Νόμος του Gauss

1. Μία αγώγιμη σφαίρα με φορτίο ***q*** έχει ακτίνα ***α***. Η σφαίρα βρίσκεται στο εσωτερικό μίας κοίλης ομόκεντρης αγώγιμης σφαίρας με εσωτερική ακτίνα ***b*** και εξωτερική ακτίνα ***c***. Η κοίλη σφαίρα δεν φέρει φορτίο. α) Βρείτε εκφράσεις του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσει της απόστασης ***r*** από το κέντρο για τις περιοχές ***r < α, α < r < b, b < r < c***, και ***c < r***. β) Σχεδιάστε μια γραφική παράσταση του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου σαν συνάρτηση του ***r*** από ***r = 0*** έως ***r = 2c***. γ) Ποιο είναι το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια της κοίλης σφαίρας; δ) Στην εξωτερική επιφάνεια; ε) Να παραστήσετε το φορτίο στην μικρή σφαίρα με τέσσερα θετικά πρόσημα. Σχεδιάστε τις δυναμικές γραμμές του συστήματος μέσα σε σφαιρικό όγκο ακτίνας ***2c***.

Λύση

α) Εξετάζουμε την κάθε περίπτωση χωριστά.

- ***r < α,*** η σφαίρα είναι αγώγιμη και επομένως στο εσωτερικό της ισχύει $\left|\vec{E}\right| = 0$
- ***α < r < b,*** στο χώρο μεταξύ της σφαίρας ακτίνας ***α*** και εσωτερικής επιφάνειας της κοίλης σφαίρας ***b***, θεωρούμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας ***r*** έτσι έχουμε:

$$\Phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = |E| 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |E| = \frac{q}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon_0} \text{ για } \boldsymbol{\alpha < r < b},$$

- ***b < r < c***, η κοίλη επιφάνεια δεν έχει φορτίο (είναι ηλεκτρικά ουδέτερη) όμως εξ' επαγωγής αναπτύσσεται φορτίο ***q΄ = - q*** στη εσωτερική επιφάνεια της κοίλης σφαίρας λόγω του φορτίου της εσωτερικής σφαίρας. Έτσι στην περίπτωση αυτή για ***b < r < c***, το πεδίο είναι μηδέν γιατί:

$$\Phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = |E| 4\pi r^2 = \frac{q_{o\lambda}}{\varepsilon_0} \Rightarrow |E| = \frac{(q + q')}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon_0} =$$

$$|E| = \frac{(q - q)}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon_0} = 0$$

- ***c < r***, όπως αναφέραμε πιο πάνω η κοίλη επιφάνεια δεν έχει φορτίο (είναι ηλεκτρικά ουδέτερη) όμως εξ' επαγωγής αναπτύσσεται φορτίο ***q΄ = -q*** στη εσωτερική επιφάνεια της κοίλης σφαίρας λόγω του φορτίου της εσωτερικής σφαίρας και ένα φορτίο ***q΄΄= q*** στην εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας. Έτσι στην περίπτωση αυτή για ***c < r***, το πεδίο είναι:

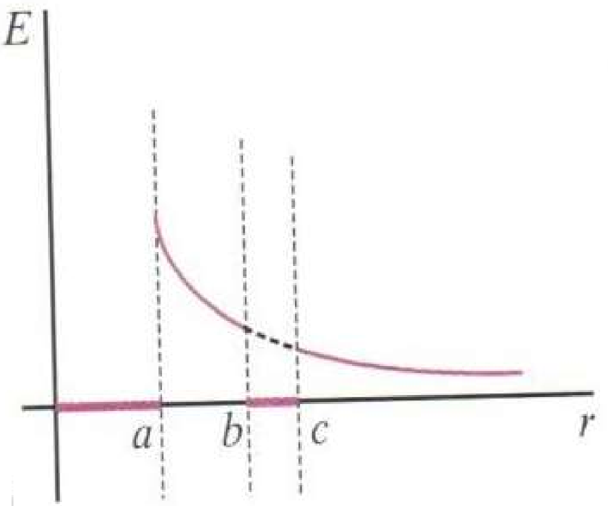
$$\Phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = |E| 4\pi r^2 = \frac{q_{o\lambda}}{\varepsilon_0} \Rightarrow |E| = \frac{(q+q'+q'')}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon_0} \Rightarrow |E| = \frac{(q-q+q)}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon_0} \Rightarrow |E| = \frac{q}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon_0}$$

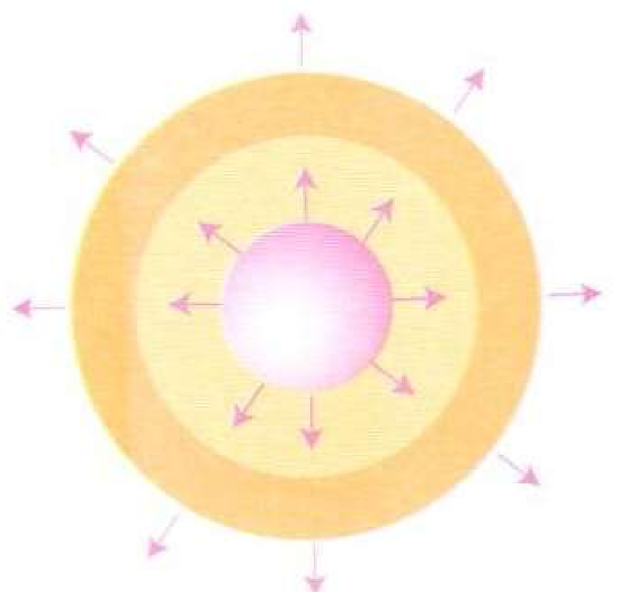
β) Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.

γ) Το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια της κοίλης σφαίρας είναι – ***q***.

δ) Το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια της κοίλης σφαίρας είναι ***q***.

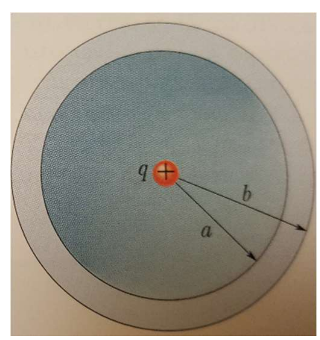
ε) Οι δυναμικές γραμμές φαίνονται στο σχήμα.





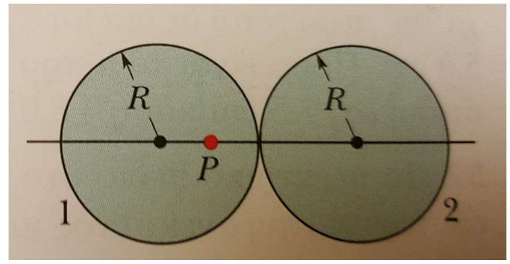
Άσκηση 49.23 HR

Στο σχήμα ένα μη αγώγιμο σφαιρικό κέλυφος, εσωτερικής ακτίνας α = 2 cm και εξωτερικής ακτίνας b = 2.4 cm, έχει (μέσα στον όγκο του) θετική χωρική πυκνότητα ρ = A / r, όπου A μια σταθερά και r είναι η απόσταση από το κέντρο του κελύφους. Επιπλέον, μια μικρή μπάλα φορτίου q= 45fC είναι τοποθετημένη σ' αυτό το κέντρο. Ποια τιμή θα πρέπει να έχει το A, αν το ηλεκτρικό πεδίο εντός του κελύφους (α ≤ r ≤ b) είναι ομογενές;



Άσκηση 54.23 HR

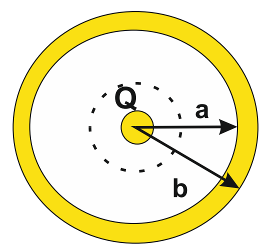
Το σχήμα δείχνει, σε διατομή, δύο συμπαγείς σφαίρες με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο στους όγκους τους. Καθεμία έχει ακτίνα R. Το σημείο P βρίσκεται πάνω σε μία ευθεία που συνδέει τα κέντρα των σφαιρών, σε απόσταση R / 2 από το κέντρο της σφαίρας 1. Αν το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο P είναι μηδέν, πόσος είναι ο λόγος q_2 / q_1 του συνολικού φορτίου q_2 στη σφαίρα 2 προς το συνολικό φορτίο q_1 στη σφαίρα 1;



2. Αγώγιμος μονωμένος σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα **α** και εξωτερική ακτίνα **b** έχει θετικό φορτίο **Q** τοποθετημένο στο κέντρο του. Το ολικό φορτίο πάνω στον φλοιό είναι, συνολικά, **-3Q**. Α) Βρείτε εκφράσεις για το ηλεκτρικό πεδίο συναρτήσει της απόστασης **r** από το κέντρο για τις περιοχές **r < α**, **α < r < b** και **r > b**. Β) Ποια είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην εσωτερική επιφάνεια του αγώγιμου φλοιού; Γ) Ποια είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην εξωτερική επιφάνεια του αγώγιμου φλοιού; Δ) Σχεδιάστε ένα διάγραμμα στο οποίο να φαίνονται οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές και η θέση όλων των φορτίων.

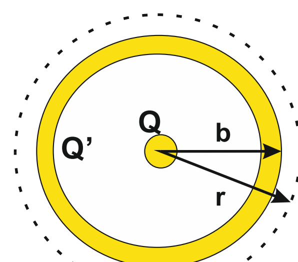
Λύση

Α) **r < α** :Θεωρούμε μια σφαιρική γκαουσιανή κατανομή με ακτίνα **r < α** όπως αυτή του σχήματος με τη διακεκομμένη γραμμή και από το νόμο του Gauss έχουμε:

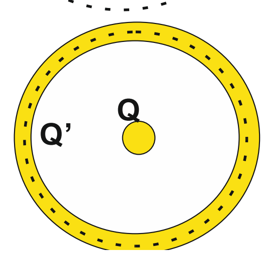


$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint |E| \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |E| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ για **r < α** με κατεύθυνση $\hat{\boldsymbol{r}}$.

α < r < b : Επειδή ο μονωμένος σφαιρικός φλοιός είναι αγώγιμος το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του φλοιού είναι ίσο με μηδέν.



r > b: Στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού υπάρχει φορτίο **- 2Q** γιατί στην εσωτερική επιφάνεια υπάρχει φορτίο – **Q** (στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού υπάρχει ουδετερότητα) ενώ το συνολικό φορτίο είναι **- 3Q**. Το φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο. Θεωρούμε γκαουσιανή σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα **r > b** το ηλεκτρικό πεδίο είναι:



$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint |E| \cdot 4\pi r^2 = \frac{2Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |E| = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

για **r > b** με κατεύθυνση **-**$\hat{\boldsymbol{r}}$.

Β) Στο κέντρο του σφαιρικού φλοιού βρίσκεται φορτίο **Q**. Επομένως θα πρέπει να εμφανίζεται εξ επαγωγής φορτίο **Q’** στην εσωτερική επιφάνεια του φλοιού. Για τον υπολογισμό του φορτίου αυτού θεωρούμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια στο εσωτερικό του φλοιού όπως φαίνεται στο τρίτο σχήμα. Ο νόμος του Gauss δίνει:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{o\lambda}}{\varepsilon_0}$$

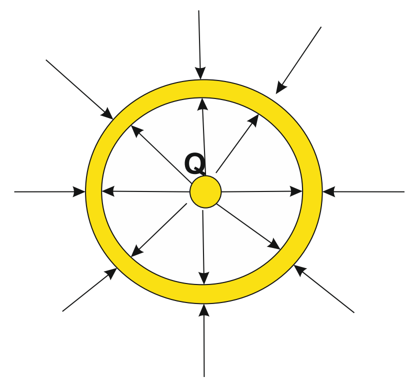
Όπου $\mathbf{q_{o\lambda}}$ **= Q + Q’**. Επειδή το πεδίο είναι μηδέν πάνω στην γκαουσιανή επιφάνεια τότε **Q + Q’**= 0. Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην εσωτερική επιφάνεια του φλοιού είναι :

$$\sigma = -\frac{Q}{4\pi\alpha^2}$$

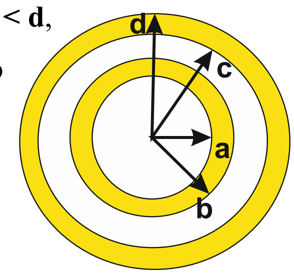
Γ) Το ολικό φορτίο στο σφαιρικό φλοιό είναι **-3Q** με αποτέλεσμα το φορτίο στην εξωτερική του επιφάνεια πρέπει να είναι ίσο με **-2Q** και η επιφανειακή πυκνότητα στην εξωτερική επιφάνεια θα είναι :

$$\sigma = -\frac{2Q}{4\pi b^2}$$

Δ) Οι δυναμικές γραμμές φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



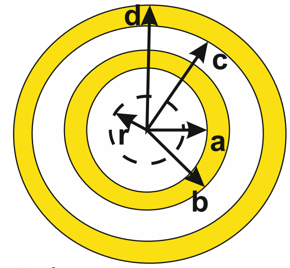
3. Μικρός αγώγιμος σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα **a** και εξωτερική ακτίνα **b** είναι ομόκεντρος με ένα μεγαλύτερο αγώγιμο σφαιρικό φλοιό με εσωτερική ακτίνα **c** και εξωτερική ακτίνα **d** (σχήμα 1). Ο εσωτερικός φλοιός έχει ολικό φορτίο **+2q** και ο εξωτερικός φλοιός έχει συνολικό φορτίο **+4q**. Α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σαν συνάρτηση του **q** και της απόστασης **r** από το κοινό κέντρο των δύο φλοιών για i**) r < a**, ii) **a< r < b**, iii) **b < r < c**, iv) **c < r < d**, v) **r > d**. β) Ποιο είναι το ολικό φορτίο πάνω στην i) εσωτερική επιφάνεια του μικρού φλοιού; ii) εξωτερική επιφάνεια του μικρού φλοιού; iii) εσωτερική επιφάνεια του μεγάλου φλοιού; iv) εξωτερική επιφάνεια του μεγάλου φλοιού;



Σχήμα 1

Λύση

Α) i: Στο σχήμα 2 θεωρούμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια με ακτίνα **r < a** (διακεκομμένη) και εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss:

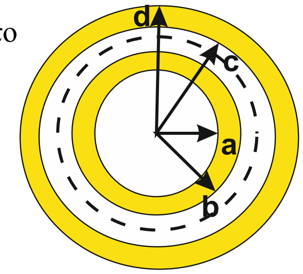


$$\Phi = \oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{A} = 0$$

Γιατί η γκαουσιανή επιφάνεια δεν περικλείει φορτίο.

Σχήμα

Επομένως $\quad |\boldsymbol{E}| = 0\ ,\quad \boldsymbol{r} < \boldsymbol{a}$



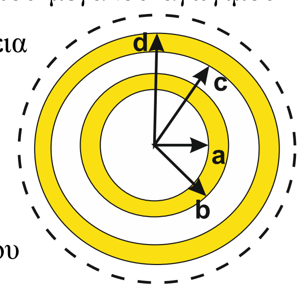
ii) Θεωρώντας σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια με ακτίνα **a**< **r** < **b**, δηλαδή στο εσωτερικό του μικρού αγώγιμου φλοιού, τότε το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγώγιμου φλοιού είναι μηδέν. Επομένως $|\boldsymbol{E}| = 0\ ,\quad \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}$

iii) Θεωρώντας σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια με ακτίνα **b** < **r** < **c** (σχήμα 3) και εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss έχουμε:

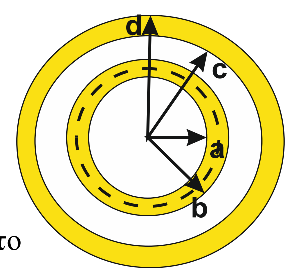
$$\Phi = \oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{A} = \frac{q_{o\lambda}}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\boldsymbol{E}| \cdot 4\pi r^2 = \frac{2q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\boldsymbol{E}| = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad \gamma\iota\alpha\ \boldsymbol{b} < r < c$$

iv) Θεωρώντας σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια με ακτίνα **c** < **r** < **d**, δηλαδή στο εσωτερικό του μεγάλου αγώγιμου φλοιού, τότε το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγώγιμου φλοιού είναι μηδέν. Επομένως $|\boldsymbol{E}| = 0\ ,\quad \boldsymbol{c} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{d}$

v) Θεωρούμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια με ακτίνα **r** > **d**. Το φορτίο του μεγάλου αγώγιμου φλοιού είναι **+4q**, το οποίο ως γνωστό κατανέμεται στην εξωτερική επιφάνεια του αγώγιμου φλοιού. Στην εσωτερική επιφάνεια του μεγάλου αγώγιμου φλοιού εξ΄ επαγωγής αναπτύσσεται φορτίο **-2q**, λόγω της ύπαρξης του μικρού αγώγιμου φλοιού. Για να διατηρηθεί όμως η ισορροπία του φορτίου θα πρέπει να εμφανιστεί στην εξωτερική επιφάνεια του μεγάλου αγώγιμου φλοιού ένα επιπλέον φορτίο **+2q**. Έτσι τώρα το συνολικό φορτίο που υπάρχει στην εξωτερική επιφάνεια του μεγάλου φλοιού θα είναι ίσο με **+6**q. Τελικά εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss για την επιφάνεια του σχήματος έχουμε



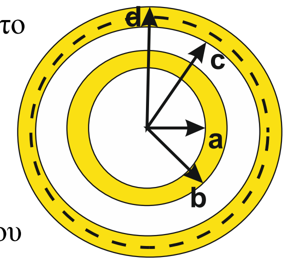
$$\Phi = \oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{A} = \frac{q_{o\lambda}}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\boldsymbol{E}| \cdot 4\pi r^2 = \frac{6q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\boldsymbol{E}| = \frac{6q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\quad \gamma\iota\alpha\ \boldsymbol{r} > d$$



B) i: Θεωρούμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια με ακτίνα **a**< **r** < **b**. Η επιφάνεια αυτή βρίσκεται στο εσωτερικό του μικρού αγώγιμου φλοιού. Όπως είναι γνωστό το φορτίο του φλοιού είναι συγκεντρωμένο στην εξωτερική του επιφάνεια άρα αυτή η γκαουσιανή επιφάνεια δεν περικλείει φορτίο και άρα το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια του μικρού φλοιού είναι μηδέν.

ii) Στην εξωτερική επιφάνεια του μικρού αγώγιμου φλοιού θα είναι συγκεντρωμένο όλο το φορτίο του αγωγού, δηλαδή θα υπάρχει φορτίο **+2q**.

iii) Θεωρούμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια με ακτίνα **c < r < d**, δηλαδή στο εσωτερικό του μεγάλου αγώγιμου σφαιρικού φλοιού (διπλανό σχήμα). Η επιφάνεια αυτή περικλείει συνολικό φορτίο ίσο με μηδέν. Αυτό συμβαίνει διότι, λόγω του φορτίου **+2q** που υπάρχει στην εξωτερική επιφάνεια του μικρού φλοιού, εμφανίζεται εξ' επαγωγής στην εσωτερική επιφάνεια του μεγάλου αγώγιμου φλοιού φορτίο ίσο με **-2q** για να διατηρηθεί η ισορροπία του φορτίου. Έτσι στην εσωτερική επιφάνεια του μεγάλου αγώγιμου φλοιού υπάρχει φορτίο **-2q**.



iv) Το συνολικό φορτίο του μεγάλου αγώγιμου φλοιού είναι ίσο με **+4q**, αυτό σημαίνει ότι η εξωτερική επιφάνεια του φλοιού αυτού θα πρέπει να έχει συνολικό φορτίο ίσο με **+6q**.

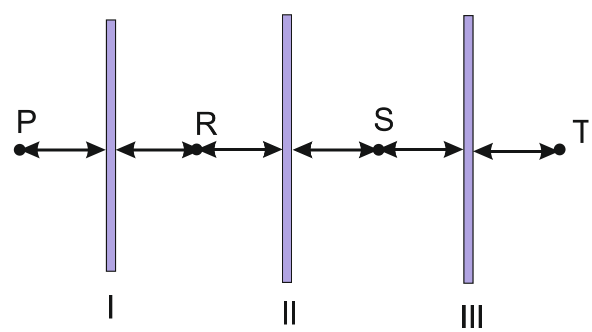
Για εξάσκηση να επαναλάβετε το πιο πάνω πρόβλημα όταν ο εξωτερικός φλοιός έχει συνολικό φορτίο -2q και ο εσωτερικός φλοιός έχει φορτίο +2q.

4. Τρία μεγάλα παράλληλα μονωτικά φύλλα έχουν επιφανειακές πυκνότητες +0,02 C / m^2, +0,01C/m^2, και -0,02 C / m^2 αντίστοιχα. Τα γειτονικά φύλλα απέχουν μεταξύ τους 0,3m. Υπολογίστε το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο (μέτρο κατεύθυνση) που οφείλεται και στο τρία φύλλα: α) στο σημείο **P** (0,15m του φύλου I), β) στο σημείο **R** (στο μέσον μεταξύ των φύλλων I και II), γ) στο σημείο **S** (στο μέσον μεταξύ των φύλλων II και III) δ) στο σημείο **T** (0,15m δεξιά του φύλλου III).

Λύση

Σύμφωνα με την εκφώνηση τα φύλλα είναι μεγάλα, έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί κάθε φύλλο έχει μέτρο :

$$|\boldsymbol{E_i}| = \frac{|\sigma_i|}{2\varepsilon_0}, i = I, II, III$$



Όπου **σ**$_i$ είναι οι αλγεβρικές τιμές των επιφανειακών πυκνοτήτων φορτίου.

α) Λαμβάνοντας ως θετική την φορά από το **P** στο **T**, το συνιστάμενο πεδίο στο **P** είναι :

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda P} = -\boldsymbol{E}_I - \boldsymbol{E}_{II} + \boldsymbol{E}_{III} = \left[-\frac{\sigma_I}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{II}}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{III}}{2\varepsilon_0}\right]\hat{x} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda P} = -\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})\hat{x}$$

Αντικαθιστούμε τις αλγεβρικές τιμές των επιφανειακών πυκνοτήτων.

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda P} = -\frac{1}{2\left(8{,}854 \times 10^{-1} \ \ \frac{C^2}{Nm^2}\right)}\left[(0{,}02 + 0{,}01 - 0{,}02)\frac{C}{m^2}\right]\hat{x}$$

$$= \left(5{,}65 \times 10^8 \frac{N}{C}\right)\hat{x}$$

Το ολικό ηλεκτρικό πεδίο στο **P** είναι:

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda P} = \left(5{,}65 \times 10^8 \frac{N}{C}\right)\hat{x}$$

β)Στο σημείο **R** το ολικό πεδίο είναι:

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda R} = \boldsymbol{E}_I - \boldsymbol{E}_{II} + \boldsymbol{E}_{III} = \left[\frac{\sigma_I}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{II}}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_{III}}{2\varepsilon_0}\right]\hat{x} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda R} = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_I - \sigma_{II} - \sigma_{III})\hat{x}$$

Αντικαθιστούμε τις αλγεβρικές τιμές των επιφανειακών πυκνοτήτων.

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda R} = \frac{1}{2\left(8{,}854 \times 10^{-1} \ \ \frac{C^2}{Nm^2}\right)}\left[(0{,}02 - 0{,}01 - 0{,}02)\frac{C}{m^2}\right]\hat{x}$$

$$= \left(-5{,}65 \times 10^8 \frac{N}{C}\right)\hat{x}$$

Το ολικό ηλεκτρικό πεδίο στο **R** είναι:

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda R} = \left(-5{,}65 \times 10^8 \frac{N}{C}\right)\hat{x}$$

γ) Στο σημείο **S** το ολικό πεδίο είναι:

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda S} = \boldsymbol{E}_I + \boldsymbol{E}_{II} + \boldsymbol{E}_{III} = \left[\frac{\sigma_I}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_{II}}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_{III}}{2\varepsilon_0}\right]\hat{x} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda S} = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})\hat{x}$$

Αντικαθιστούμε τις αλγεβρικές τιμές των επιφανειακών πυκνοτήτων.

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda S} = \frac{1}{2\left(8{,}854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}\right)}\left[(0{,}02 + 0{,}01 - 0{,}02)\frac{C}{m^2}\right]\hat{x} = \left(5{,}65 \times 10^8 \frac{N}{C}\right)\hat{x}$$

Το ολικό ηλεκτρικό πεδίο στο **S** είναι:

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda S} = \left(2{,}82 \times 10^9 \frac{N}{C}\right)\hat{x}$$

δ) Στο σημείο **T** το ολικό πεδίο είναι:

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda T} = \boldsymbol{E}_{I} + \boldsymbol{E}_{II} - \boldsymbol{E}_{III} = \left[\frac{\sigma_I}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_{II}}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_{III}}{2\varepsilon_0}\right]\hat{x} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda T} = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})\hat{x}$$

Αντικαθιστούμε τις αλγεβρικές τιμές των επιφανειακών πυκνοτήτων.

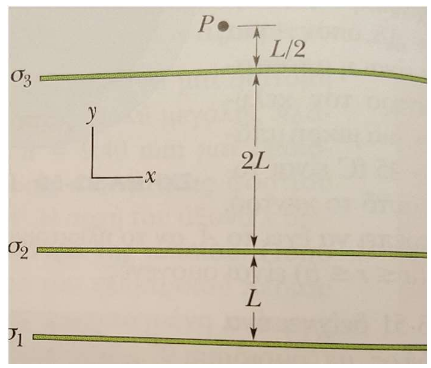
$$\boldsymbol{E}_{o\lambda T} = \frac{1}{2\left(8{,}854 \times 10^{-12}\,\dfrac{C^2}{Nm^2}\right)}\left[(0{,}02 + 0{,}01 - 0{,}02)\,\frac{C}{m^2}\right]\hat{x} = \left(5{,}65 \times 10^{8}\,\frac{N}{C}\right)\hat{x}$$

Το ολικό ηλεκτρικό πεδίο στο **T** είναι:

$$\boldsymbol{E}_{o\lambda T} = \left(5{,}65 \times 10^{8}\,\frac{N}{C}\right)\hat{x}$$

Άσκηση 65.23 HR

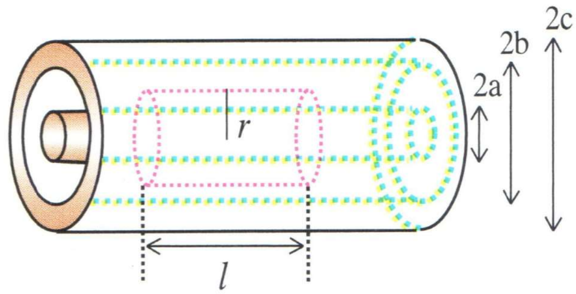
Το σχήμα δείχνει, σε διατομή, τρία απείρως μεγάλα, με αγώγιμα φύλλα πάνω στα οποία κατανέμεται ομοιόμορφα φορτίο. Οι επιφανειακές πυκνότητες φορτίων είναι $\sigma_1 = +\,2\ \mu C\,/\,m^2$, $\sigma_2 = +\,4\ \mu C\,/\,m^2$, και $\sigma_3 = -\,5\ \mu C\,/\,m^2$ και η απόσταση L = 1,5 cm. Σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων, πόσο είναι το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P;



5. Ένα μακρύ ομοαξονικό καλώδιο αποτελείται από κυλινδρικό αγωγό με ακτίνα **a** και ένα εξωτερικό ομοαξονικό κύλινδρο με εσωτερική ακτίνα **b** και εξωτερική ακτίνα **c**. Ο εξωτερικός κύλινδρος στηρίζεται σε μονωτικά στηρίγματα και δεν έχει καθόλου φορτία. Ο εσωτερικός κύλινδρος είναι ομοιόμορφα φορτισμένος. Η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι **λ**. Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο α) σε οποιοδήποτε σημείο μεταξύ των κυλίνδρων σε απόσταση **r** από τον άξονα. β) Σε οποιοδήποτε σημείο έξω από τον εξωτερικό κύλινδρο. γ) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου σαν συνάρτηση της απόστασης **r** από τον άξονα του καλωδίου από **r** = 0 μέχρι **r = 2c**. δ) Να βρεθεί το φορτίο ανά μονάδα μήκους στην εσωτερική επιφάνεια και στην εξωτερική επιφάνεια του εξωτερικού κυλινδρικού αγωγού.

Λύση

α) Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του κυλινδρικού αγωγού με ακτίνα **a** είναι ίσο προς μηδέν, άρα: $|\boldsymbol{E}| = 0,\ \boldsymbol{r} < \boldsymbol{a}$



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα ομοαξονικό καλώδιο. Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss για την κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια με ακτίνα **r** και μήκος ***l***. Λόγω συμμετρίας το μέτρο του πεδίου ***E*** σε απόσταση **r** από τον άξονα είναι ίδιο και έχει πάντα διεύθυνση κάθετη προς τον άξονα. Από τον νόμο του Gauss έχουμε:

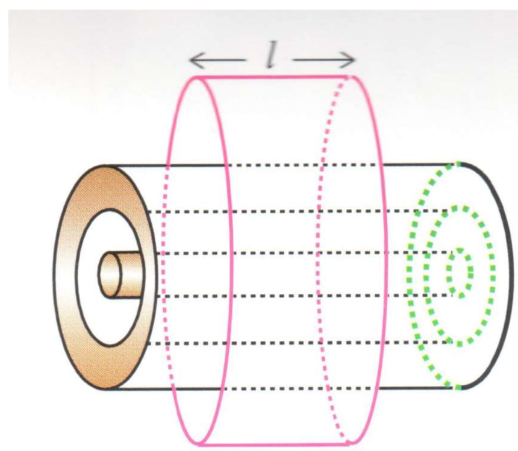
$$\Phi = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{E}| \oint d\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{E}| \cdot 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\boldsymbol{E}| = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l}$$

Όπου **q** το φορτίο στο εσωτερικό του κυλίνδρου μήκους ***l***. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η γραμμική πυκνότητα φορτίου ***λ*** είναι ***λ* = *q* / *l*** τότε έχουμε:

$$|\boldsymbol{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\ \gamma\iota\alpha\ \boldsymbol{\alpha} < r < b$$

Θεωρούμε τώρα μια γκαουσιανή ομοαξονική κυλινδρική επιφάνεια με ακτίνα **b < r < c**, δηλαδή στο εσωτερικό του εξωτερικού ομοαξονικού κυλίνδρου. Όπως είναι γνωστό το πεδίο στο εσωτερικό αγωγού είναι ίσο με μηδέν, άρα:

$$|\boldsymbol{E}| = 0, \qquad \boldsymbol{b} < r < \boldsymbol{c}$$

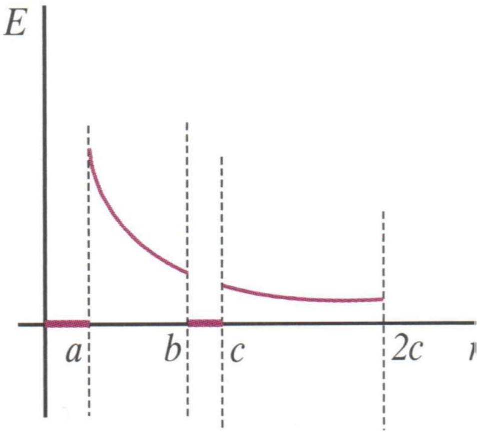


β) Θεωρούμε τώρα γκαουσιανή ομοαξονική κυλινδρική επιφάνεια που περιβάλει τον εξωτερικό κύλινδρο και τον εσωτερικό φορτισμένο κύλινδρο (διπλανό σχήμα). Ο εξωτερικός κύλινδρος δεν έχει φορτία. Εξ' επαγωγής αναπτύσσονται φορτία **–q** στην εσωτερική του επιφάνεια σε μήκος ***l***, και λόγω ηλεκτρικής ουδετερότητας αναπτύσσονται φορτία **+q** στην εξωτερική του επιφάνεια σε μήκος ***l***. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss έχουμε:

$$\Phi = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{E}| \oint d\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{E}| \cdot 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\boldsymbol{E}| = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την γραμμική πυκνότητα φορτίου έχουμε τελικά

$$|\boldsymbol{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\ {}_0 r}\ \gamma\iota\alpha\ \boldsymbol{r} > c$$



Με κατεύθυνση ακτινική προς τα έξω.

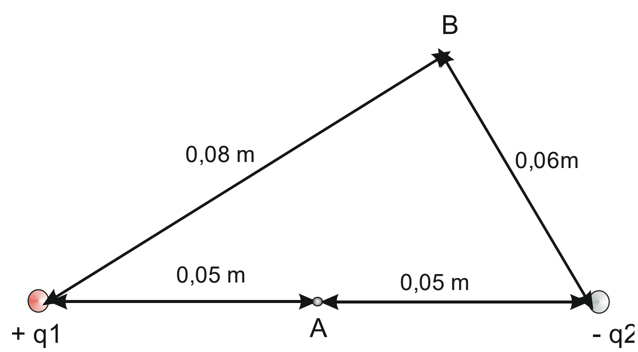
γ) Η γραφική παράσταση του μέτρου Ε του ηλεκτρικού πεδίο ως συνάρτηση της απόστασης **r** από τον άξονα φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

δ) Το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια του εξωτερικού κυλίνδρου εξ' επαγωγής είναι ίσο με **–q** και άρα το ανά μονάδα μήκους φορτίο θα είναι ίσο με **–*λ***. Στην εξωτερική επιφάνεια του εξωτερικού κυλίνδρου λόγω ηλεκτρικής ουδετερότητας εμφανίζεται φορτίο ίσο με **+*q*** και επομένως το ανά μονάδα μήκους φορτίο θα είναι ίσο με ***λ***.

Ηλεκτρικό Δυναμικό

1. Δύο σημειακά φορτία q_1 =+2,4 nC q_2 =-6,5 nC βρίσκονται σε απόσταση 0,1 m το ένα από το άλλο. Το σημείο Α βρίσκεται στο μέσον της απόστασής τους και το Β 0,08 m από το q_1 και 0,06 m από το q_2 (σχήμα). Να βρείτε α) το δυναμικό στο Α, β) το δυναμικό στο Β, γ) το έργο που παράγεται από το ηλεκτρικό πεδίο κατά την κίνηση φορτίου 2,5nC από το Β στο σημείο Α.

Λύση



Το δυναμικό σε ένα σημείο που οφείλεται σε κατανομή σημειακών φορτίων δίνεται από τη σχέση:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q}{r_i}$$

α) Το δυναμικό στο Α είναι:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q_1}{r_{A1}} + \frac{q_2}{r_{A2}}\right)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$V_A = (8{,}988\times 10^9 N\cdot m^2\cdot C^{-2})\cdot\left(\frac{2{,}4\times 10^{-9}C}{0{,}05m} + \frac{-6{,}5\times 10^{-9}C}{0{,}05m}\right) = -737\ V$$

β) Με τον ίδιο τρόπο έχουμε για το δυναμικό στο Β:

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{r_{B1}} + \frac{q_2}{r_{B2}}\right)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$V_B = (8{,}988 \times 10^9 N \cdot m^2 \cdot C^{-2}) \cdot \left(\frac{2{,}4 \times 10^{-9}C}{0{,}08m} + \frac{-6{,}5 \times 10^{-9}C}{0{,}06m}\right) = -704{,}06\, V$$

γ) Το έργο που παράγεται από το πεδίο κατά την κίνηση του φορτίου από το Β στο Α δίνει η σχέση:

$$W_{A\to B} = q \cdot (V_B - V_A) \Rightarrow W_{A\to B} = (2{,}5 \times 10^{-9}C) \cdot (-704{,}06 + 737)$$
$$= 8{,}1 \times 10^{-8}J$$

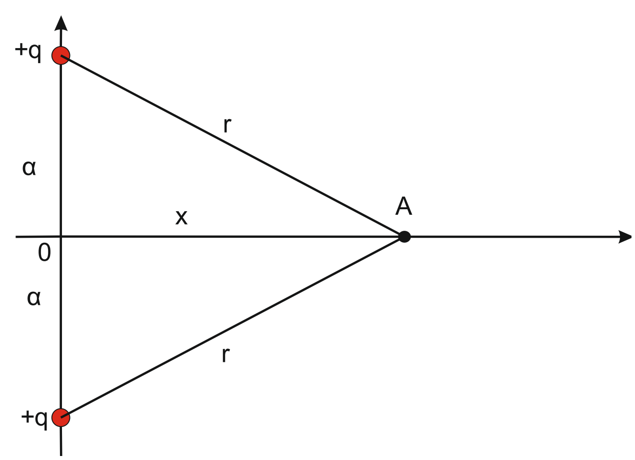
Το θετικό πρόσημο σημαίνει ότι το πεδίο προσφέρει την ενέργεια για τη μετακίνηση αυτή.

2. Δύο θετικά σημειακά φορτία q, είναι τοποθετημένα στον άξονα y και στα σημεία y = + α και y= - α. Α) Σχεδιάστε ένα διάγραμμα που να δείχνει τις θέσεις των φορτίων. Β) Ποιο είναι το δυναμικό στην αρχή των αξόνων; Γ) Δείξτε ότι το δυναμικό σε οποιοδήποτε σημείο του άξονα x είναι :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Δ) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του δυναμικού πάνω στον άξονα x συναρτήσει του x για την περιοχή x = - 4α έως x = + 4α. Ε) Για ποια τιμή του x το δυναμικό είναι ίσο με το μισό της τιμής του στην αρχή των αξόνων;

Λύση



Α) Οι θέσεις των φορτίων φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Β) Το δυναμικό στην αρχή των αξόνων είναι:

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{a} + \frac{q}{a}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

Γ) Θεωρούμε σημείο Α σε απόσταση x από την αρχή των αξόνων. Η απόσταση των φορτίων από το Α είναι ίση με $\sqrt{x^2 + a^2}$. Το δυναμικό στο Α είναι:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Δ) Το δυναμικό είναι συμμετρικό ως προς το σημείο x = 0 με μέγιστη τιμή στο σημείο αυτό το V_0 που βρήκαμε στο ερώτημα (Β) ενώ η τιμή του για x = ± 4α είναι η ελάχιστη και ισούται με:

$$V_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q}{\sqrt{(4\alpha)^2 + a^2}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = 0{,}243 \cdot V_0$$

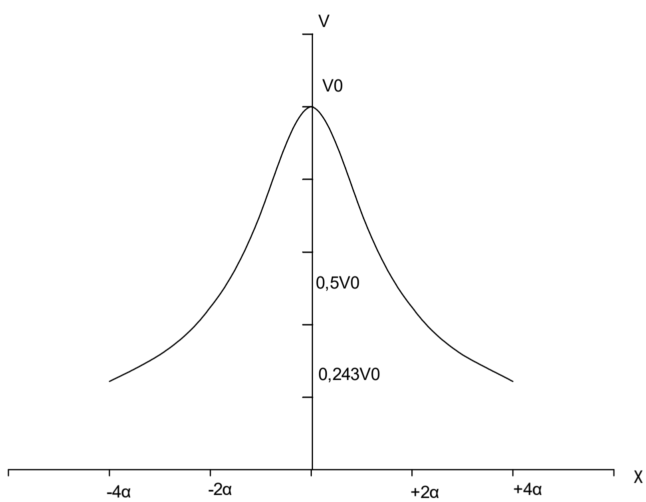
Η γραφική παράσταση φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα

Ε) Στην αρχή των αξόνων η τιμή του δυναμικού είναι V_0, έστω ότι σε απόσταση x το δυναμικό γίνεται $V_0/2$. Τότε :

$$\frac{V_0}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\alpha} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + a^2 = 4a^2 \Rightarrow x^2 = 3a^2 \Rightarrow$$

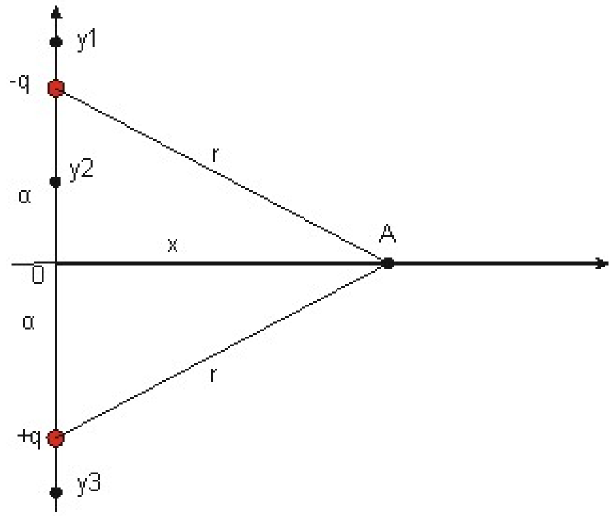
$$x = \pm a\sqrt{3}$$



3. Θετικό φορτίο +q βρίσκεται στη θέση x = 0, y = - α και ίσο αρνητικό φορτίο – q βρίσκεται στη θέση x = 0, y = + α. Α) Σχεδιάστε ένα διάγραμμα που να δείχνει τις θέσεις των φορτίων. Β) Πόσο είναι το δυναμικό σε σημείο του άξονα x σε απόσταση x από την αρχή των αξόνων; Γ) Να βρείτε μια σχέση για το δυναμικό σε σημείο του άξονα y και σε απόσταση y από την αρχή. Δ) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του δυναμικού πάνω στον άξονα y συναρτήσει του y για την περιοχή y = - α έως y = + α. Σχεδιάστε θετικά δυναμικά προς τα επάνω και αρνητικά δυναμικά προς τα κάτω.

Λύση

Α) Οι θέσεις των φορτίων φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Β) Θεωρούμε σημείο Α σε απόσταση x από την αρχή των αξόνων. Η απόσταση των φορτίων από το Α είναι ίση με $\sqrt{x^2+a^2}$. Το δυναμικό στο Α είναι:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{-q}{\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{q}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)=0$$

Για οποιαδήποτε τιμή του x.

Γ) Διακρίνουμε 3 περιοχές του άξονα y :

i) **y_1** > α

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{-q}{y-a}+\frac{q}{y+a}\right)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2a}{y^2-a^2}$$

ii) -α < **y_2** < + α

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{-q}{a-y}+\frac{q}{a+y}\right)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2y}{a^2-y^2}$$

iii) **y_3** < -α

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{-q}{y+a}+\frac{q}{y-a}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2a}{y^2-a^2}$$

Δ) Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση του V στο διάστημα –4α<y<+4α.

Για y = 0 το δυναμικό είναι μηδέν V=0. Για y→α το δυναμικό V→- ∞.

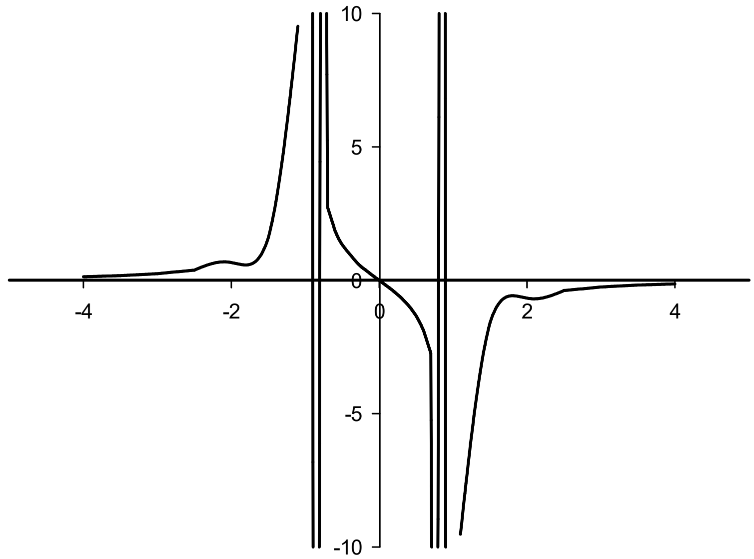
Για y→- α το δυναμικό V→+ ∞. Για y→± ∞ το δυναμικό V→0 ενώ όταν

y = 4α είναι

$$V=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2a}{(4a)^2-a^2}=-\frac{q}{30\cdot\pi\varepsilon_0 a}$$

y =- 4α είναι

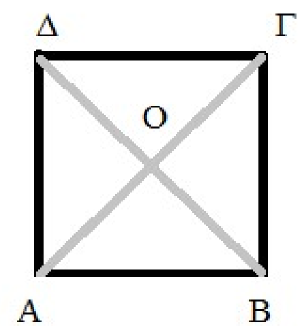
$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2a}{(-4\alpha)^2-a^2}=\frac{q}{30\cdot\pi\varepsilon_0\alpha}$$



Άσκηση 30.24 HR

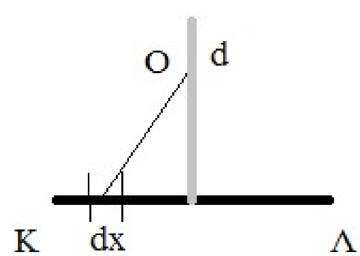
Το σχήμα δείχνει μια πλαστική ράβδο μήκους L = 12 cm και ομοιόμορφου θετικού φορτίου Q = 56.1 fC η οποία βρίσκεται πάνω στον άξονα x. Με V =0 στο άπειρο, να βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P_1 του άξονα σε απόσταση d = 2.5 cm από το ένα άκρο της ράβδου.

4. Τέσσερα ευθύγραμμα φορτισμένα τμήματα διατάσσονται ώστε να σχηματίζουν τετράγωνο πλευράς α. Υπολογίστε το δυναμικό στο κέντρο του τετραγώνου εάν το δυναμικό είναι μηδέν στο άπειρο, α) εάν οι δύο απέναντι πλευρές είναι θετικά φορτισμένες με φορτίο +Q κάθε μία και οι άλλες δύο με φορτίο –Q η καθεμία, β) εάν κάθε πλευρά έχει θετικό φορτίο +Q.



Λύση

Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το δυναμικό γραμμικής κατανομής φορτίου ΚΛ μήκους α με συνολικό φορτίο Q στο Ο επί της μεσοκαθέτου, που απέχει απόσταση d από το ευθύγραμμο τμήμα. Η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι ***λ = Q/α***. Θεωρούμε στοιχειώδες τμήμα dx με φορτίο ***dq= λ*dx*** και το δυναμικό dV στο Ο που οφείλεται σ' αυτό το στοιχειώδες φορτίο είναι:



$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{\sqrt{d^2 + x^2}}$$

Για να βρούμε το δυναμικό στο Ο, που οφείλεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, ολοκληρώνουμε από x = -α / 2 έως x = α / 2:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\lambda dx}{\sqrt{d^2 + x^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot ln\left(x + \sqrt{d^2 + x^2}\right)\Big]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Rightarrow V$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot ln\frac{a/2 + \sqrt{a^2/4 + d^2}}{-a/2 + \sqrt{a^2/4 + d^2}}$$

α) Στο κέντρο του τετραγώνου, η απόσταση d είναι ίδια για όλες τις πλευρές, άρα το δυναμικό θα είναι ίσο με V = 0, γιατί οι δύο απέναντι πλευρές έχουν πυκνότητα +***λ*** και οι άλλες δύο –***λ***, έτσι το συνολικό άθροισμα θα είναι μηδέν.

β) Στην περίπτωση αυτή έχουμε την ίδια πυκνότητα ***λ=Q/α*** και για τις τέσσερις πλευρές και ***d=α/2*** άρα:

$$V = 4 \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\alpha} \cdot ln\frac{a/2 + \sqrt{a^2/4 + a^2/4}}{-a/2 + \sqrt{a^2/4 + a^2/4}} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0\alpha} \cdot ln\frac{1 + \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$V = 1{,}76 \cdot \frac{Q}{\pi\varepsilon_0\alpha}$$

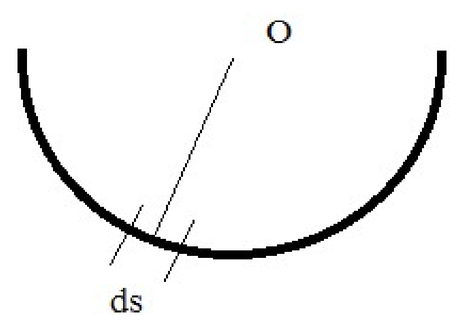
5. Ηλεκτρικό φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα κατά μήκος ημικυκλίου ακτίνας α, με ολικό φορτίο Q. Υπολογίστε το δυναμικό στο κέντρο καμπυλότητας εάν θεωρούμε το δυναμικό μηδέν στο άπειρο.

Λύση

Το δυναμικό στο κέντρο καμπυλότητας Ο που οφείλεται στο στοιχειώδες τμήμα ***ds*** με φορτίο d***q=λ*ds*** είναι:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda * ds}{\alpha}$$

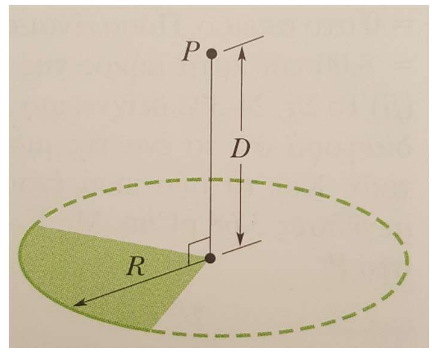
Όπου ***λ = Q/πα,*** είναι η γραμμική πυκνότητα φορτίου. Για να βρούμε το δυναμικό στο Ο ολοκληρώνουμε από s = 0 έως s = πα.:



$$zV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_0^{\alpha\pi} \frac{ds}{\alpha} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\alpha\pi}{\alpha} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\pi\alpha} \cdot \frac{\alpha\pi}{\alpha} \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\alpha\varepsilon_0}$$

Άσκηση 29.24 HR

Ένας πλαστικό δίσκος ακτίνας R = 64 cm είναι φορτισμένος στη μια πλευρά με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ = 7.73 fC / m^2 . Στη συνέχεια αφαιρούνται τα τρία τεταρτημόρια του δίσκου. Το τεταρτημόριο που μένει φαίνεται στο σχήμα. Με V = 0 στο άπειρο, πόσο είναι το δυναμικό που οφείλεται στο τεταρτημόριο που απέμεινε στο σημείο P, το οποίο βρίσκεται στον κεντρικό άξονα του αρχικού δίσκου, σε απόσταση D = 25,9 cm από το αρχικό κέντρο;



Άσκηση 65.24 HR

Δύο μεταλλικές σφαίρες, η καθεμία με ακτίνα 3 cm έχουν απόσταση από κέντρο σε κέντρο 2 m. Η σφαίρα 1 έχει φορτίο + 1.0x10^{-8} C και η σφαίρα 2 έχει φορτίο – 3.0x10^{-8} C. Υποθέστε ότι η απόσταση είναι αρκετά μεγάλη ώστε να μπορούμε να υποθέσουμε ότι το φορτίο σε κάθε σφαίρα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο (οι σφαίρες δεν επηρεάζουν η μία την άλλη). Με V =0 στο άπειρο, να υπολογίσετε α) το δυναμικό στο σημείο που βρίσκεται στο μέσο της απόστασης μεταξύ των δύο κέντρων και το δυναμικό στην επιφάνεια β) της σφαίρας 1 και γ) της σφαίρας 2.

Άσκηση 93.24 HR

Ένα σφαιρικό κέλυφος με παχύ τοίχωμα, φορτίο Q και ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου ρ, οριοθετείτε από τις ακτίνες r_1 και r_2, με $r_2 > r_1$. Με V = 0 στο άπειρο, να βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό V σαν συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο της κατανομής, θεωρώντας τις περιοχές α) $r > r_2$, β) $r_2 > r > r_1$ και γ) $r < r_1$. Οι λύσεις αυτές είναι σύμφωνες μεταξύ τους στα $r = r_2$ και $r = r_1$;