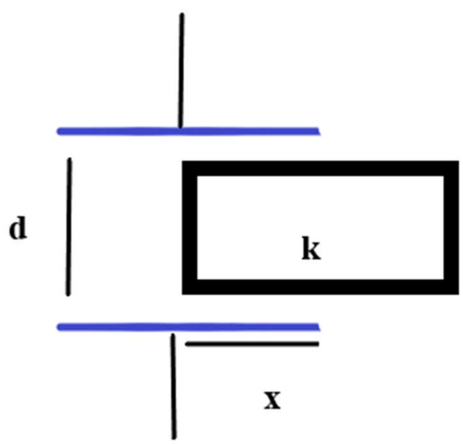
Χωρητικότητες, Πυκνωτές, Διηλεκτρικά

1. Θεωρούμε πυκνωτή που αποτελείται από δύο τετράγωνες πλάκες μήκους L. Η απόσταση των πλακών είναι d. α) Τοποθετούμε διηλεκτρικό με σταθερά κ > 1 και πλάτος L σε μήκος x. Πόση είναι η συνολική χωρητικότητα C. β) Συνδέουμε τον πυκνωτή σε μπαταρία με διαφορά δυναμικού V_0 στα άκρα του πυκνωτή. Πόση είναι η ενέργεια που αποθηκεύεται . γ) Όσο είναι συνδεδεμένη η μπαταρία στον πυκνωτή μετακινούμε το διηλεκτρικό λίγο παραπάνω μεταξύ των πλακών του αυξάνοντας το x κατά Δx. Πόση είναι η μεταβολή στην αποθηκευμένη ενέργεια του πυκνωτή. δ) Πόσο έργο παράγεται από την μπαταρία όσο σπρώχνουμε το διηλεκτρικό μέσα στις πλάκες του πυκνωτή από τη θέση x στην x+Δx; ε) Πόσο έργο παράγουμε εμείς στο διάστημα αυτό;

Λύση



Α) Στην περίπτωση αυτή είναι σαν να έχουμε δύο πυκνωτές οι οποίοι έχουν την ίδια τάση V_0 στα άκρα άρα είναι στην ουσία δύο πυκνωτές παράλληλα συνδεμένοι. Έτσι έχουμε : $C_1 = \frac{L*(L-x)*\varepsilon_0}{d}$ και $C_2 = k\frac{L*x*\varepsilon_0}{d}$ άρα η συνολική χωρητικότητα, χωρητικότητα του πυκνωτή στη δεδομένη κατάσταση είναι:

$$C_{O\Lambda} = C_1 + C_2 = \frac{L*(L-x)*\varepsilon_0}{d} + \frac{L*x*k*\varepsilon_0}{d}$$

$$\Rightarrow C_{O\Lambda} = \frac{L^2*\varepsilon_0 + L*x*\varepsilon_0(k-1)}{d}$$

Β) Η ενέργεια είναι

$$U = \frac{1}{2}C_{O\Lambda} * V_0^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}\left[\frac{L^2 * \varepsilon_0 + L * x * \varepsilon_0(k-1)}{d}\right] * V_0^2$$

Γ) Αυξάνοντας το μήκος του διηλεκτρικού κατά Δx έτσι ώστε να έχουμε συνολικό μήκος x+Δx η χωρητικότητα είναι:

$$C'_{O\Lambda} = C'_1 + C'_2 = \frac{L * (L - x - \Delta x) * \varepsilon_0}{d} + \frac{L * (x + \Delta x) * k * \varepsilon_0}{d} \Rightarrow C'_{O\Lambda} = C_{O\Lambda} + \frac{L * \Delta x * \varepsilon_0(k-1)}{d}$$

Άρα η μεταβολή της ενέργειας είναι:

$$U' - U = \frac{1}{2}C'_{O\Lambda} * V_0^2 - \frac{1}{2}C_{O\Lambda} * V_0^2 \Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2}\left[C_{O\Lambda} + \frac{L * \Delta x * \varepsilon_0(k-1)}{d}\right] * V_0^2 - \frac{1}{2}C_{O\Lambda} * V_0^2 \Rightarrow$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\left[\frac{L * \Delta x * \varepsilon_0(k-1)}{d}\right] * V_0^2$$

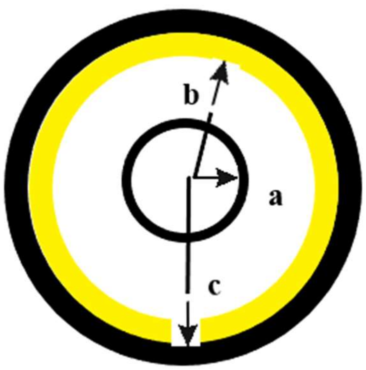
Δ) Η μπαταρία παράγει έργο κατά τη διάρκεια της κίνησης ίσο με :

$$W = \frac{1}{2} C'_{ΟΛ} * V_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{L^2 * \varepsilon_0 + L * x * \varepsilon_0(k-1)}{d} + \frac{L * \Delta x * \varepsilon_0(k-1)}{d}\right] * V_0^2$$

Ε) Το έργο που παράγουμε εμείς είναι ίσο και αντίθετο αυτού της μπαταρίας διότι το διηλεκτρικό εμφανίζει φορτίο στις επιφάνειές του απέναντι από τις πλάκες που πυκνωτή αντίθετου ποσίμου με αποτέλεσμα να έλκεται και εμείς θα πρέπει να καταναλώσουμε έργο ίσο και αντίθετο με αυτό που παράγει η μπαταρία.

2. Ένα ομοαξονικό καλώδιο αποτελείται από ένα καλώδιο χαλκού ακτίνας α, το οποίο περιβάλλεται από ένα ομοκεντρικό χάλκινο σωλήνα εσωτερικής ακτίνας c. Ο χώρος μεταξύ τους έχει καλυφθεί μερικά με διηλεκτρικό σταθεράς k (από b έως c). Υπολογίστε την χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του καλωδίου.

Λύση



Εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις.

- ***0 <r < α,*** το καλώδιο είναι αγώγιμο και επομένως στο εσωτερικό της ισχύει $|\vec{E}| = 0$
- ***α < r < b,*** στο χώρο μεταξύ του καλωδίου ακτίνας ***α*** και εσωτερικής επιφάνειας του διηλεκτρικού ***b***, θεωρούμε κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας ***r*** και μήκους L έτσι έχουμε:
- $\Phi = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{E}| \oint d\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{E}| \cdot 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\boldsymbol{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

Όπου λ η γραμμική πυκνότητα φορτιού του εσωτερικού καλωδίου.

- ***b < r < c***, υπάρχει διηλεκτρικό σταθεράς k άρα θεωρούμε κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας ***r*** και μήκους L έτσι έχουμε:

$$\Phi = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{E}| \oint d\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{E}| \cdot 2\pi r l = \frac{q}{k * \varepsilon_0} \Rightarrow |\boldsymbol{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r * k}$$

- ***r >c***, θεωρούμε κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας ***r*** και μήκους L έτσι έχουμε

$$\Phi = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{E}| \oint d\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{E}| \cdot 2\pi r l = \frac{q - q'}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\boldsymbol{E}| = 0$$

Διότι το q = q’ δηλαδή το συνολικό φορτίο είναι μηδέν, η γκαουσιανή επιφάνεια περικλείει το εσωτερικό καλώδιο με φορτίο q και τον εξωτερικό χάλκινο κύλινδρο με φορτίο –q.
Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη διαφορά δυναμικού διότι C=Q/ΔV. Βρίσκουμε πρώτα τη διαφορά δυναμικού μεταξύ του εσωτερικού χάλκινου καλωδίου ακτίνας α και του διηλεκτρικού ακτίνας b.

$$V(b)-V(a)=-\int_{+}^{-}\vec{E}*d\vec{r}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\alpha}^{b}\frac{dr}{r}\Rightarrow V(b)-V(a)=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}*ln\frac{b}{a}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ του διηλεκτρικού ακτίνας b και του κυλινδρικού χάλκινου καλωδίου ακτίνας c

$$V(c)-V(b)=-\int_{+}^{-}\vec{E}*d\vec{r}=-\frac{\lambda}{2\pi k\varepsilon_0}\int_{b}^{c}\frac{dr}{r}\Rightarrow V(c)-V(b)=-\frac{\lambda}{2\pi k\varepsilon_0}*ln\frac{c}{b}$$

Τελικά η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι:

$$|V(c)-V(\alpha)|$$

Έχουμε:

$$V(c)-V(b)=-\frac{\lambda}{2\pi k\varepsilon_0}*ln\frac{c}{b}$$

$$+$$

$$V(b)-V(a)=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}*ln\frac{b}{a}$$

Τελικά

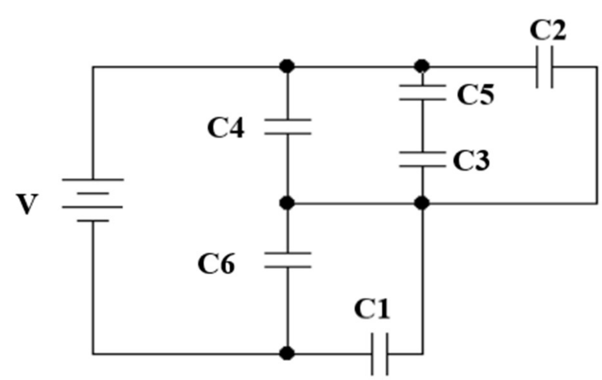
$$V(c)-V(\alpha)=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}*\left[ln\frac{b}{a}+\frac{1}{k}*ln\frac{c}{b}\right]$$

Η χωρητικότητα τελικά είναι:

$$C=\frac{Q}{\Delta V}=\frac{\lambda*L}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}*\left[ln\frac{b}{a}+\frac{1}{k}*ln\frac{c}{b}\right]}\Rightarrow\frac{C}{L}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{ln\frac{b}{a}+\frac{1}{k}*ln\frac{c}{b}}$$

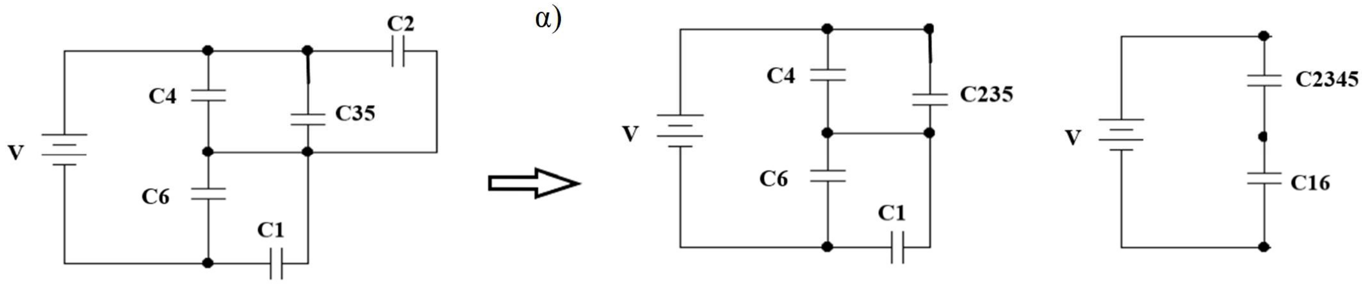
Άσκηση 17.25 Halliday σελ. 150

Στο σχήμα μία μπαταρία των 20V συνδέεται στα άκρα πυκνωτών με χωρητικότητες C_1=C_6=3,0μF και C_3=C_5=2,0μF C_2=2,0μF C_4=4,0μF. Πόση είναι α) η ισοδύναμη χωρητικότητα C_{eq} των πυκνωτών και β) το φορτίο που έχει αποθηκευτεί στη C_{eq}; γ) Πόση είναι η V_1 και δ) πόσο είναι το q_1 του πυκνωτή 1, ε) πόση είναι η είναι η V_2 και στ) πόσο είναι το q_2 του πυκνωτή 2 και ζ) πόση είναι η είναι η V_3 και η) πόσο είναι το q_3 του πυκνωτή 3;



Λύση

α)



$$\frac{1}{C_{35}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_5} \Rightarrow \frac{1}{C_{35}} = \frac{1}{2\mu F} + \frac{1}{2\mu F} \Rightarrow C_{35} = 1\mu F$$

$$C_{235} = C_{35} + C_2 \Rightarrow C_{235} = 1\mu F + 2\mu F \Rightarrow C_{235} = 3\mu F$$

$$C_{2345} = C_{235} + C_4 \Rightarrow C_{2345} = 3\mu F + 4\mu F \Rightarrow C_{2345} = 7\mu F$$

$$C_{16} = C_1 + C_6 \Rightarrow C_{16} = 3\mu F + 3\mu F \Rightarrow C_{16} = 6\mu F$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{2345}} + \frac{1}{C_{16}} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{7\mu F} + \frac{1}{6\mu F} \Rightarrow C_{eq} = 3{,}23\ \mu F$$

β) $q_{eq} = C_{eq} * V \Rightarrow q_{eq} = 3{,}23\mu F * 20V \Rightarrow q_{eq} = 64{,}6\mu C$

γ) Για τον υπολογισμό της V_1 θα πρέπει να βρούμε την V_6 γιατί $V_6 = V_1 = V_{16}$ οι πυκνωτές είναι παράλληλοι. Οι πυκνωτές C_{2345} και C_{16} έχουν το ίδιο φορτίο ίσο με q_{eq} γιατί είναι συνδεμένοι σε σειρά. Άρα

$$V_{16} = \frac{q_{eq}}{C_{16}} \Rightarrow V_6 = \frac{64{,}6 \times 10^{-6}C}{6 \times 10^{-6}F} \Rightarrow V_6 = 10{,}77\ V$$

$$V_{16} = V_1 = 10{,}77V$$

δ) Το φορτίο q_1 είναι:

$$q_1 = C_1 * V_1 \Rightarrow q_1 = 3 \times 10^{-6}F * 10{,}77V \Rightarrow q_1 = 32{,}31\mu C$$

ε) Για τον υπολογισμό της V_2 θα πρέπει να βρούμε την V_4 γιατί $V_2 = V_4 = V_{35}$ οι πυκνωτές είναι παράλληλοι. Οι πυκνωτές C_{2345} και C_{16} έχουν το ίδιο φορτίο ίσο με q_{eq} γιατί είναι συνδεμένοι σε σειρά. Άρα

$$V_4 = V - V_6 = 20V - 10{,}77\ V \Rightarrow V_4 = V_2 = 9{,}23V$$

στ) Το φορτίο q_2 είναι:

$$q_2 = C_2 * V_2 \Rightarrow q_2 = 2 \times 10^{-6} F * 9{,}23V \Rightarrow q_2 = 18{,}46\ \mu C$$

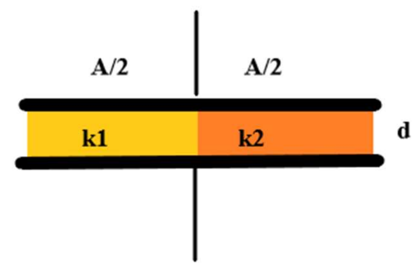
ζ), η) Για τον υπολογισμό της V_3 όπως είπαμε πιο πάνω $V_2 = V_4 = V_{35} = V_3 + V_5$ οι πυκνωτές είναι σε σειρά, άρα $q_5 = q_3 = q_{35}$

$$q_3 = q_{35} = C_{35} * V_4 \Rightarrow q_3 = 1 \times 10^{-6} F * 9{,}23V \Rightarrow q_3 = 9{,}23 \mu C$$

$$V_3 = \frac{q_3}{C_3} \Rightarrow V_3 = \frac{9{,}23 \times 10^{-6} C}{2 \times 10^{-6} F} \Rightarrow V_3 = 4{,}615\ V$$

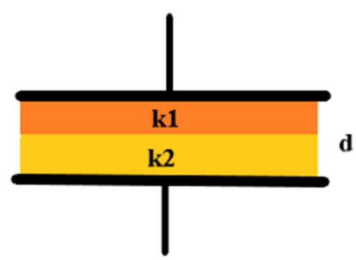
Άσκηση 48.25 Halliday σελ. 153

Το σχήμα δείχνει έναν επίπεδο πυκνωτή με εμβαδόν οπλισμού A = 5,56 cm^2 και με απόσταση οπλισμών d = 5,56 mm. Το αριστερό μισό του διάκενου γεμίζεται με υλικό διηλεκτρικής σταθεράς κ_1 = 7,0 και το δεξί μισό γεμίζεται με υλικό διηλεκτρικής σταθεράς κ_2 = 12,0. Πόση είναι η χωρητικότητα;



Άσκηση 49.25 Halliday σελ. 153

Το σχήμα δείχνει έναν πυκνωτή παράλληλων οπλισμών με εμβαδόν οπλισμού A = 7,89 cm^2 και με απόσταση οπλισμών d = 4,62 mm. Το πάνω μισό του διάκενου γεμίζεται με υλικό διηλεκτρικής σταθεράς κ_1 = 11,0 και το κάτω μισό γεμίζεται με υλικό διηλεκτρικής σταθεράς κ_2 = 12,0. Πόση είναι η χωρητικότητα;



Άσκηση 69.25 Halliday σελ. 155

Στο σχήμα δύο πυκνωτές A και B είναι συνδεδεμένοι παράλληλα στα άκρα μίας μπαταρίας των 600 V. Κάθε οπλισμός έχει εμβαδό 80,0 cm^2 και οι αποστάσεις μεταξύ των οπλισμών είναι 3,0 mm. Ο πυκνωτής A είναι γεμάτος με αέρα και ο πυκνωτής B είναι γεμάτος με ένα διηλεκτρικό διηλεκτρικής σταθεράς κ = 2,60. Να βρείτε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου εντός α) του διηλεκτρικού του πυκνωτή B, β) του αέρα του πυκνωτή A. Πόση είναι η πυκνότητα ελεύθερου φορτίου **σ** στον οπλισμό υψηλότερου δυναμικού γ) του πυκνωτή A και δ) του πυκνωτή B; ε) Πόση είναι η πυκνότητα του επαγόμενου φορτίου στην πάνω επιφάνεια του διηλεκτρικού;