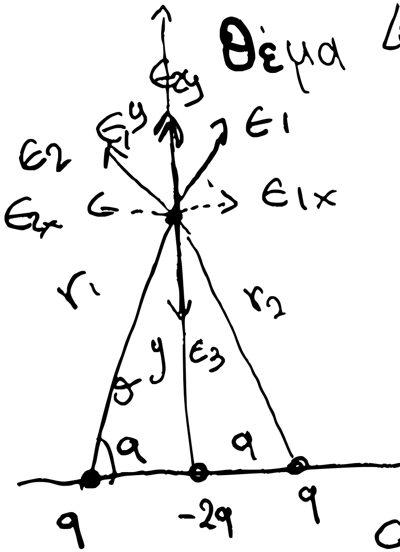
Θέμα 4ο Ιούνιος 2022



$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r_1^2}\,\hat{r}$$

$$\vec{E}_{1x} = E_1 \cdot \cos\theta\,\hat{x}$$

$$\vec{E}_{1y} = E_1 \cdot \sin\theta\,\hat{y}$$

$$r_1 = \sqrt{a^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

$$\vec{E}_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\left(\sqrt{a^2+y^2}\right)^2} \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} \cdot \hat{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot a}{(a^2+y^2)^{3/2}} \cdot \hat{x}$$

$$\vec{E}_{1y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot y}{(a^2+y^2)^{3/2}} \cdot \hat{y}$$

Ομοίως

$$\vec{E}_{2x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot a}{(a^2+y^2)^{3/2}} \cdot (-\hat{x})$$

$$\vec{E}_{2y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot y}{(a^2+y^2)^{3/2}} \cdot \hat{y}$$

Ενώ

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-2q}{y^2} (\hat{y})$$

$$\vec{E}_{x o\lambda} = \vec{E}_{1x} + \vec{E}_{2x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot a}{(a^2+y^2)^{3/2}} \cdot \hat{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \cdot a}{(a^2+y^2)^{3/2}} \cdot (-\hat{x}) = 0.$$

$$\vec{E}_{y o\lambda} = \vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2y} + \vec{E}_3 \Rightarrow$$

$$\vec{E}_{y o\lambda} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q \cdot y}{(a^2+y^2)^{3/2}} \cdot \hat{y} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-2q}{y^2} \cdot \hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{y o\lambda} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \hat{y} \left(\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}} - \frac{1}{y^2} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{E}_{y o\lambda} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}} - \frac{1}{y^2} \right] (\hat{y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{y o\lambda} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{y}{\left[\left(\frac{a^2}{y^2}+1\right) y^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{y^2} \right] (\hat{y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{y o \lambda} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}(\hat{y})\left[\frac{y}{\left(\frac{a^2}{y^2}+1\right)^{3/2} y^{\cancel{3}} 2} - \frac{1}{y^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{y o \lambda} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot y^2} \cdot \hat{y}\left[\frac{1}{\left(\frac{a^2}{y^2}+1\right)^{3/2}} - 1\right]$$

ισχύει $\frac{a^2}{y} << 1$ ενώ με ανάλυση του όρου $\left(\frac{a^2}{y^2}+1\right)^{-3/2} \simeq 1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{y^2}$ άρα

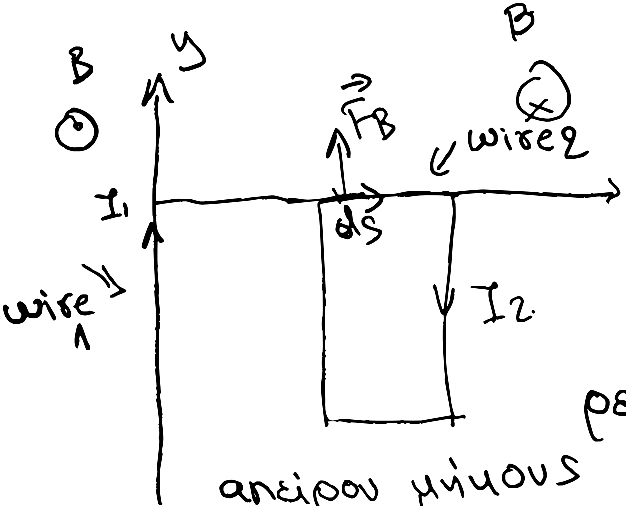
$$\vec{E}_{y o \lambda} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 y^2} \cdot (\hat{y})\left[\cancel{1} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{y^2} - \cancel{1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{y o \lambda} = \frac{\cancel{2}q}{4\pi\varepsilon_0 y^2} \cdot \left(-\frac{3}{\cancel{2}}\frac{a^2}{y^2}\right)(\hat{y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{y o \lambda} = -\frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 y^4}(\hat{y}) \Rightarrow$$

$$\vec{E}_{y o \lambda} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{3qa^2}{y^4}(\hat{y})$$

Θέμα 5ο Ιούνιος 2022



Το μαγνητικό πεδίο B κατά μήκος του wire2 δίνεται από τον τύπο του μαγνητικού πεδίου ρευματοφόρου αγωγού απείρου μήκους έτσι στη θέση x

είναι $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \cdot (-\hat{z})$ για να βρω τη δύναμη $\vec{F}_B$ στο wire2 θεωρώ στοιχείο ds προς τα $+x$ άρα

$$d\vec{F}_B = I_2 \cdot d\vec{s} \times \vec{B} \quad \text{άρα}$$

$$d\vec{F}_B = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} \cdot \left[\hat{x} \times (-\hat{z})\right] \cdot dx \Rightarrow$$

$$d\vec{F}_B = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} \cdot dx \cdot (\hat{y})$$ για να βρω την συνολική δύναμη σε όλο το μήκος του wire 2 ολοκληρώνω από $x=a$ έως $x=a+b$ άρα

$$\vec{F}_B = \mu_0 \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi} \cdot (\hat{y}) \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_B = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \cdot (\hat{y}) \cdot \ln x \Big|_a^{a+b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_B = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \cdot (\hat{y}) \left[\ln(a+b) - \ln a\right] \Rightarrow$$

$$\vec{F}_B = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \cdot \ln\left[1 + \frac{b}{a}\right] (\hat{y})$$