμένεται άνοδος επιτοκίων (πτώση) επιλέγονται τα Β/Π (Μ/Π) ομόλογα με υψηλό (χαμηλό) κουπόνι.

ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΛΗΚΤΟΤΗΤΑ (maturity structure of interest rates)

Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους οι απόδοση στην λήξη δύο ομολόγων είναι διαφορετικοί. Πιθανοί λόγοι για τη διαφορά μεταξύ των αποδόσεων είναι οι ακόλουθοι:

- **Νόμισμα:** Το ομόλογο μπορεί να έχει εκδοθεί σε νόμισμα με υψηλότερο αναμενόμενο ρυθμό πληθωρισμού.
- **Πιστωτικός κίνδυνος:** πχ επενδυτική βαθμίδα \neq μη επενδυτική βαθμίδα.
- **Ρευστότητα:** ενεργά διαπραγματεύσιμο \neq ελάχιστα διαπραγματεύσιμο.
- **Φορολογικό καθεστώς:** Το εισόδημα από τόκους μπορεί να είναι φορολογητέο ή να απαλλάσσεται από τη φορολογία.
- **Περιοδικότητα πληρωμών:** καταβολή ένα μόνο ετήσιου τοκομερίδιου (= περιοδικότητα ενός έτους) \neq εξαμηνιαίες πληρωμές τοκομεριδίων.

ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΛΗΚΤΟΤΗΤΑ (maturity structure of interest rates)

- Υπάρχει ακόμα ένας βασικός παράγοντας για τον οποίο δύο ομόλογα έχουν διαφορετική απόδοση στην λήξη.
- Αυτός ο παράγοντας που εξηγεί τις διαφορές στις αποδόσεις στην λήξη ονομάζεται **διάρθρωση της ληκτότητας (maturity structure)**, ή **δομή διάρκειας των επιτοκίων (term structure)**.
- Περιλαμβάνει την ανάλυση των καμπυλών απόδοσης, οι οποίες είναι οι σχέσεις μεταξύ των αποδόσεων στη λήξη και του χρόνου που μεσολαβεί μέχρι την λήξη.
- Υπάρχουν διαφορετικοί τύποι καμπυλών απόδοσης, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά των υποκείμενων ομολόγων.

ΠΕΡΙΘΩΡΙΑ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ (Yield Spreads)

- Το Περιθώριο Απόδοσης (yield spread) αφορά στην διαφορά απόδοσης μεταξύ διαφορετικών τίτλων σταθερού εισοδήματος (ομολόγων).
- Κατά την ανάλυση ομολόγων, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε γιατί οι τιμές των ομολόγων και οι αποδόσεις στη λήξη μεταβάλλονται. Για να γίνει αυτό, είναι χρήσιμο να διαχωρίσουμε την απόδοση στη λήξη σε δύο συνιστώσες: **το επιτόκιο αναφοράς (benchmark rate) και το περιθώριο (spread)**.
- Το επιτόκιο αναφοράς για ένα τίτλο σταθερού εισόδημα με δεδομένη χρονική διάρκεια προς την λήξη είναι το βασικό επιτόκιο αναφοράς, συχνά η απόδοση ενός κρατικού ομολόγου.
- Το περιθώριο είναι η διαφορά μεταξύ της απόδοσης στη λήξη και του επιτόκιου αναφοράς.

ΠΕΡΙΘΩΡΙΑ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ (Yield Spreads)

- Ο λόγος αυτού του διαχωρισμού είναι η διάκριση μεταξύ μακροοικονομικών και μικροοικονομικών παραγόντων που επηρεάζουν την τιμή του ομολόγου και, επομένως, την απόδοση στη λήξη.
- Ο δείκτης αναφοράς (**benchmark rate**) αποτυπώνει τους μακροοικονομικούς παράγοντες: το αναμενόμενο πληθωρισμό στο νόμισμα στο οποίο αποτιμάται το ομόλογο, τη γενική οικονομική ανάπτυξη και τον οικονομικό κύκλο, τις συναλλαγματικές ισοτιμίες και η επίδραση της νομισματικής και δημοσιονομικής πολιτικής.
- Οι μεταβολές αυτών των παραγόντων επηρεάζουν όλα τα ομόλογα στην αγορά και η επίδραση παρατηρείται κυρίως στις μεταβολές στην απόδοση του δείκτη αναφοράς.
- Το περιθώριο (**spread**) αποτυπώνει τους μικροοικονομικούς παράγοντες που αφορούν στον εκδότη του ομολόγου και το ίδιο το ομόλογο: τον πιστωτικό κίνδυνο του εκδότη και τις μεταβολές στην αξιολόγηση του ομολόγου, τη ρευστότητα και τη διαπραγμάτευση συγκρίσιμων τίτλων, και το φορολογικό καθεστώς του ομολόγου.
- Σημειώνεται ότι οι διαφορές αποδόσεων στην λήξη μεταξύ διαφορετικών εκδοτών μπορούν να διευρυνθούν και να στενέψουν ανάλογα με τις μεταβολές των μακροοικονομικών παραγόντων.

ΠΕΡΙΘΩΡΙΑ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ (Yield Spreads)

- Ο δείκτης αναφοράς (benchmark rate) ονομάζεται συχνά και επιτόκιο άνευ κινδύνου (risk-free rate).
- Επίσης, ο δείκτης αναφοράς μπορεί να αναλυθεί στο αναμενόμενο πραγματικό επιτόκιο και στο αναμενόμενο ρυθμό πληθωρισμού στην οικονομία.
- Το περιθώριο απόδοσης ονομάζεται και **ασφάλιστρο κινδύνου** έναντι της “άνευ κινδύνου” απόδοσης. Το ασφάλιστρο κινδύνου παρέχει στον επενδυτή αποζημίωση για τους πιστωτικό κίνδυνο και τους κινδύνους ρευστότητας και ενδεχομένως τις φορολογικές επιπτώσεις της κατοχής ενός συγκεκριμένου ομολόγου.

ΠΕΡΙΘΩΡΙΑ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ (Yield Spreads)

- Ο δείκτης αναφοράς (benchmark rate) διαφοροποιείται στις διάφορες χρηματοπιστωτικές αγορές.
- Ομόλογα σταθερού επιτοκίου συχνά χρησιμοποιούν ένα κρατικό αξιόγραφο αναφοράς με την ίδια χρονική διάρκεια, λήξη, ή το πλησιέστερο στο χρόνο έως τη λήξη με το συγκεκριμένο ομόλογο.
- Αυτό το σημείο αναφοράς είναι συνήθως το πιο προσφάτως εκδοθέν κρατικό ομόλογο και ονομάζεται on-the-run. Άρα το on-the-run κρατικό ομόλογο είναι το πιο ενεργά διαπραγματεύσιμο χρεόγραφο και έχει επιτόκιο κουπονιού πιο κοντά στο τρέχον επιτόκιο προεξόφλησης της αγοράς για τη συγκεκριμένη λήξη. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή του είναι κοντά στην ονομαστική αξία.
- Τα υπόλοιπα (“ωριμότερα”) κρατικά ομόλογα ονομάζονται off-the-run. Σημειώνεται ότι τα on-the-run ομόλογα συνήθως διαπραγματεύονται σε ελαφρώς χαμηλότερες αποδόσεις στην λήξη έναντι των off-the-run που έχουν τον ίδιο ή παρόμοιο χρόνο μέχρι τη λήξη λόγω των διαφορών στη ζήτηση των τίτλων και, μερικές φορές, στις διαφορές στο κόστος χρηματοδότησης των κρατικών τίτλων στην αγορά repos.

ΠΕΡΙΘΩΡΙΑ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ (Yield Spreads)

- Ο πιο συχνά χρησιμοποιούμενος δείκτης αναφοράς για τα ομόλογα κυμαινόμενου επιτοκίου είναι το Libor, το οποίο καταργείται σταδιακά, με το SOFR (Secured Overnight Financing Rate) να παίρνει την θέση του ως επιτόκιο αναφοράς για τα παράγωγα και δάνεια σε δολάριο (USD).
- Καθότι αποτελεί ένα σύνθετο διατραπεζικό επιτόκιο, δεν είναι επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (=risk-free rate).
- Το περιθώριο απόδοσης έναντι ενός συγκεκριμένου δείκτη αναφοράς αναφέρεται ως περιθώριο αναφοράς και συνήθως μετριέται σε μονάδες βάσης (θυμάμαι ότι 100bps = 1%).
- Εάν δεν υπάρχει επιτόκιο αναφοράς για τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου ομολόγου ή ένα ομόλογο έχει ασυνήθιστη διάρκεια, χρησιμοποιείται μαθηματική παρεμβολή για την εξαγωγή ενός τεκμαρτού δείκτη αναφοράς. Επίσης, τα ομόλογα με πολύ μεγάλη διάρκεια τιμολογούνται σε σχέση με το μεγαλύτερο διαθέσιμο ομόλογο αναφοράς.

ΠΕΡΙΘΩΡΙΑ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ (Yield Spreads)

- Εάν δεν υπάρχει επιτόκιο αναφοράς για τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου ομολόγου ή ένα ομόλογο έχει ασυνήθιστη διάρκεια, χρησιμοποιείται μαθηματική παρεμβολή για την εξαγωγή ενός τεκμαρτού δείκτη αναφοράς. Επίσης, τα ομόλογα με πολύ μεγάλη διάρκεια τιμολογούνται σε σχέση με το μεγαλύτερο διαθέσιμο ομόλογο αναφοράς.
- Για παράδειγμα, τα 100-ετή ομόλογα στις ΗΠΑ τιμολογούνται με βάση το 30-ετές επιτόκιο αναφοράς του αμερικανικού Δημοσίου (US Treasury). Στο Ηνωμένο Βασίλειο, τις ΗΠΑ και την Ιαπωνία, το επιτόκιο αναφοράς για τα ομόλογα σταθερού επιτοκίου είναι η απόδοση των κρατικών ομολόγων.

G-Spread

- Η διαφορά απόδοσης σε μονάδες βάσης σε σχέση με ένα κρατικό ομόλογο είναι γνωστή ως **G-spread**.
- Το περιθώριο αυτό έναντι του κρατικού ομόλογο είναι η απόδοση (αποζημίωση) για την ανάληψη μεγαλύτερων κινδύνων (πιστωτικός, ρευστότητας και λοιπών κινδύνων) σε σχέση με το κρατικό ομόλογο.
- Σε ευρώ τα εταιρικά ομόλογα τιμολογούνται πάνω από ένα επιτόκιο αναφοράς ανταλλαγής επιτοκίων σε ευρώ (EUR swap rate).

G- Spread

- Πχ ένα νεοεκδοθέν πενταετές ομόλογο σε EUR μπορεί να τιμολογείται με επιτόκιο αναφοράς το "mid-swaps" συν 150 μ.β., όπου "mid-swaps" είναι ο μέσος όρος των επιτοκίων swap (=πράξεις ανταλλαγής) στην αγορά (bid-offered swap rates).
- Σημειώστε ότι: (α) η διαφορά απόδοσης (yield spread) βασίζεται στο πενταετές EUR-swap επιτόκιο και δεν έχει ως δείκτη αναφοράς (benchmark rate) την απόδοση του κρατικού ομολόγου και, (β) η απόδοση των κρατικών ομολόγων ή το EUR-swap που χρησιμοποιούνται ως δείκτες αναφοράς για ένα συγκεκριμένο εταιρικό ομόλογο μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου καθώς ο χρόνος που απομένει μέχρι την λήξη μεταβάλλεται.

Spread	768.76 bp	vs	DBR 0 ½	02/15/26
Price	80.4385		↻	95.717 16:40:44
Yield	9.593791	Wst		1.906191 Ann
Wkout	07/29/2026 @	100.00	Consensus	Yld 6 6
Settle	12/16/22			12/16/22

✎ Spreads		Yield Calculations	
11) G-Sprd	766.6	Street Convention	9.593791
12) I-Sprd	688.5	Equiv 2 /Yr	9.374107
Basis	N.A.	Mmkt (Act/360)	
14) Z-Sprd	688.7	True Yield	9.593244
15) ASW	588.9	Current Yield	3.667
16) OAS	727.6		

I-Spread

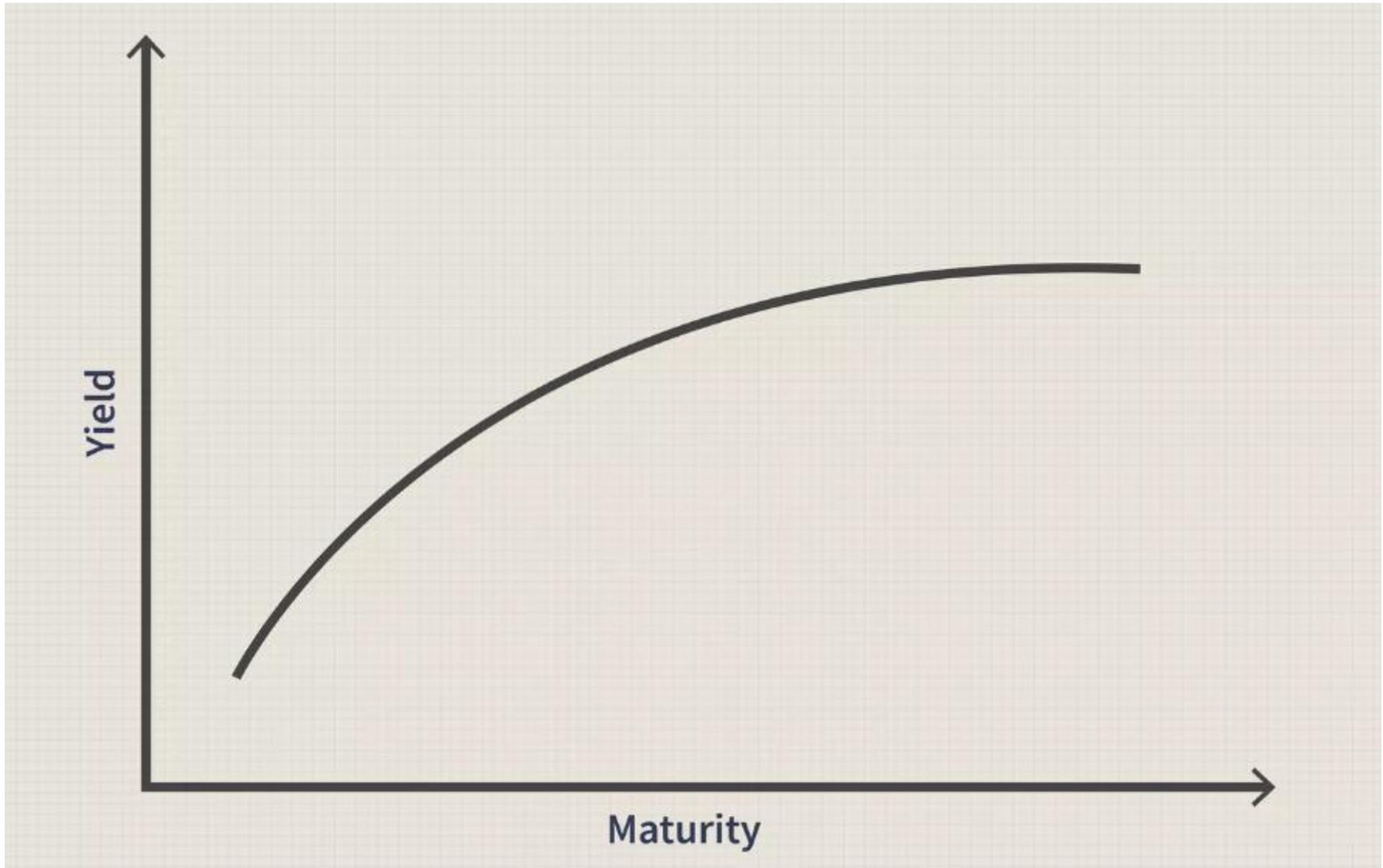
- Η διαφορά απόδοσης (yield spread) μεταξύ ενός συγκεκριμένου ομολόγου από το standard swap επιτόκιο στο ίδιο νόμισμα είναι γνωστό ως I-spread.
- Η εν λόγω διαφορά απόδοσης επιτρέπει την σύγκριση ομολόγων με διαφορετικά επίπεδα πιστωτικού κινδύνου και κινδύνου ρευστότητας έναντι ενός δείκτη αναφοράς διατραπεζικού δανεισμού.

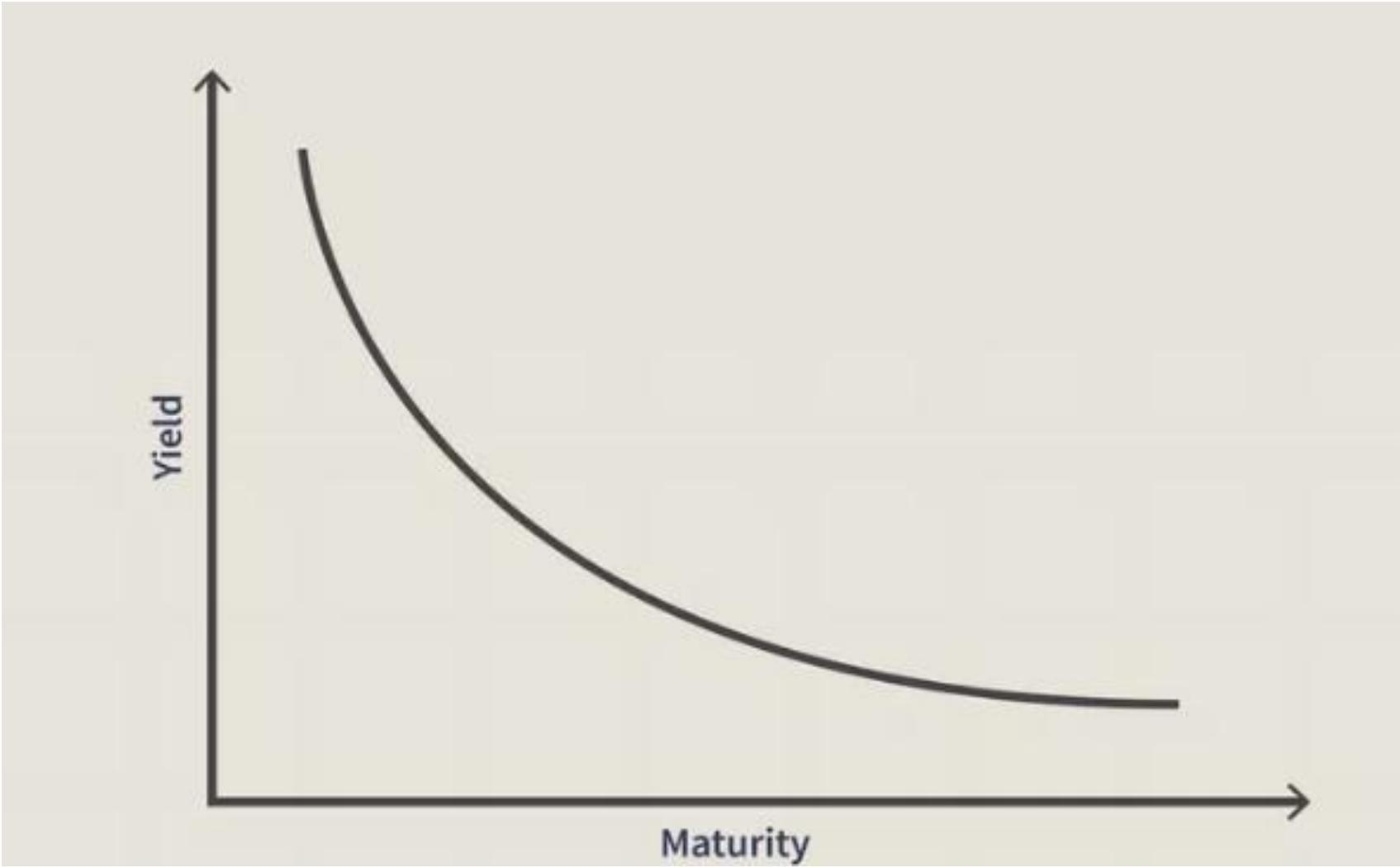
Z-Spread

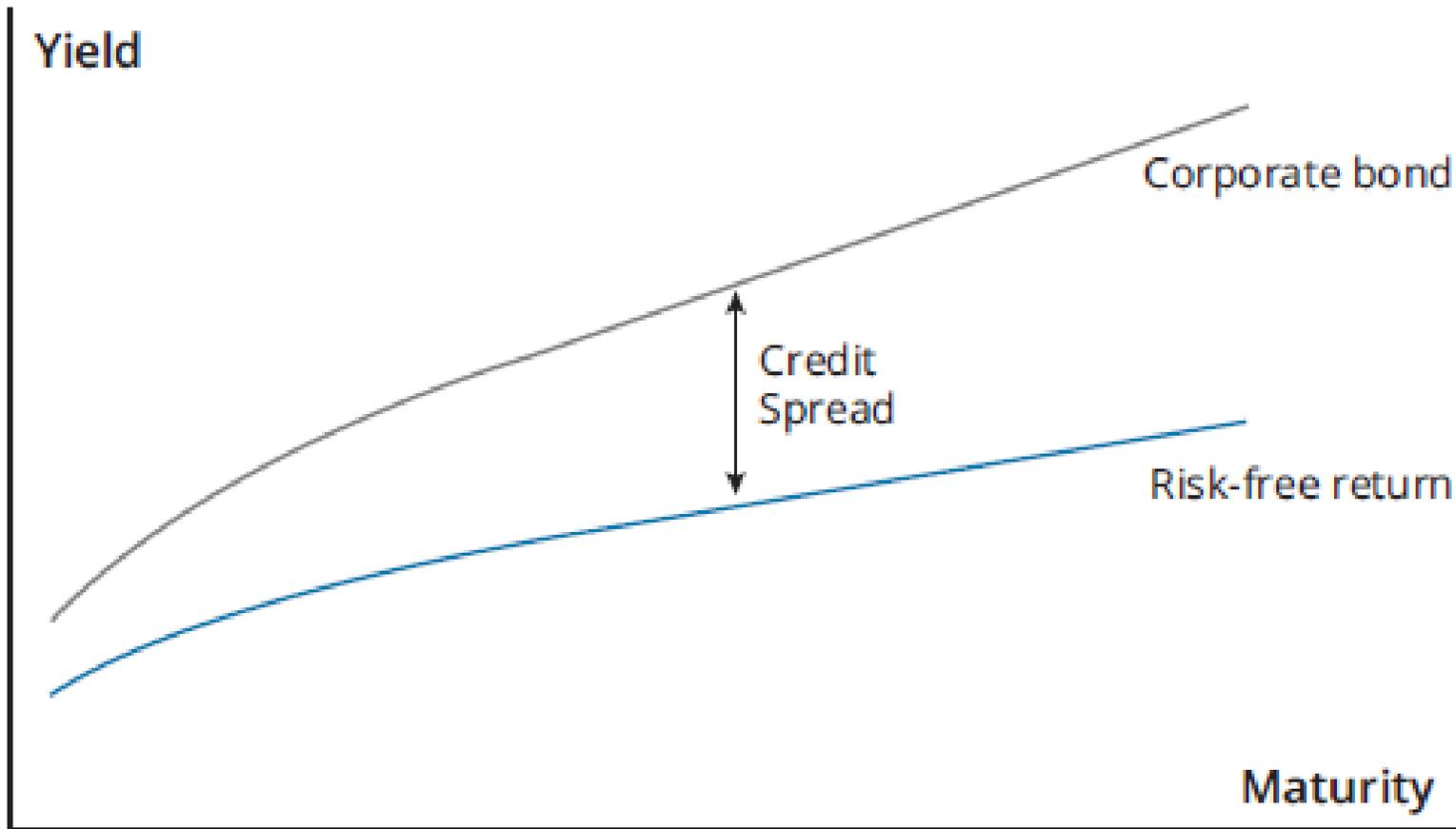
- Μία καμπύλη αποδόσεων μας δείχνει την σχέση μεταξύ απόδοσης στην λήξη και χρόνου για την λήξη για ομόλογα με ίδιο προφίλ κινδύνου.
- Η εν λόγω διαφορά απόδοσης επιτρέπει την σύγκριση ομολόγων με διαφορετικά επίπεδα πιστωτικού κινδύνου και κινδύνου ρευστότητας έναντι ενός δείκτη αναφοράς διατραπεζικού δανεισμού.
- Το Z-spread (απόδοση μηδενικής μεταβλητότητας) βασίζεται σε ολόκληρη την καμπύλη των spot επιτοκίων αναφοράς. Ουσιαστικά μας δίνει το σταθερό εκείνο περιθώριο που πρέπει να προσθέσουμε στο κάθε επιτόκιο spot, ώστε η παρούσα αξία των ταμειακών ροών του ομολόγου να αντιστοιχεί στην τιμή του.

Spot rate curve

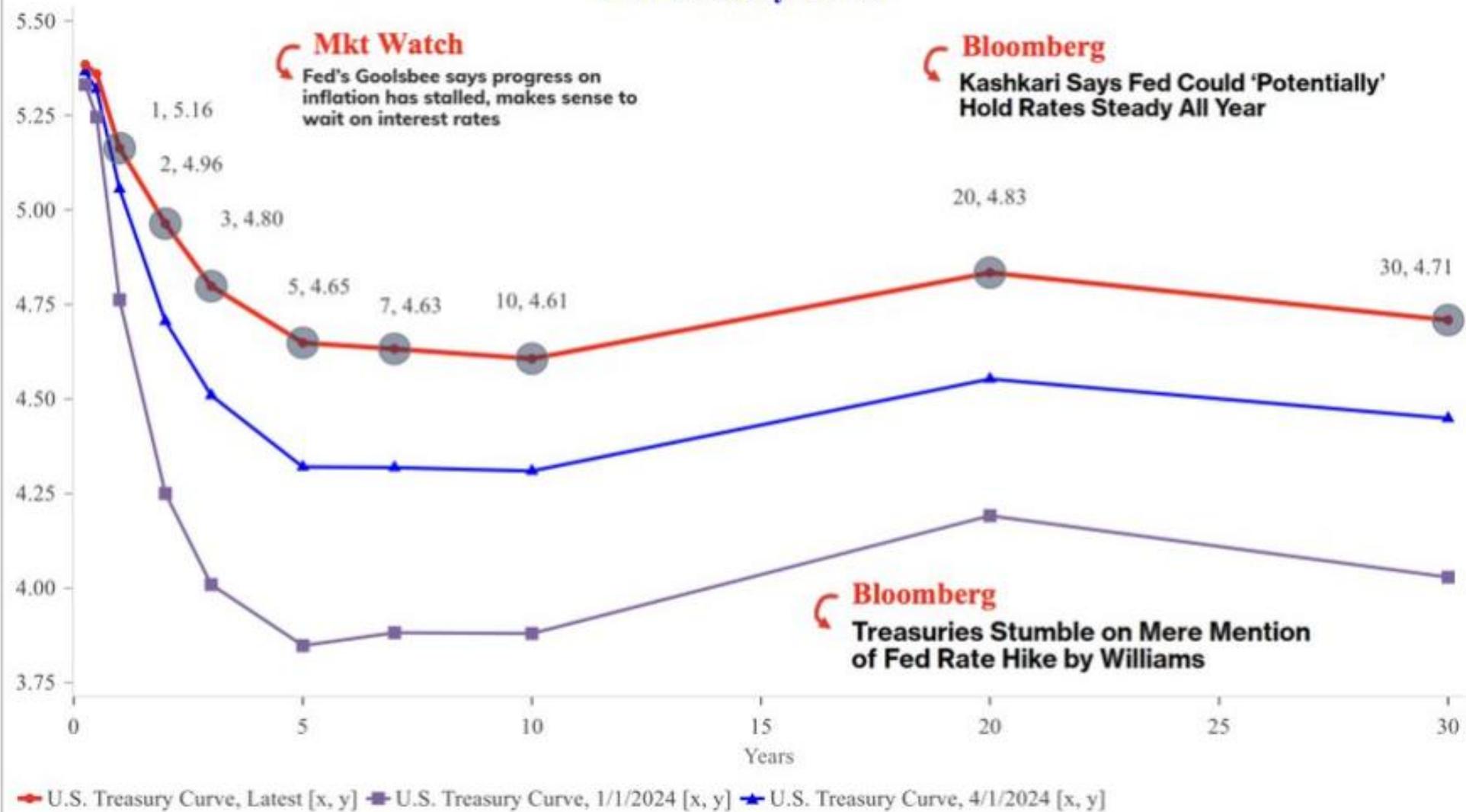
- Αφορά στην καμπύλη αποδόσεων που κατασκευάζεται με τη χρήση των spot επιτοκίων του ομολόγων Δημοσίου και όχι των αποδόσεων.
- Η καμπύλη αυτή αποτελεί χρήσιμο σημείο αναφοράς για την τιμολόγηση των ομολόγων.
- Αυτός ο τύπος καμπύλης επιτοκίων μπορεί να κατασκευαστεί από ομόλογα του Δημοσίου. Ωστόσο, η ευκολότερη μέθοδος είναι να χρησιμοποιηθούν οι αποδόσεις των κρατικών ομολόγων μηδενικού κουπονιού. Ο υπολογισμός της απόδοσης ενός ομολόγου μηδενικού κουπονιού είναι σχετικά απλός και ταυτίζεται με το επιτόκιο spot για τα ομόλογα μηδενικού κουπονιού.







U.S. Treasury Curve



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ Ι

ΤΑ ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΣΤΗΝ ΛΗΞΗ

Περιθώριο	→	Ασφάλιστρο Κινδύνου	→	{ Φορολογία Ρευστότητα Πιστωτικός Κίνδυνος
Δείκτης Αναφοράς	→	Επιτόκιο άνευ κινδύνου	→	{ Αναμενόμενος Πληθωρισμός Αναμενόμενα Πραγμ. Επιτόκια

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ II

ΤΑ ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΣΤΗΝ ΛΗΞΗ

Περιθώριο	→	Ασφάλιστρο Κινδύνου	→	{ Φορολογία Κίνδυνος Ρευστότητας Πιστωτικός Κίνδυνος
Δείκτης Αναφοράς	→	Επιτόκιο άνευ κινδύνου	→	{ Αναμενόμενος Πληθωρισμός Αναμενόμενα Πραγμ. Επιτόκια

- Ο δείκτης αναφοράς συχνά εμφανίζεται ως το επιτόκιο άνευ κινδύνου (risk free rate).
- Ο δείκτης αναφοράς διαφοροποιείται από αγορά σε αγορά. Για ομόλογα με σταθερό κουπόνι χρησιμοποιείται ως δείκτης αναφοράς ένα κρατικό αξιόγραφο με ίδιο χρόνο λήξεως ή το πλησιέστερο χρόνο ως τη λήξη με το συγκεκριμένο ομόλογο.
- Το ασφάλιστρο κινδύνου (risk premium) που προστίθεται στο επιτόκιο άνευ κινδύνου ουσιαστικά αποζημιώνει τον επενδυτή για τον πιστωτικό και τον κίνδυνο ρευστότητας και ενδεχομένως την φορολογία.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ III

- Οι μεταβολές στα επιτόκια αναφοράς (benchmark rates) αποτυπώνουν μακροοικονομικούς παράγοντες που επηρεάζουν όλα τα ομόλογα στην αγορά: πληθωρισμός, οικονομική ανάπτυξη, συναλλαγματικές ισοτιμίες και νομισματική και δημοσιονομική πολιτική.
- Οι μεταβολές στα περιθώρια (spreads) συνήθως αποτυπώνουν μικροοικονομικούς παράγοντες που επηρεάζουν το συγκεκριμένο ομόλογο: πιστωτικός κίνδυνος, ρευστότητα και φορολογικές επιδράσεις.
- Τα επιτόκια αναφοράς είναι συνήθως οι αποδόσεις στη λήξη των κρατικών ομολόγων ή των σταθερών επιτόκια σε συμβάσεις ανταλλαγής επιτοκίων (swaps).
- Το G-spread είναι το περιθώριο (πάνω ή κάτω) από το επιτόκιο κρατικών ομολόγων, και το I-spread είναι το περιθώριο (πάνω ή κάτω) από ένα επιτόκιο ανταλλαγής επιτοκίων (swap).
- Το G-spread και το I-spread μπορεί να βασίζονται σε ένα συγκεκριμένο επιτόκιο αναφοράς ή σε ένα επιτόκιο που παρεμβάλλεται από την καμπύλη αποδόσεων επιτοκίων αναφοράς.
- Το Z-spread (μηδενικής μεταβλητότητας) βασίζεται σε ολόκληρη την καμπύλη των επιτοκίων spot. Είναι το σταθερό περιθώριο που προστίθεται σε κάθε επιτόκιο spot, έτσι ώστε η παρούσα αξία των ταμειακών ροών αντιστοιχίζεται στην τιμή του ομολόγου. Είναι στατικό.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΟΜΟΛΟΓΟΥ

- Ο βασικός κίνδυνος των ομολόγων είναι ο κίνδυνος επιτοκίου (interest rate risk), δεδομένου ότι η σχέση τιμής και απόδοσης στη λήξη είναι αντίστροφη. Ο κίνδυνος είναι μεγαλύτερος για ομόλογα που έχουν μεγάλη υπολειμματική διάρκεια και/ή χαμηλό κουπόνι (επιτόκιο).
- Η ευαισθησία των ομολόγων στις μεταβολές των επιτοκίων μετριέται με την διάρκεια (duration).
- Διάρκεια ενός ομολόγου είναι ο μέσος χρόνος έως ότου οι ταμειακές ροές του ομολόγου να εισπραχθούν. Για ένα ομόλογο με μηδενικό κουπόνι, αυτή είναι απλώς ο χρόνος μέχρι τη λήξη.
- Για ένα ομόλογο με κουπόνι, η διάρκειά του θα είναι αναγκαστικά μικρότερη από τη λήξη του.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΟΜΟΛΟΓΟΥ

- Η διάρκεια ενός ομολόγου μετρά την ευαισθησία της πλήρους τιμής του ομολόγου (συμπεριλαμβανομένων των δεδουλευμένων τόκων) στις μεταβολές της απόδοσης του ομολόγου στη λήξη ή, γενικότερα, στις μεταβολές των επιτοκίων αναφοράς.
- Η διάρκεια εκτιμά τις μεταβολές στην τιμή του ομολόγου υποθέτοντας ότι οι υπόλοιπες μεταβλητές εκτός από την απόδοση στη λήξης ή τα επιτόκια αναφοράς διατηρούνται σταθερές. Το σημαντικότερο είναι ότι ο χρόνος για την λήξη παραμένει αμετάβλητος.
- Επομένως, η διάρκεια μετρά τη **στιγμιαία** (ή, τουλάχιστον, την αυθημερόν) μεταβολή στην τιμή του ομολόγου. Εφόσον λοιπόν οι δεδουλευμένοι τόκοι είναι οι ίδιοι, το μόνο που μεταβάλλεται είναι η καθαρή τιμή που ανεβαίνει ή κατεβαίνει.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΟΜΟΛΟΓΟΥ – ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ

- Υπάρχουν διάφοροι τύποι διάρκειας ομολόγων. Σε γενικές γραμμές, μπορούν να χωριστούν σε διάρκεια απόδοσης και διάρκεια καμπύλης. Η διάρκεια απόδοσης είναι η ευαισθησία της τιμής του ομολόγου σε σχέση με την ίδια την απόδοση του ομολόγου στη λήξη. Η διάρκεια καμπύλης είναι η ευαισθησία της τιμής του ομολόγου (ή γενικότερα της αγοραίας αξίας) σε σχέση με μια καμπύλη απόδοσης αναφοράς.
- Υπάρχουν δύο βασικές παραλλαγές της διάρκειας ενός ομολόγου: (α) η διάρκεια Macaulay (**Macaulay Duration**) και (β) η Τροποποιημένη Διάρκεια (**Modified Duration**).
- **Macaulay Duration**: προέρχεται από τον Καναδό οικονομολόγο Frederick Macaulay που έγραψε για το συγκεκριμένο μέτρο το 1938.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ MACALAY

- Αφορά στη σταθμισμένη μέση διάρκεια μέχρι την λήξη των ταμειακών ρών ενός ομολόγου. Η βαρύτητα (ειδικό βάρος) κάθε ταμειακής ροής προσδιορίζεται διαιρώντας την παρούσα αξία της ταμειακής ροής με την τιμή. Η διάρκεια Macaulay χρησιμοποιείται συχνά από διαχειριστές χαρτοφυλακίου που χρησιμοποιούν στρατηγικές ανοσοποίησης.
- Η διάρκεια Macaulay είναι ένα μέτρο προσέγγισης της μεταβολής της τιμής σε νομισματικές μονάδες από μία μικρή μεταβολή στην απαιτούμενη απόδοση. Για τον υπολογισμό της διάρκειας Macaulay, η παρούσα αξία κάθε χρηματικής ροής σταθμίζεται με το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να εισπραχθεί και το άθροισμά τους διαιρείται με την αξία του ομολόγου.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ MACALAY

$$\text{Macaulay Duration} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t \times C}{(1+y)^t} + \frac{n \times M}{(1+y)^n}}{\text{Current Bond Price}}$$

- Οπου Current Bond Price= τρέχουσα τιμή ομολόγου
- C = κουπόνι σε νομισματικές μονάδες
- y = απόδοση στη λήξη
- n = αριθμός περιόδων
- M = ονομαστική αξία στη λήξη

Άρα για τον υπολογισμό της διάρκειας Macaulay, η παρούσα αξία κάθε χρηματικής ροής σταθμίζεται με το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να εισπραχθεί και το άθροισμά τους διαιρείται με την τρέχουσα αξία του ομολόγου.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΜΑΣΑΛΑΥ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\text{Macaulay Duration} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t \times C}{(1+y)^t} + \frac{n \times M}{(1+y)^n}}{\text{Current Bond Price}}$$

- Δίνεται 10-ετές ομόλογο με ετήσιο κουπόνι 8%. Η απόδοση στη λήξη του ομολόγου είναι 10,4% και η τρέχουσα τιμή του 85,503 ανά 100 ονομαστικής αξίας.
- Άρα το εν λόγω ομόλογο έχει 10 περιόδους μέχρι την λήξη του.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ MACALAY - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Period	Cash Flow	Present Value	Weight	Period × Weight
1	8	7.246377	0.08475	0.0847
2	8	6.563747	0.07677	0.1535
3	8	5.945423	0.06953	0.2086
4	8	5.385347	0.06298	0.2519
5	8	4.878032	0.05705	0.2853
6	8	4.418507	0.05168	0.3101
7	8	4.002271	0.04681	0.3277
8	8	3.625245	0.04240	0.3392
9	8	3.283737	0.03840	0.3456
10	108	40.154389	0.46963	4.6963
		85.503075	1.00000	7.0029

$$\text{Macaulay Duration} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t \times C}{(1+y)^t} + \frac{n \times M}{(1+y)^n}}{\text{Current Bond Price}}$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΜΑCΑLΑY - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Period	Cash Flow	Present Value	Weight	Period × Weight
1	8	7.246377	0.08475	0.0847
2	8	6.563747	0.07677	0.1535
3	8	5.945423	0.06953	0.2086
4	8	5.385347	0.06298	0.2519
5	8	4.878032	0.05705	0.2853
6	8	4.418507	0.05168	0.3101
7	8	4.002271	0.04681	0.3277
8	8	3.625245	0.04240	0.3392
9	8	3.283737	0.03840	0.3456
10	108	40.154389	0.46963	4.6963
		85.503075	1.00000	7.0029

- Προσοχή: το άθροισμα των ειδικών βαρών (=1).
- Το άθροισμα της στήλης με τις παρούσες αξίες (PV) δίνει την πλήρη τιμή του ομολόγου (=καθαρή τιμή + δεδουλευμένοι τόκοι).
- Η τέταρτη στήλη (weight) μας δίνει το μέρος εκείνο (ειδικό βάρος) της πλήρους τιμής του ομολόγου, άρα το $0,08475 = 7,246377/85,503075$ κοκ.
- Το άθροισμα της τελευταίας στήλης (7,0029) μας δίνει την διάρκεια Macalay.

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ

- Η τροποποιημένη διάρκεια (modified duration) απαιτεί μια απλή μετατροπή της διάρκειας Macaulay.
- $\text{ModDur} = \text{MacDur} / (1 + r)$
- Άρα η τροποποιημένη διάρκεια συνδέεται με την κατά προσέγγιση ποσοστιαία μεταβολή της τιμής του ομολόγου σε σχέση με τις μεταβολές στην απόδοση.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Πίνακας 4-5 Υπολογισμός της διάρκειας κατά Macaulay και της τροποποιημένης διάρκειας για 5ετές ομόλογο με κουπόνι 6% που πωλείται σε τέτοια τιμή ώστε να δίνει απόδοση 9%

Κουπόνι: 6%

Διάρκεια μέχρι τη λήξη (σε έτη): 5

Αρχική απόδοση: 9%

Περίοδος t	Ταμειακή ροή ^a	PV 1 \$ με επιτόκιο 4,5%	PV των CF	$t \times PVCF^b$
1	3,00 \$	0,956937	2,870813	2,87081
2	3,00 \$	0,915729	2,747190	5,49437
3	3,00 \$	0,876296	2,628890	7,88666
4	3,00 \$	0,838561	2,515684	10,06273
5	3,00 \$	0,802451	2,407353	12,03676
6	3,00 \$	0,767895	2,303687	13,82212
7	3,00 \$	0,734828	2,204485	15,43139
8	3,00 \$	0,703185	2,109555	16,87644
9	3,00 \$	0,672904	2,018713	18,16841
10	103,00 \$	0,643927	66,324551	663,24551
			88,130923	765,89520

^aΤαμειακές ροές ανά 100 \$ ονομαστικής αξίας

- Να υπολογισθούν (α) η διάρκεια Macalaya και (β) η τροποποιημένη διάρκεια.

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 1

Να υπολογισθούν (α) η διάρκεια Macalay και (β) την τροποποιημένη διάρκεια.

- Διάρκεια Macalay (εξαμηνιαία): $765,89520/88,130923 = 8,69$
- Συνεπώς Διάρκεια Macalay (ετήσια): $8,69/2 = 4,35$
- Τροποποιημένη διάρκεια = $4,35/1,0450 = 4,16$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Κουπόνι: 9%

Διάρκεια μέχρι τη λήξη (σε έτη): 5

Αρχική απόδοση: 9%

Περίοδος t	Ταμειακή ροή ^a	PV 1 \$ με επιτόκιο 4,5%	PV των CF	$t \times PVCF^b$
1	4,50 \$	0,956937	4,306220	4,30622
2	4,50 \$	0,915729	4,120785	8,24156
3	4,50 \$	0,876296	3,943335	11,83000
4	4,50 \$	0,838561	3,773526	15,09410
5	4,50 \$	0,802451	3,611030	18,05514
6	4,50 \$	0,767895	3,455531	20,73318
7	4,50 \$	0,734828	3,306728	23,14709
8	4,50 \$	0,703185	3,164333	25,31466
9	4,50 \$	0,672904	3,028070	27,25262
10	104,50 \$	0,643927	67,290443	627,90442
			<u>100,000000</u>	<u>826,87899</u>

^aΤαμειακές ροές ανά 100 \$ ονομαστικής αξίας

Δίνεται 5-ετές ομόλογο με κουπόνι 9%, εξαμηνιαίες καταβολές και πωλείται σε τέτοια τιμή που αποφέρει απόδοση 9%.

Να υπολογισθούν:
 (α) Η διάρκεια Macalay
 (β) η τροποποιημένη διάρκεια.

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 2

Να υπολογισθούν (α) η διάρκεια Macalay και (β) την τροποποιημένη διάρκεια.

- Διάρκεια Macalay (εξαμηνιαία):
 $826,87899/100,0000 = 8,27$
- Συνεπώς Διάρκεια Macalay (ετήσια): $8,27/2 = 4,13$
- Τροποποιημένη διάρκεια = $4,13/1,0450 = 3,96$



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ

- Η διάρκεια (τροποποιημένη και Macaulay) ενός ομολόγου που πληρώνει κουπόνια είναι **μικρότερη από την διάρκεια μέχρι τη λήξη**.
- Η διάρκεια κατά Macaulay ενός ομολόγου μηδενικού επιτοκίου (zero coupon) είναι **ίση με εκείνη της διάρκειας μέχρι τη λήξη**. Η τροποποιημένη διάρκεια ενός ομολόγου με μηδενικό κουπόνι, παρόλα αυτά, είναι **μικρότερη από τη διάρκεια μέχρι τη λήξη**.
- Επίσης, όσο χαμηλότερο το κουπόνι, γενικά τόσο μεγαλύτερη η διάρκεια (τροποποιημένη και κατά Macaulay) ενός ομολόγου.
- Υπάρχει σχετική συνέπεια μεταξύ των ιδιοτήτων της μεταβλητότητας της τιμής ενός ομολόγου και των ιδιοτήτων της τροποποιημένης διάρκειας. Μία ιδιότητα της τροποποιημένης διάρκειας είναι ότι, όταν οι άλλοι παράγοντες παραμένουν σταθεροί: (α) όσο μεγαλύτερη η διάρκεια μέχρι τη λήξη τόσο μεγαλύτερη η τροποποιημένη διάρκεια και (β) όσο μικρότερο το κουπόνι, τόσο μεγαλύτερη η τροποποιημένη διάρκεια και επομένως τόσο μεγαλύτερη η μεταβλητότητα της τιμής του ομολόγου.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΟΜΟΛΟΓΟΥ

$$\Delta P/P = - \text{Modified Duration} \times \Delta y$$

- Η μεταβολή της απόδοσης εκφράζεται συχνά ως μεταβολή μονάδας βάσης (μβ ή bp).
- Μία μονάδα βάσης ισοδυναμεί με 0,01%.
- Έτσι, μια μεταβολή 100 μονάδων βάσης (μβ) είναι μια μεταβολή της τάξης του 1% στην απόδοση στην λήξη.
- Όταν οι αποδόσεις ανατοκίζονται συνεχώς, το παρεχόμενο μέτρο διάρκειας είναι γνωστό ως διάρκεια Macaulay.
- Σημείωση: αναφερόμαστε στην μεταβολή της πλήρους τιμής του ομολόγου.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΟΜΟΛΟΓΟΥ

Η χρησιμότητα του μέτρου της διάρκειας έγκειται στο γεγονός ότι η κατά προσέγγιση μεταβολή στην τιμή ενός ομολόγου, P , για μια παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης αποδόσεων κατά Δy είναι:

$$\Delta P/P = - \text{Modified Duration} \times \Delta y$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΟΜΟΛΟΓΟΥ

Η χρησιμότητα του μέτρου της διάρκειας έγκειται στο γεγονός ότι η κατά προσέγγιση μεταβολή στην τιμή ενός ομολόγου, P , για μια παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης αποδόσεων κατά Δy είναι:

$$\Delta P/P = - \text{Modified Duration} \times \Delta y$$

Η τροποποιημένη διάρκεια μπορεί να ερμηνευτεί ως η κατά προσέγγιση ποσοστιαία μεταβολή για μία μεταβολή της απόδοσης κατά 100 μονάδες βάσης.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται 25-ετές ομόλογο, με κουπόνι 6%, που πωλείται προς 70,357 ανά 100 ονομαστικής αξίας και απόδοση στην λήξη 9%. Η τροποποιημένη διάρκειά του είναι 10,62. Αν η απόδοση στην λήξη αυξηθεί από 9% σε 9,10% (δηλαδή κατά 10 μονάδες βάσης) να υπολογισθεί η κατά προσέγγιση ποσοστιαία αλλαγή της τιμής του ομολόγου.

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 3

$$\text{- Modified Duration} \times \Delta y = \Delta P/P$$

$$-10,62 \times (+0,0010) = -0,0106 \text{ ή } -1,06\%$$

Αρα αν η απόδοση στην λήξη αυξηθεί από 9% σε 9,10% (= 10 μονάδες βάσης) η κατά προσέγγιση ποσοστιαία αλλαγή της τιμής θα είναι -1,06%.

ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΙΜΗΣ ΟΜΟΛΟΓΟΥ

- Η τροποποιημένη διάρκεια είναι μία εκτίμηση για την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής. Οι επενδυτές θέλουν να γνωρίζουν επίσης και **τη μεταβλητότητα της τιμής σε νομισματικές μονάδες.**
- Για μικρές μεταβολές της απαιτούμενης απόδοσης, η επόμενη εξίσωση δίνει σχετικά καλές εκτιμήσεις για τις μεταβολές της τιμής:

$$dP = - (\text{διάρκεια σε νομισματικές μονάδες})(dy)$$

όπου dP = μεταβολή στην τιμή και dy = μεταβολή στην απόδοση.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται 25-ετές ομόλογο, με κουπόνι 6%, που πωλείται προς 70,3570 και απόδοση στην λήξη 9%. Η διάρκειά του σε δολάρια είναι 747,2009.

Για μία αύξηση 1 μ.β. της απαιτούμενης απόδοσης, να υπολογισθεί η εκτιμώμενη μεταβολή της τιμής ανα \$100 ονομαστικής αξίας;

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 4

$$dP = - (747,2009\$) \times (0,0001) = - 0,0747 \$$$

Θυμίζω ότι $1 \mu.\beta = 1\% / 100 = 0,0001$

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

- Για μεγάλες μεταβολές στις απαιτούμενες αποδόσεις, η διάρκεια σε χρηματικές μονάδες ή η τροποποιημένη διάρκεια **δεν αποτελούν επαρκή μέτρα** για την κατά προσέγγιση εκτίμηση της αντίδρασης της τιμής.
- Η διάρκεια θα υπερεκτιμά τη μεταβολή της τιμής όταν οι απαιτούμενες αποδόσεις ανεβαίνουν και επομένως θα υποεκτιμά τη νέα τιμή.
- Όταν οι απαιτούμενες αποδόσεις μειώνονται, η διάρκεια θα υποεκτιμά τη μεταβολή της τιμής και επομένως θα υπερεκτιμά τη νέα τιμή.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΟΜΟΛΟΓΩΝ

- Η διάρκεια ενός χαρτοφυλακίου είναι ο μέσος σταθμικός όρος της διάρκειας των ομολόγων που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο.
- Οι διαχειριστές χαρτοφυλακίων ομολόγων παρακολουθούν την έκθεσή τους σε επιτόκια για μία συγκεκριμένη έκδοση σε όρους της συμμετοχής της στη διάρκεια του χαρτοφυλακίου.
- Αυτό το μέτρο υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας τη στάθμιση της κάθε έκδοσης στο χαρτοφυλάκιο με τη διάρκεια της συγκεκριμένης μεμονωμένης έκδοσης.

Συμμετοχή στην διάρκεια του χαρτοφυλακίου =

Στάθμιση της έκδοσης στο χαρτοφυλάκιο x διάρκεια της έκδοσης.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται το ακόλουθο χαρτοφυλάκιο που απαρτίζεται από τέσσερα ομόλογα.

Ομόλογο	Αξία (εκατ. \$)	Στάθμιση στο Χαρτοφυλάκιο	Διάρκεια
A	10	0,10	4
B	40	0,40	7
Γ	30	0,30	6
Δ	20	0,20	2

Να υπολογισθεί η διάρκεια του χαρτοφυλακίου.

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 1

Ομόλογο	Αξία (εκατ. \$)	Στάθμιση στο Χαρτοφυλάκιο	Διάρκεια
A	10	0,10	4
B	40	0,40	7
Γ	30	0,30	6
Δ	20	0,20	2

Διάρκεια του χαρτοφυλακίου:

$$0,1 \times 4 + 0,4 \times 7 + 0,3 \times 6 + 0,2 \times 2 = 5,4$$

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 1

Ομόλογο	Αξία (εκατ. \$)	Στάθμιση στο Χαρτοφυλάκιο	Διάρκεια	Συμμετοχή στην διάρκεια του Χ/Φ
A	10	0,10	4	0,4
B	40	0,40	7	2,8
Γ	30	0,30	6	1,8
Δ	20	0,20	2	0,4
			Σύνολο	5,4

Διάρκεια του χαρτοφυλακίου:

$$0,1 \times 4 + 0,4 \times 7 + 0,3 \times 6 + 0,2 \times 2 = 5,4$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται το ακόλουθο χαρτοφυλάκιο που απαρτίζεται από τρία ομόλογα.

Ομόλογο	Κουπόνι	Έτη έως την λήξη	Απόδοση στη λήξη	Τιμή Ομολόγου	Διάρκεια
A	10%	5	10%	4.000.000	3,86
B	8%	15	10%	4.231.375	8,047
Γ	14%	30	10%	1.378.586	9,16
Συνολική Αξία Χαρτοφυλακίου:				9.609.961	

Να υπολογισθεί η διάρκεια του χαρτοφυλακίου.

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 2

Ομόλογο	Κουπόνι	Έτη έως την λήξη	Απόδοση στη λήξη	Τιμή Ομολόγου	Διάρκεια
A	10%	5	10%	4.000.000	3,86
B	8%	15	10%	4.231.375	8,047
Γ	14%	30	10%	1.378.586	9,16
Συνολική Αξία Χαρτοφυλακίου:				9.609.961	

Εχουμε:

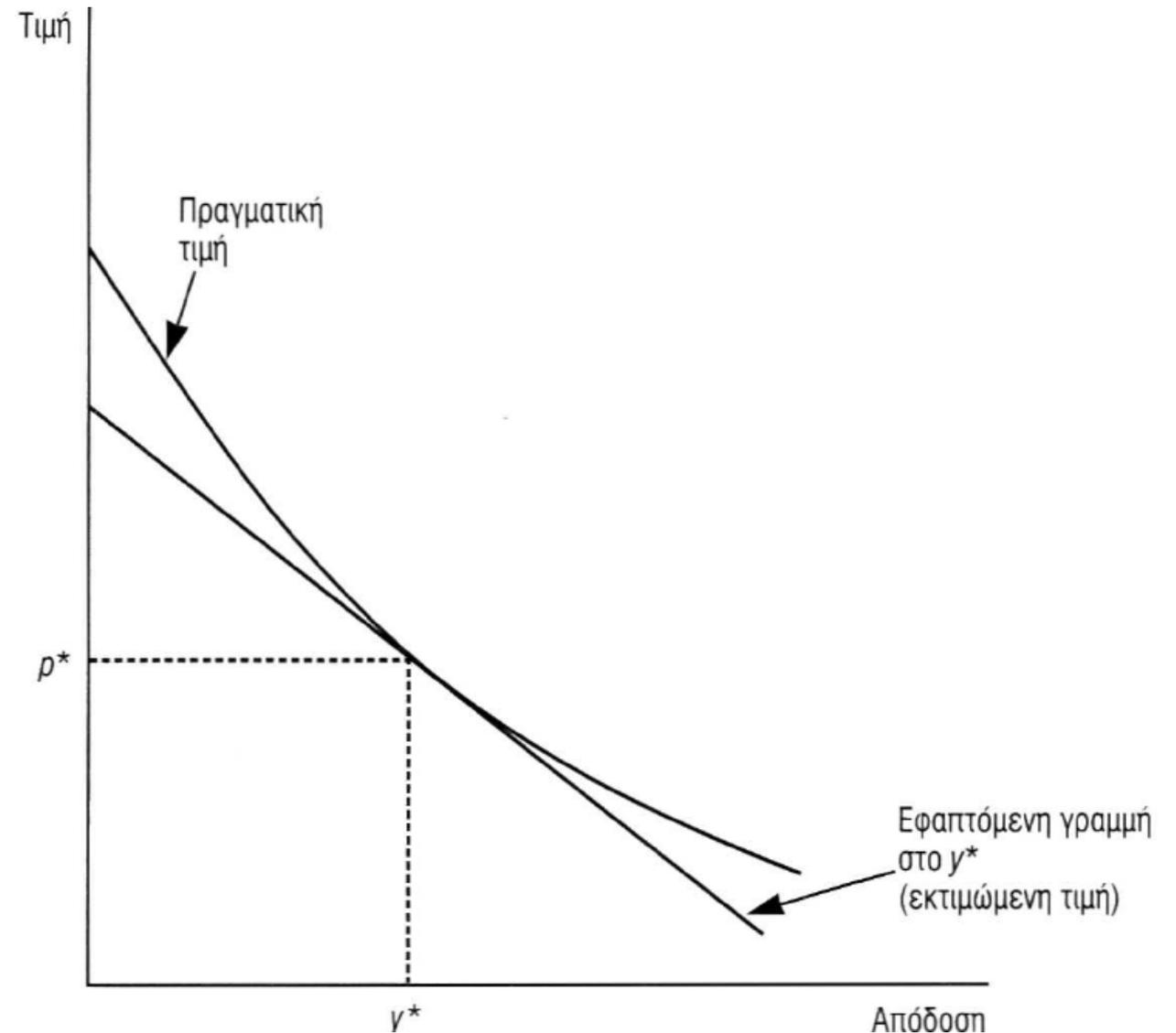
$$(4.000.000/9.609.961) \times 3,86 + (4.231.375/9.609.961) \times 8,047 + (1.378.586/9.609.961) \times 9,16 = 6,47 \text{ έτη}$$

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

- Τα μέτρα της διάρκειας που εξετάσαμε είναι προσεγγιστικά για μικρές μεταβολές της απόδοσης.
- Δεν μπορούν να ενσωματώσουν την επίδραση της κυρτότητας ενός ομολόγου στη συμπεριφορά της τιμής του όταν οι αποδόσεις αλλάζουν σε μεγαλύτερη κλίμακα.
- Το μέτρο της διάρκειας θα πρέπει να συμπληρωθεί με ένα επιπλέον μέτρο που να ενσωματώνει την **καμπυλότητα ή την κυρτότητα ενός ομολόγου**.

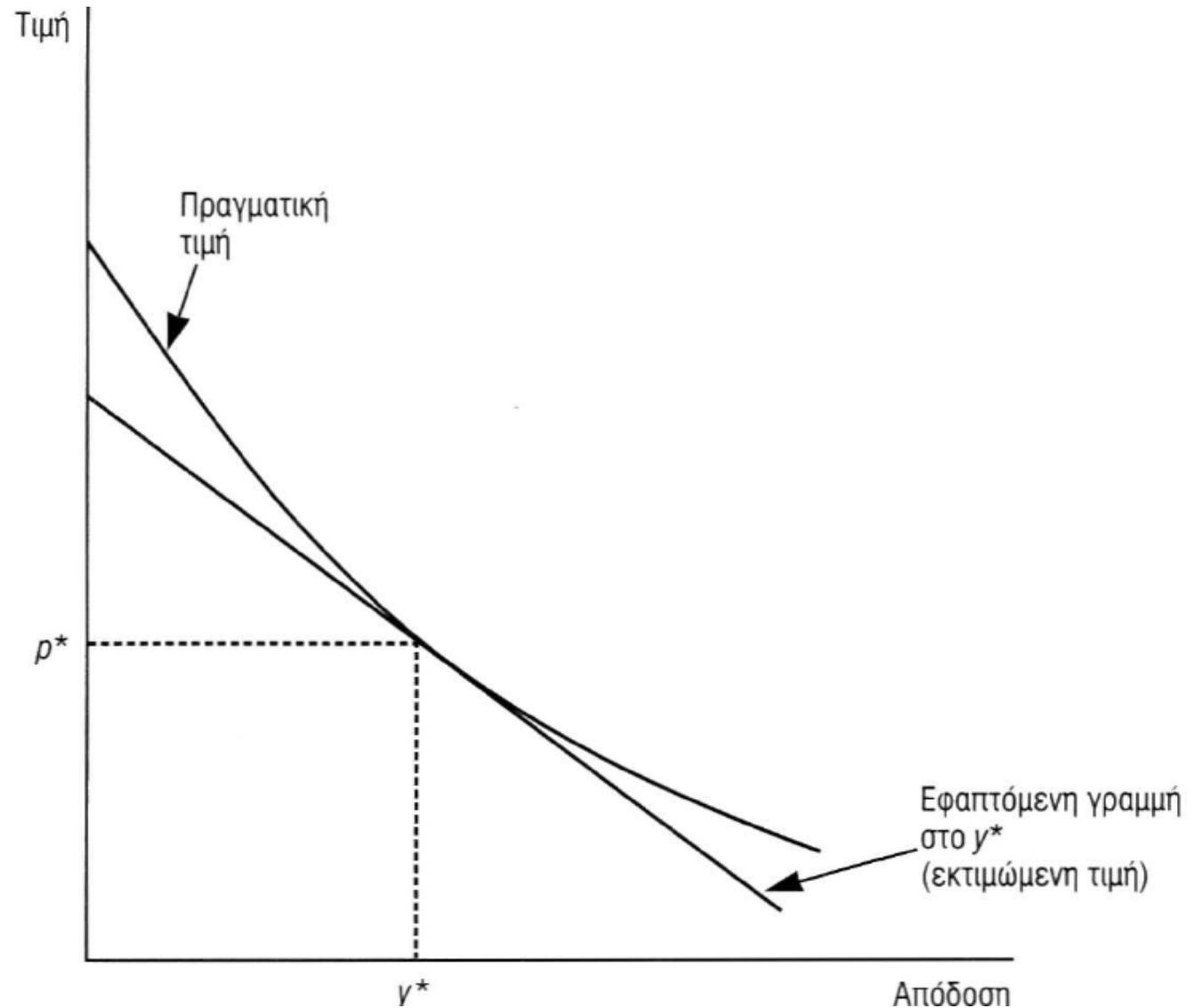
ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

- Σχεδιάσαμε την εφαπτομένη στο σημείο (γ^*, ρ^*) που δίνει την σχέση απόδοσης & τιμής ομολόγου.
- Η εφαπτομένη δίνει τον ρυθμό μεταβολής της τιμής σε σχέση το ρυθμό μεταβολής των επιτοκίων στο δεδομένο σημείο (δλδ επίπεδο απόδοσης).



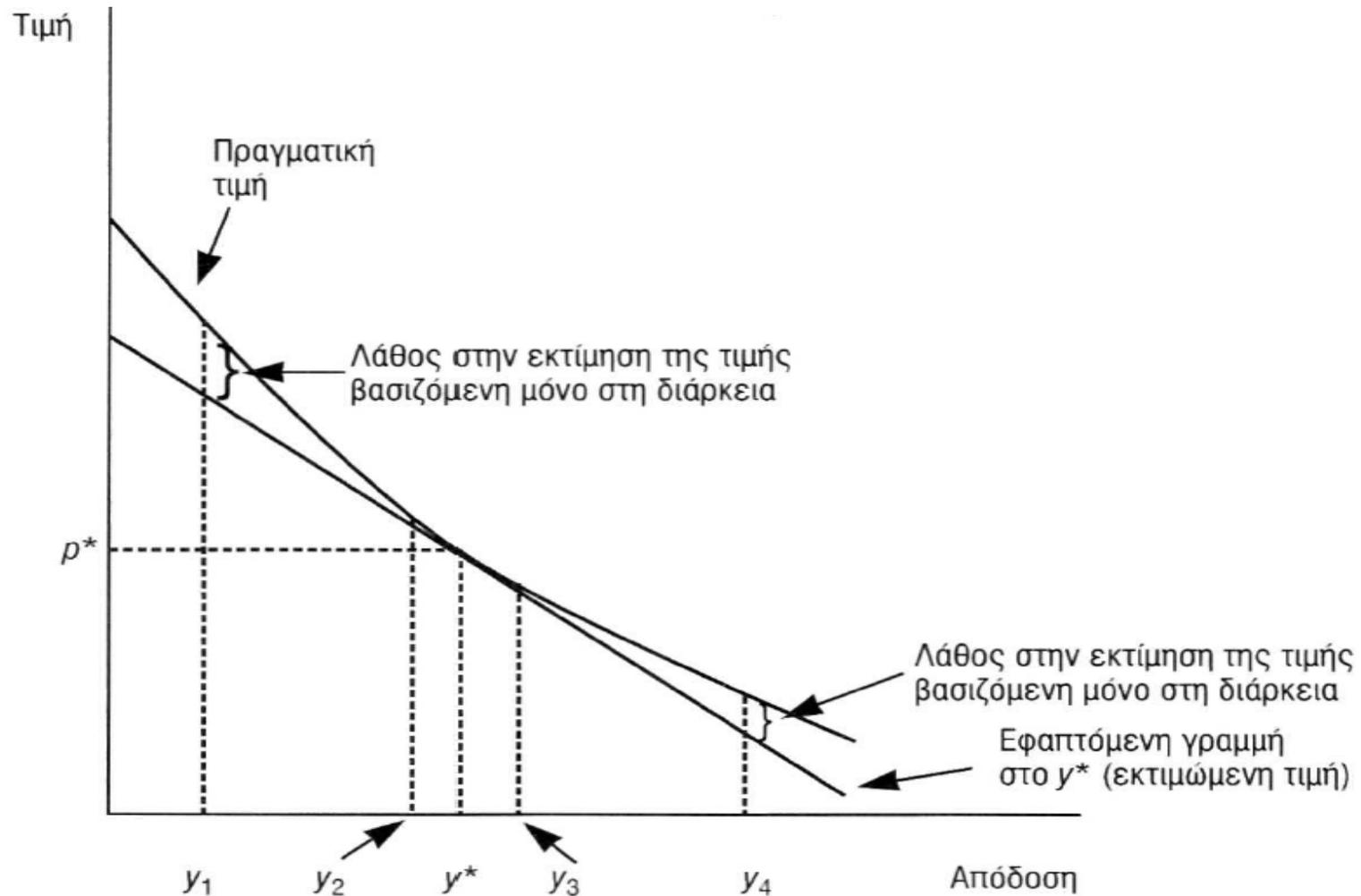
ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

- Αν τραβήξω μία κάθετη γραμμή από οποιαδήποτε τιμή απόδοσης (στον οριζόντιο άξονα), η απόσταση μεταξύ του οριζόντιου άξονα και της εφαπτόμενης γραμμής αντιπροσωπεύει την προσέγγιση της τιμής με την εφαρμογή της διάρκειας και με αρχική απόδοση την γ^* .
- **Η εκτίμηση πάντα θα υπο-εκτιμά την πραγματική τιμή.**



ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

- Όταν οι αποδόσεις μειώνονται, η εκτιμώμενη μεταβολή της τιμής θα είναι μικρότερη από την πραγματική μεταβολή της τιμής και θα υποεκτιμά την πραγματική τιμή.
- Όταν οι αποδόσεις αυξάνονται, η εκτιμώμενη μεταβολή της τιμής θα είναι μεγαλύτερη από την πραγματική μεταβολή της τιμής, αποτέλεσμα της υποεκτίμησης της τιμής.
- Για μικρές αλλαγές στις αποδόσεις, η εφαπτομένη και η διάρκεια είναι αξιόπιστα μέτρα για την εκτίμηση της πραγματικής τιμής.



ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

- Η διάρκεια (τροποποιημένη ή σε νομισματικές μονάδες) προσπαθεί να εκτιμήσει μία κυρτή σχέση μέσω μίας ευθείας γραμμής (την εφαπτόμενη γραμμή).
- Το μέτρο της κυρτότητας σε δολάρια του ομολόγου:
- Μέτρο κυρτότητας σε νομισματικές μονάδες = d^2P/dy^2
- Εναλλακτικά:

$$\frac{d^2P}{dy^2} = \sum_{t=1}^n \frac{t(t+1)C}{(1+y)^{t+2}} + \frac{n(n+1)M}{(1+y)^{n+2}}$$

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Η κατά προσέγγιση μεταβολή της τιμής λόγω της κυρτότητας δίνεται από την σχέση:

$$dP = (\text{Μέτρο Κυρτότητας σε νομισματικές μονάδες}) \times (dy)^2$$

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Η δεύτερη παράγωγος διαιρούμενη με την τιμή είναι ένα μέτρο της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής του ομολόγου λόγω της κυρτότητας. Αναφερόμαστε σε αυτή απλά ως μέτρο της κυρτότητας. Αρα:

- Μέτρο της Κυρτότητας: $d^2P/dy^2 \times 1/p$
- Ποσοστιαία Μεταβολή Τιμής λόγω Κυρτότητας:

$$dP/P = \frac{1}{2} (\text{μέτρο κυρτότητας}) \times (dy)^2$$

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

- Μέτρο της Κυρτότητας: $d^2P/dy^2 \times 1/\rho$
- Ποσοστιαία Μεταβολή τιμής λόγω κυρτότητας:

$$dP/P = \frac{1}{2} (\text{μέτρο κυρτότητας}) \times (dy)^2$$

- Σημειώστε ότι το μέτρο κυρτότητας είναι σε όρους τετραγώνων των περιόδων. Μετατρέπεται σε ετήσια μορφή διαιρώντας με 4 (= το τετράγωνο του 2).
- Σε γενικές γραμμές αν οι ταμειακές ροές συντελούνται κάθε m φορές το χρόνο, η κυρτότητα προσαρμόζεται σε ετήσια μορφή ως ακολούθως:
- Μέτρο Κυρτότητας σε Έτη = Μέτρο Κυρτότητας σε m Περιόδους ανά Έτος/ m^2

ΑΣΚΗΣΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Δίνεται ομόλογο με κουπόνι 9%, διάρκεια μέχρι την λήξη 5 έτη και αρχική απόδοση 9%. Η τιμή του ομολόγου είναι 100.

α. Να υπολογισθούν οι ταμειακές ροές του ομολόγου.

β. Δίνεται ότι $d^2P/dy^2 = 7.781,02$. Να υπολογισθεί το μέτρο της κυρτότητας σε εξάμηνα και εν συνεχεία σε έτη.

γ. Τέλος να υπολογισθεί το μέτρο κυρτότητας σε δολάρια.

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Δίνεται ομόλογο με κουπόνι 9%,
διάρκεια μέχρι την λήξη 5 έτη και αρχική
απόδοση 9%. Η τιμή του ομολόγου είναι
100.

α. Να υπολογισθούν οι ταμειακές ροές
του ομολόγου.

Περίοδος t	Ταμειακή ροή
1	4,50 \$
2	4,50 \$
3	4,50 \$
4	4,50 \$
5	4,50 \$
6	4,50 \$
7	4,50 \$
8	4,50 \$
9	4,50 \$
10	104,50 \$

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Δίνεται ομόλογο με κουπόνι 9%, διάρκεια μέχρι την λήξη 5 έτη και αρχική απόδοση 9%. Η τιμή του ομολόγου είναι 100.

Δίνεται ότι $d^2P/dy^2 = 7.781,02$. Να υπολογισθεί το μέτρο της κυρτότητας σε εξάμηνα και εν συνεχεία σε έτη.

Μέτρο Κυρτότητας σε εξάμηνα: $7.781,02 / 100,0000 = 77,8102$

Μέτρο Κυρτότητας σε έτη: $77,8102 / 4 = 19,4526$ (σημ. $4 = 2^2$)

Μέτρο Κυρτότητας σε δολάρια: $100 \times 19,4526 = 1.945,26$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΧΡΗΣΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ & ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΙΜΗΣ ΟΜΟΛΟΓΟΥ

Εχουμε 25-ετές ομόλογο με κουπόνι 6% και απόδοση στη λήξη 9%. Η τροποποιημένη διάρκεια του ομολόγου είναι 10,62 και το μέτρο κυρτότητας είναι 182,92. Αν η απαιτούμενη απόδοση αυξηθεί κατά 200 μ.β., δηλ από το 9% στο 11%, ποιά θα είναι **συνολικά** η κατά προσέγγιση ποσοστιαία μεταβολή της τιμής του ομολόγου;

a. Ποσοστιαία μεταβολή τιμής λόγω Διάρκειας:

$$-(\text{τροποποιημένη διάρκεια})(dy) = -(10,62)(0,02) = -0,2124 = -21,24\%.$$

b. Ποσοστιαία μεταβολή τιμής λόγω Κυρτότητας:

$$\frac{1}{2} (\text{μέτρο κυρτότητας})(dy)^2 = \frac{1}{2} \times (182,92) \times (0,02)^2 = 0,0366 = 3,66\%.$$

c. Η εκτίμηση της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής του ομολόγου λόγω διάρκειας και κυρτότητας είναι: $-21,24\% + 3,66\% = -17,58\%$.

Σημείωση: Η πραγματική ποσοστιαία μεταβολή της τιμής για το ομόλογο του παραδείγματος ήταν $-18,03\%$, άρα ο συνδυασμός (διάρκεια & κυρτότητα) δίνει σχετικά ικανοποιητική εκτίμηση της πραγματικής τιμής για μεγάλες μεταβολές στην απόδοση.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΧΡΗΣΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ & ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΙΜΗΣ ΟΜΟΛΟΓΟΥ

Εχουμε 25-ετές ομόλογο με κουπόνι 6% και απόδοση στη λήξη 9%. Η τροποποιημένη διάρκεια του ομολόγου είναι 10,62 και το μέτρο κυρτότητας είναι 182,92. Αν η απαιτούμενη απόδοση αυξηθεί κατά 200 μ.β., δηλ από το 9% στο 11%, ποιά θα είναι **συνολικά** η κατά προσέγγιση ποσοστιαία μεταβολή της τιμής του ομολόγου;

a. Ποσοστιαία μεταβολή τιμής λόγω Διάρκειας:

$$-(\text{τροποποιημένη διάρκεια})(dy) = -(10,62)(0,02) = -0,2124 = -21,24\%.$$

b. Ποσοστιαία μεταβολή τιμής λόγω Κυρτότητας:

$$\frac{1}{2} (\text{μέτρο κυρτότητας})(dy)^2 = \frac{1}{2} \times (182,92) \times (0,02)^2 = 0,0366 = 3,66\%.$$

c. Η εκτίμηση της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής του ομολόγου λόγω διάρκειας και κυρτότητας είναι: $-21,24\% + 3,66\% = -17,58\%$.

Σημείωση: Η πραγματική ποσοστιαία μεταβολή της τιμής για το ομόλογο του παραδείγματος ήταν $-18,03\%$, άρα ο συνδυασμός (διάρκεια & κυρτότητα) δίνει σχετικά ικανοποιητική εκτίμηση της πραγματικής τιμής για μεγάλες μεταβολές στην απόδοση.

ΑΣΚΗΣΗ: ΔΙΑΡΚΕΙΑ & ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

Δίνονται τα παρακάτω ομόλογα που καταβάλουν κουπόνι ανά εξάμηνο.

	A	B
Κουπόνι	8%	9%
Απόδοση στην λήξη	8%	8%
Ονομαστική Αξία	\$100,00	\$100,00
Τιμή	\$100,00	\$104,055

Να υπολογισθούν:

- i. Η διάρκεια κατά Macalay
- ii. Η τροποποιημένη διάρκεια
- iii. Το μέτρο της κυρτότητας.

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Διάρκεια κατά Macalay.

Ομόλογο Α:

$$\frac{\frac{1 \times 4}{1.04} + \frac{2 \times 4}{(1.04)^2} + \frac{3 \times 4}{(1.04)^3} + \frac{(4 \times 4) + (4 \times 100)}{(1.04)^4}}{100} = 3.7751$$

Ομόλογο Β:

$$\frac{\frac{1 \times 4.5}{1.04} + \frac{2 \times 4.5}{(1.04)^2} + \dots + \frac{(10 \times 4.5) + (10 \times 100)}{(1.04)^{10}}}{100} = 8.3084$$

Συνεπώς η διάρκεια κατά Macalay για το ομόλογο Α είναι $3,7751/2 = 1,8875$ ενώ για το ομόλογο Β είναι $8,3084/2 = 4,1542$.

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Τροποποιημένη Διάρκεια

Για το Ομόλογο Α: $1,8875 / 1,04 = 1,814948$

Για το Ομόλογο Β: $4,1542 / 1,04 = 3,994417$

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Υπολογισμός Μέτρου Κυρτότητας.

Δίνεται:

$$\text{Κυρτότητα} = \left[\frac{2C}{y^3} \left[1 - \frac{1}{(1+y)^n} \right] - \frac{2Cn}{y^2(1+y)^{n+1}} + \frac{n(n+1)(100 - C/y)}{(1+y)^{n+2}} \right] \left[\frac{1}{P} \right].$$

Για το Ομόλογο Α: Κυρτότητα = 17,1093

Για το Ομόλογο Β: Κυρτότητα = 79,0544

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Υπολογισμός Μέτρου Κυρτότητας:

$$\text{μέτρο κυρτότητας σε έτη} = \frac{\text{μέτρο κυρτότητας σε } m \text{ περιόδους το έτος}}{m^2}$$

Για το Ομόλογο Α:

Κυρτότητα = 17,1093, άρα το μέτρο κυρτότητας σε έτη θα είναι $17,10934/2^2 = 17,10934/4 = 4,277335$ και το μέτρο της κυρτότητας σε δολάρια θα είναι $4,277335(\$100) \approx \$427,73$.

Για το Ομόλογο Β:

Κυρτότητα = 79,0544, άρα το μέτρο κυρτότητας σε έτη θα είναι $79,0544/2^2 = 79,0544/4 = 19,7636077$, και το μέτρο κυρτότητας σε δολάρια θα είναι $19,7636077(\$100) \approx \$1,976,36$.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ: ΔΥΟ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- **Διάκριση:** Η κυρτότητα αναφέρεται στο γενικότερο σχήμα της σχέσης τιμής & απόδοσης, και του όρου μέτρο κυρτότητας, το οποίο σχετίζεται με την ποσοτικοποίηση του τρόπου μεταβολής της τιμής του ομολόγου όταν αλλάζουν τα επιτόκια.
- **Ερμηνεία:** Η προσέγγιση της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής λόγω της κυρτότητας είναι προϊόν των: (α) $\frac{1}{2}$, (β) του μέτρου κυρτότητας και (γ) του τετραγώνου της μεταβολής της απόδοσης.

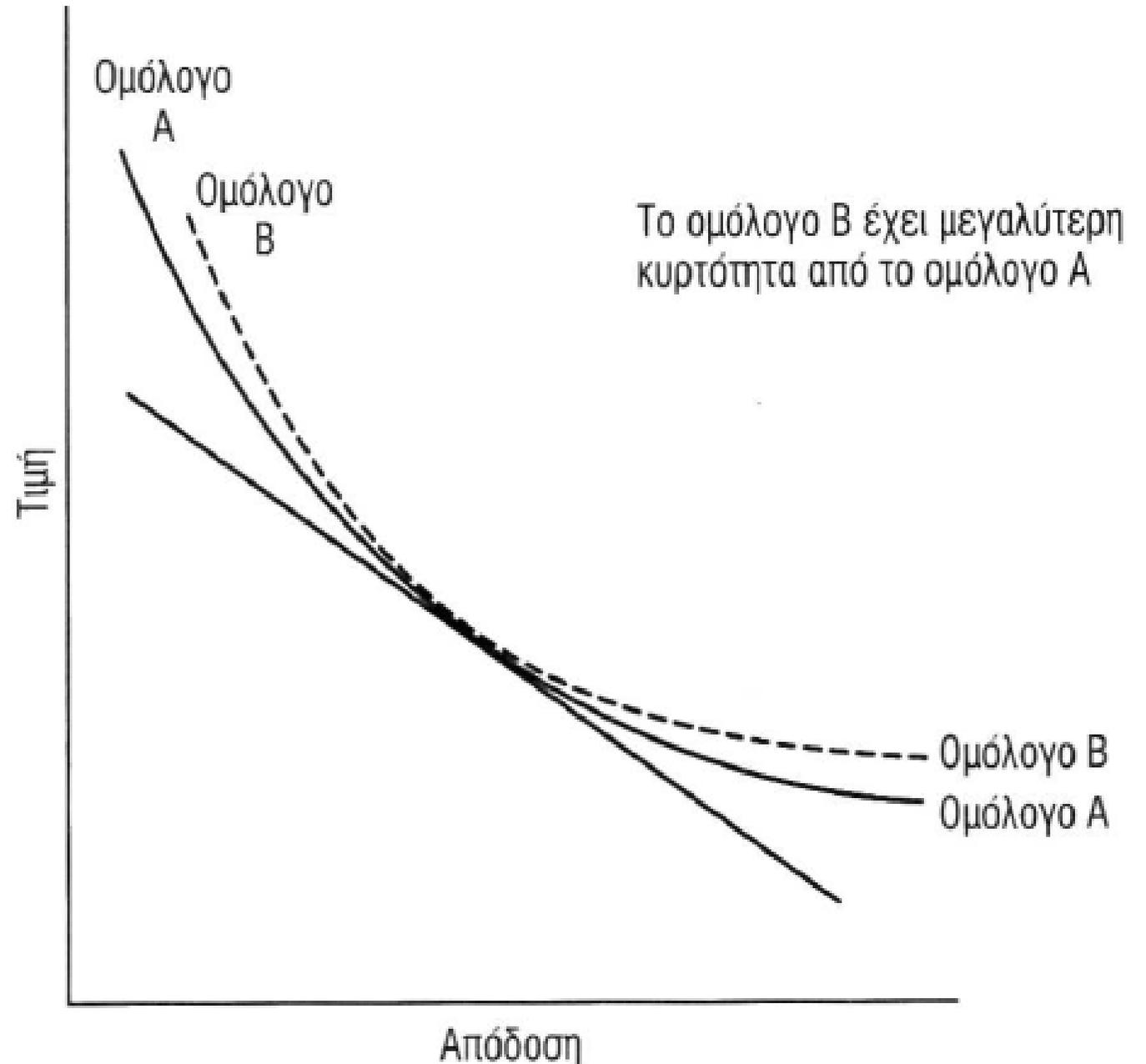
$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{2} (\text{μέτρο κυρτότητας})(dy)^2$$

ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

- Η κυρτότητα **βελτιώνει την προσέγγιση μας** για τη μεταβολή της τιμής ενός ομολόγου.
- Η κυρτότητα ενός ομολόγου έχει ακόμη μία σημαντική επίπτωση για τις επενδύσεις.
- Έστω δύο ομόλογα, με ίδια διάρκεια και απόδοση. Αλλά το ομόλογο B είναι **πιο κυρτό** (τοξοειδές) από το ομόλογο A. Ποια η επίπτωση της μεγαλύτερης κυρτότητας του B;

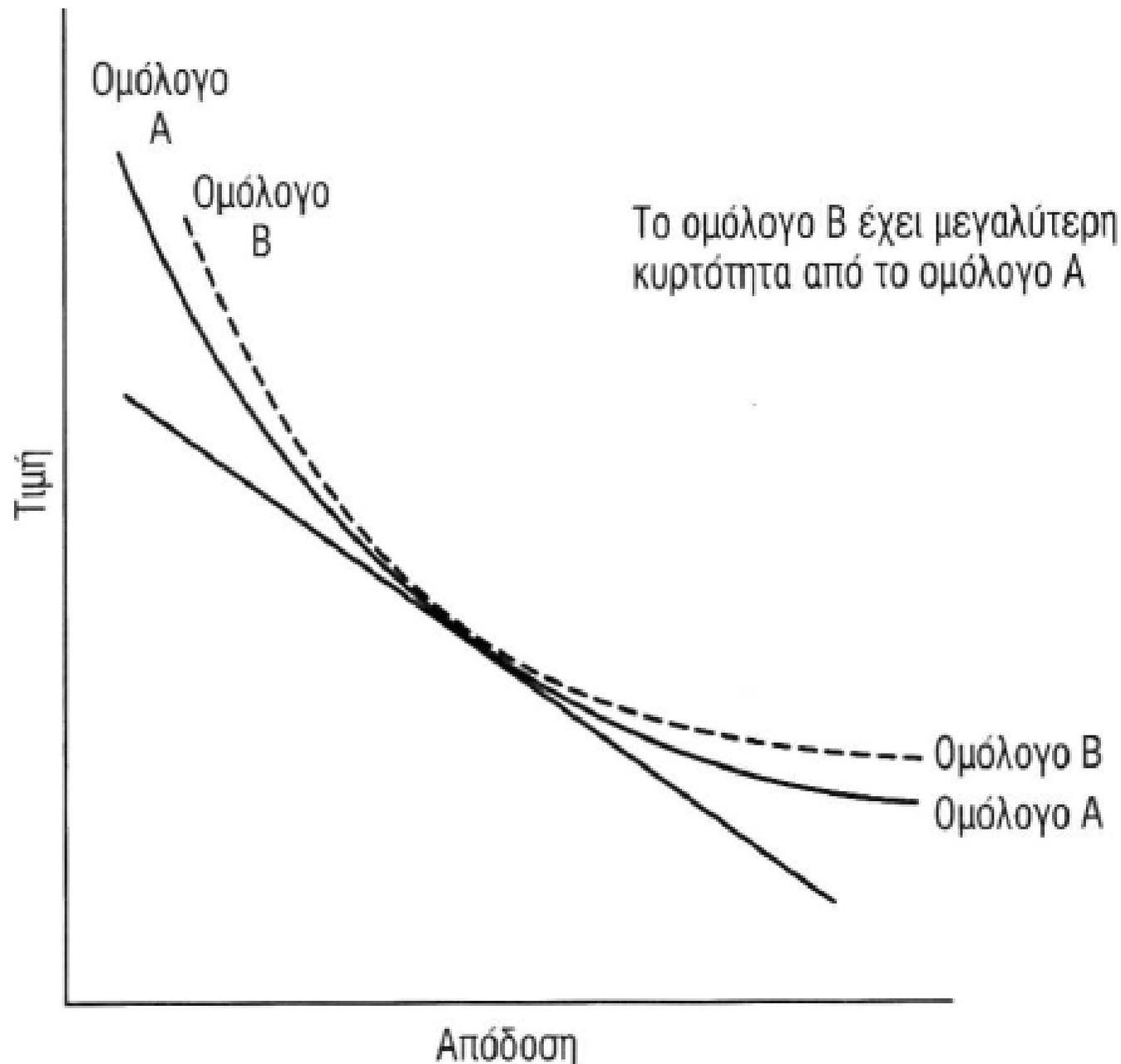
ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

- Έστω δύο ομόλογα, με ίδια διάρκεια και απόδοση. Αλλά το ομόλογο B είναι **πιο κυρτό (τοξοειδές)** από το ομόλογο A.
- Ποια η επίπτωση της μεγαλύτερης κυρτότητας του ομολόγου B;



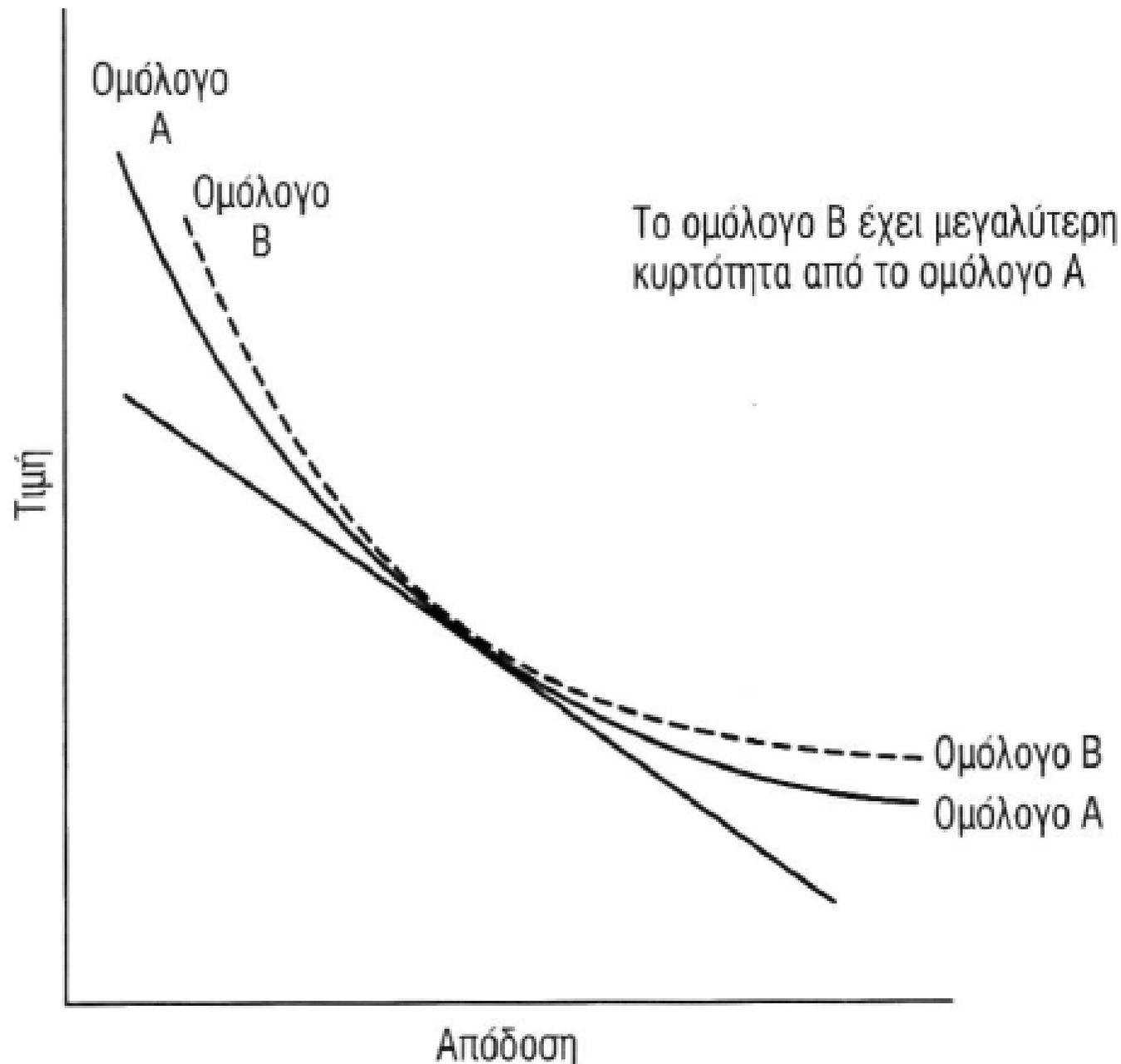
ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

- Είτε μειωθούν, είτε αυξηθούν οι αποδόσεις, το ομόλογο B θα έχει πάντα υψηλότερη τιμή από το A. Αρα, αν η απόδοση αυξηθεί, η ζημιά επί του κεφαλαίου του ομολόγου B είναι μικρότερη έναντι του ομολόγου A. Αντίθετα, μία μείωση στην απόδοση θα δημιουργήσει μεγαλύτερη ανατίμηση του B σε σχέση με το A.



ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

- Η αγορά ομολόγων θα λάβει υπόψιν της την μεγαλύτερη κυρτότητα ενός ομολόγου, όταν το τιμολογεί. Ποιό είναι προτιμότερο; Το A ή το B;
- Σημειώστε ότι αν οι αποδόσεις της αγοράς αναμένεται να αλλάξουν πολύ λίγο, οι επενδυτές δεν είναι διατεθειμένοι να πληρωσουν πολύ παραπάνω για την κυρτότητα.



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

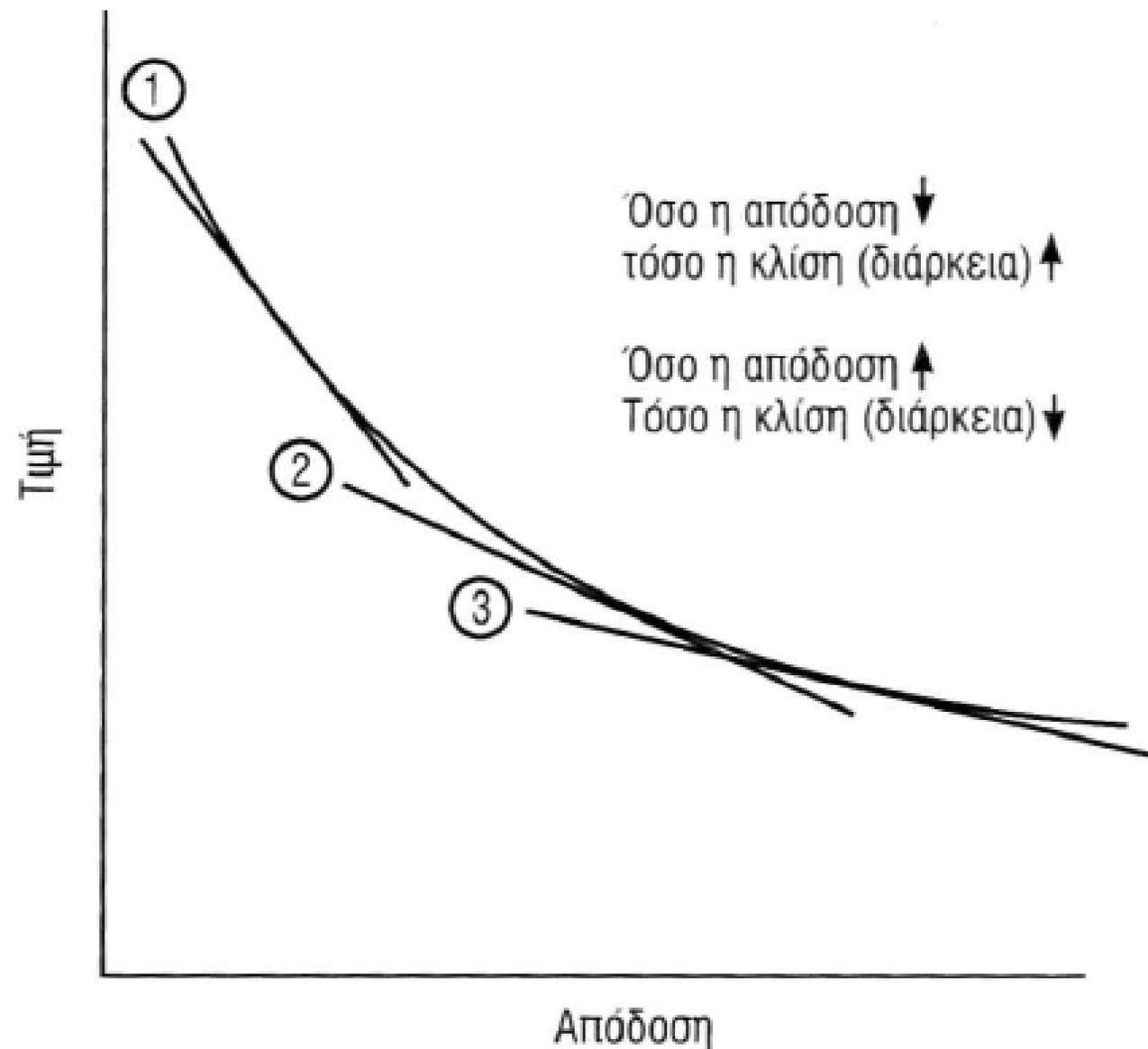
Οι ακόλουθες ιδιότητες κυρτότητας ισχύουν για όλα τα ομόλογα υπό την προϋπόθεση ότι δεν έχουν ενσωματωμένα δικαιώματα :

- Όσο αυξάνεται (μειώνεται) η απαιτούμενη απόδοση, τόσο μειώνεται (αυξάνεται) η κυρτότητα του ομολόγου. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται θετική κυρτότητα.
- Για δεδομένη απόδοση και λήξη, όσο χαμηλότερο το κουπόνι τόσο μεγαλύτερη η κυρτότητα του ομολόγου. Αρα μεγαλύτερη κυρτότητα θα έχει ένα 5-ετές ομόλογο μηδενικού κουπονιού έναντι ενός αντίστοιχου χρόνου για την λήξη με κουπόνι 2%.
- Για μία δεδομένη απόδοση και τροποποιημένη διάρκεια, όσο χαμηλότερο το κουπόνι τόσο μικρότερη η κυρτότητα του ομολόγου.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Θετική Κυρτότητα: Όσο αυξάνεται η απαιτούμενη απόδοση, τόσο μειώνεται η κυρτότητα του ομολόγου.

Όσο μειώνεται η απαιτούμενη απόδοση, τόσο αυξάνεται η κυρτότητα του ομολόγου.



ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ

- Δεν μπορούμε να βασιζόμαστε στη διάρκεια ως μοναδικό μέτρο της μεταβλητότητας της τιμής ενός ομολόγου.
- Προκειμένου να δημιουργήσουμε τη σχέση μεταξύ τροποποιημένης διάρκειας και μεταβλητότητας της τιμής του ομολόγου, υποθέτουμε ότι όλες οι ταμειακές ροές του ομολόγου προεξοφλούνται με το **ίδιο** επιτόκιο. Δεν ισχύει πάντα στην πράξη.
- Η εφαρμογή της διάρκειας σε ομόλογα με ενσωματωμένα δικαιώματα επιφέρει λάθος εκτίμηση.
- Οι συμμετέχοντες στην αγορά συχνά συγχέουν το κύριο σκοπό της διάρκειας, αφού συνεχώς αναφέρονται σε αυτό ως ένα

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ Ι

- Η σχέση τιμής - απόδοσης για όλα τα ομόλογα χωρίς ενσωματωμένα δικαιώματα είναι κυρτή.
- Η μεταβλητότητα της τιμής ενός ομολόγου χωρίς ενσωματωμένα δικαιώματα έχει τρεις ιδιότητες:
 - ✓ για **μικρές** μεταβολές της απόδοσης, η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής είναι **συμμετρική**,
 - ✓ για **μεγάλες** μεταβολές της απόδοσης, η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής είναι **ασύμμετρη** και
 - ✓ για μεγάλες μεταβολές της απόδοσης η ανατίμηση της τιμής είναι μεγαλύτερη από την υποτίμηση της τιμής για μία δεδομένη αλλαγή στην απόδοση.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ II

- Η μεταβλητότητα της τιμής ενός ομολόγου (χωρίς ενσωματωμένα δικαιώματα) επηρεάζεται από δύο χαρακτηριστικά του ομολόγου (τη λήξη και το κουπόνι) και το επίπεδο των αποδόσεων στο οποίο διαπραγματεύεται το ομόλογο.
- Για ένα δεδομένο κουπόνι και μία δεδομένη απόδοση, όσο μικρότερο το κουπόνι τόσο μεγαλύτερη η μεταβλητότητα της τιμής.
- Για ένα δεδομένο κουπόνι και μία δεδομένη απόδοση, όσο μεγαλύτερη η διάρκεια μέχρι τη λήξη τόσο μεγαλύτερη η μεταβλητότητα της τιμής.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΙΙΙ

- Η διάρκεια δίνει καλά αποτελέσματα στην εκτίμηση της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής ενός ομολόγου για μικρές αλλαγές στις αποδόσεις.
- Η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής μέσω της κυρτότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί συμπληρωματικά στην εκτίμηση της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής με την εφαρμογή της διάρκειας.
- Από κοινού, η διάρκεια και το μέτρο κυρτότητας δίνουν μία άριστη προσέγγιση της μεταβολής της τιμής των ομολογων σε αλλαγές της απόδοσης.

The background of the image is a collage of Euro currency. It features several banknotes, including a 20 Euro note in blue, a 50 Euro note in orange, and a 10 Euro note in red. Scattered throughout are various Euro coins, such as 1 Euro, 2 Euro, and 5 Euro pieces. The text is overlaid on the left side of this collage.

ΣΑΣ ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ
ΓΙΑ ΤΗΝ
ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΑΣ

N

D

S