Κίνηση σε 2 και 3 διαστάσεις-Πλάγια βολή-Ελεύθερη πτώση

Άσκηση 1. Σώμα κινείται σε δύο διαστάσεις και έχει τις εξής παραμετρικές εξισώσεις κίνησης: $x = 2t^3 - 3t^2$, $y = t^2 - 2t + 1$ με x,y σε m και t σε s. Να βρεθούν: α) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση. Β) Ο χρόνος μηδενισμού της ταχύτητας. Γ) Ο χρόνος κατά τον οποίο η επιτάχυνση είναι παράλληλα προς τον άξονα y. Δ) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση για t=0.

Άσκηση 2. Η κίνηση σώματος περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\vec{r} = 2.5 * t^2\hat{x} + \frac{1}{45}\sqrt{(30 * t + 9)^3}\hat{y}$$

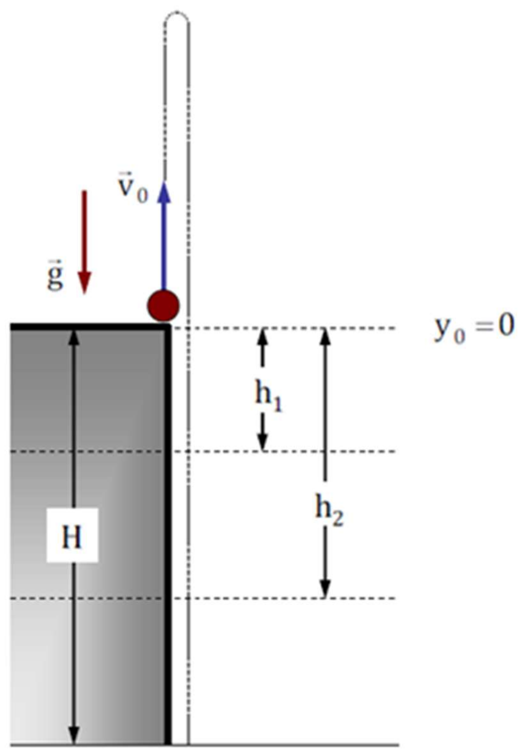
Αν για t=0 είναι $s_o=0$, να βρεθεί το διάστημα που έχει διαγράψει πάνω στην τροχιά του ύστερα από χρόνο t=2s. Πόση είναι η επιτάχυνση του τότε;

Άσκηση 3. Παρατηρητής ρίχνει από την άκρη της ταράτσας πολυκατοικίας ύψους H=24m κατακόρυφα προς τα πάνω μικρή μπάλα με αρχική ταχύτητα v_0 την χρονική στιγμή t_0=0s. Έχοντας συγχρονίσει τα χρονόμετρά τους παρατηρητές απέχοντες Δh=10m και ευρισκόμενοι στα παράθυρά τους βλέπουν τη μπάλα να περνά με κατεύθυνση προς τα κάτω με χρονική καθυστέρηση $\Delta t = t_2 - t_1 = 0.8$s ο δεύτερος από τον πρώτο. Σε ποιο ύψος βρίσκονται οι παρατηρητές εάν είναι γνωστό πως η μπάλα φτάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή t_3=3s; Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα. Δίνεται g=9.81m/s^2 .

Λύση

Έστω ότι οι δύο παρατηρητές βρίσκονται σε απόσταση h_1 και h_2 από την ταράτσα της πολυκατοικίας. Θεωρώντας το σημείο ρίψης της μπάλας ως την αρχή του άξονα y, τότε για τη μονοδιάστατη κίνηση κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα y έχουμε τις εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} -h_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \\ -h_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 \\ -H = v_0 t_3 - \frac{1}{2}gt_3^2 \end{array} \right\}$$



Από την τρίτη εξίσωση είναι δυνατόν να υπολογισθεί η αρχική ταχύτητα του σώματος:

$$-H = v_0 t_3 - \frac{1}{2} g t_3^2 \Longrightarrow v_0 = \frac{1}{2} g t_3 - \frac{H}{t_3} \Longrightarrow v_0 = \frac{1}{2} 9.80 \cdot 3 - \frac{24}{3} \Longrightarrow v_0 = 6.7 m/s^2$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο πρώτες εξισώσεις έχουμε:

$$-h_1 + h_2 = v_0(t_1 - t_2) - \frac{1}{2} g(t_1^2 - t_2^2) \Longrightarrow \Delta h = -v_0 \Delta t - \frac{1}{2} g(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)$$

$$\Longrightarrow \Delta h = -v_0 \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t (2t_1 + \Delta t) \Longrightarrow t_1 = \frac{v_0 \Delta t + \Delta h}{g \Delta t} - \frac{\Delta t}{2}$$

απ΄ όπου με αντικατάσταση βρίσκουμε:

$$t_1 = \frac{6.7 \cdot 0.8 + 10.0}{9.80 \cdot 0.8} - \frac{0.8}{2} \Longrightarrow t_1 = 1.56s$$

και αντίστοιχα $t_2 = 2.36s$. Οι χρονικές αυτές τιμές προσδιορίζουν τις απόλυτες αποστάσεις:

$$-h_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \Longrightarrow h_1 = -6.7 \cdot 1.56 + 1/2 \cdot 9.80 \cdot 1.56^2 \Longrightarrow \boxed{h_1 = 1.47m}$$

$$-h_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \Longrightarrow h_2 = -6.7 \cdot 2.36 + 1/2 \cdot 9.80 \cdot 2.36^2 \Longrightarrow \boxed{h_2 = 11.47m}$$

Άσκηση 4.19 HR

Η επιτάχυνση ενός σωματιδίου που κινείται στο οριζόντιο επίπεδο xy δίνεται από τη σχέση $\vec{\alpha} = 3t\hat{\imath} + 4t\hat{\jmath}$ όπου η $\vec{\alpha}$ είναι σε m/s^2 και το t(> 0) σε s. Τη χρονική στιγμή t=0 το διάνυσμα $\vec{r} = (2.00m)\hat{\imath} + (40.0m)\hat{\jmath}$ προσδιορίζει τη θέση του σωματιδίου, το οποίο εκείνη τη χρονική στιγμή έχει διάνυσμα ταχύτητας $\vec{v} = (5.00m/s)\hat{\imath} + (2.00m/s)\hat{\jmath}$. Τη στιγμή t = 4s, α)πόσο είναι το διάνυσμα θέσης σε συμβολισμό μοναδιαίων διανυσμάτων και β) πόση είναι η γωνία μεταξύ της κατεύθυνσης κίνησης και της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x;

Άσκηση 4. Σωματίδιο κινείται έτσι ώστε η θέση του σε m ως συνάρτηση του χρόνου σε s να είναι $\vec{r} = \hat{\imath} + 4t^2\hat{\jmath} + t\hat{k}$. Να γράψετε α) τις εκφράσεις για την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του ως συνάρτηση του χρόνου, β) την εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου.

Λύση

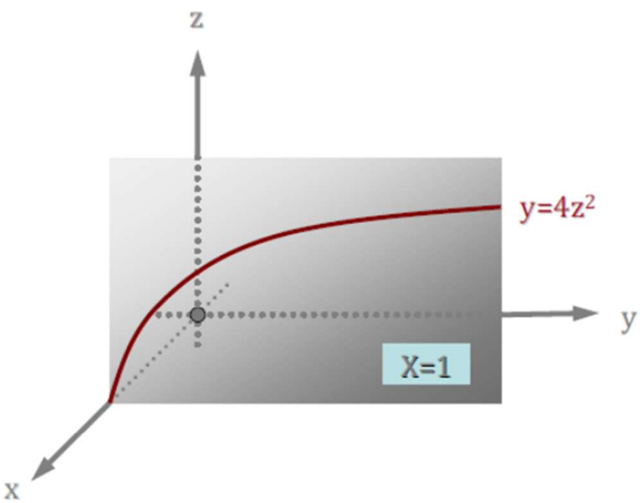
(α) *Διανυσματικές εξισώσεις ταχύτητας & επιτάχυνσης*

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}) \Longrightarrow \boxed{\vec{v}(t) = 8t\hat{j} + \hat{k}}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(8t\hat{j} + \hat{k}) \Longrightarrow \boxed{\vec{a}(t) = 8\hat{j}}$$

(β) *Εξίσωση τροχιάς*

Καθώς η επιτάχυνση $\vec{a}(t) = 8\hat{j}$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου (σταθερή) και το x παραμένει σταθερό, η τροχιά θα είναι παραβολή στο επίπεδο (yz) κάθετο στον άξονα των x στην τιμή $x = 1$. Το επίπεδο αυτό παρίσταται στο σχήμα ως $X = 1$. Η εξίσωση της τροχιάς σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης είναι:

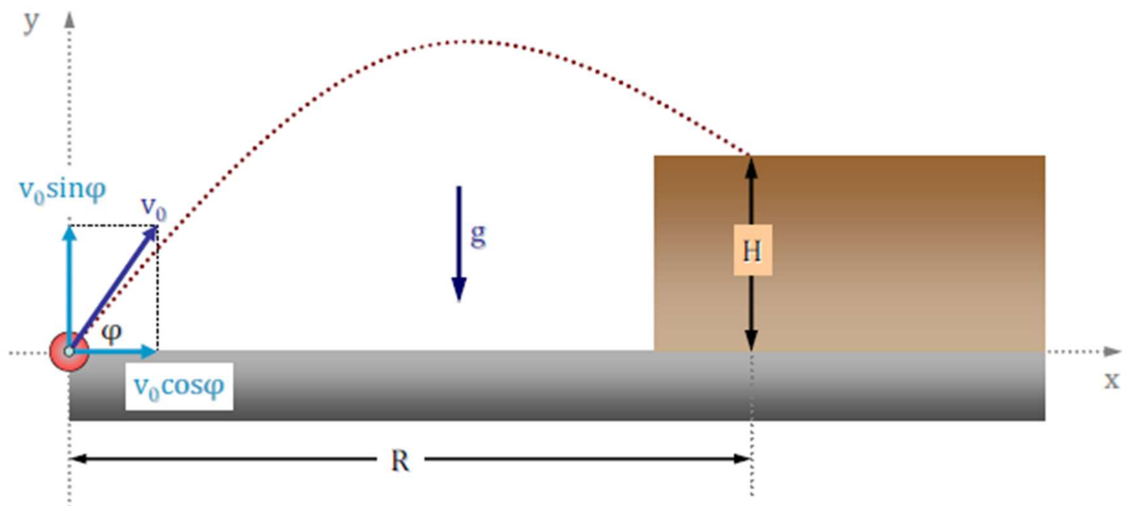


$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 1 \\ y(t) = 4t^2 \\ z(t) = t \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4z^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4z^2 \end{array}}$$

Άσκηση 4.29 HR

Αθλητής καταδύσεων εκτινάσσεται οριζόντια με ταχύτητα $2.00 m/s$ από το άκρο του βατήρα, 10.0m πάνω από την επιφάνεια του νερού. α) Σε πόση οριζόντια απόσταση από το άκρο του βατήρα βρίσκεται ο αθλητής 0.800s αργότερα; β) Σε πόση κατακόρυφη απόσταση από την επιφάνεια του νερού βρίσκεται ο αθλητής αυτή τη χρονική στιγμή; γ) Σε πόση οριζόντια απόσταση από το άκρο ο αθλητής χτυπά στο νερό;

Άσκηση 5. Βλήμα εκτοξεύεται από το έδαφος με αρχική ταχύτητα v_0 υπό γωνία φ και συναντά την ταράτσα κτιρίου ύψους H σε οριζόντια απόσταση R. Θεωρώντας την αντίσταση του αέρα αμελητέα, να υπολογίσετε την γωνία βολής φ εάν δίνονται τα μεγέθη R=200m, H=50m και v_0=60m/s.



Λύση

Οι εξισώσεις της κίνησης για χρόνο πτήσης του βλήματος t, ο οποίος καθορίζεται από την κατακόρυφη κίνηση, είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = (v_0 cos\phi)t \\ H = (v_0 sin\phi)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = R/(v_0 cos\phi) \\ H = R(v_0 sin\phi)/(v_0 cos\phi) - \frac{1}{2}gR^2/(v_0 cos\phi)^2 \end{array} \right\}$$

Η δεύτερη των εξισώσεων είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς την $tan\phi$:

$$H = Rtan\phi - \frac{1}{2}gR^2/(v_0 cos\phi)^2 \Longrightarrow H = Rtan\phi - \frac{gR^2}{2v_0^2}(1 + tan^2\phi) \Longrightarrow$$

$$\boxed{tan^2\phi - \frac{2v_0^2}{gR}tan\phi + \frac{2v_0^2 H}{gR^2} + 1 = 0}$$

Με τα δεδομένα της άσκησης, η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

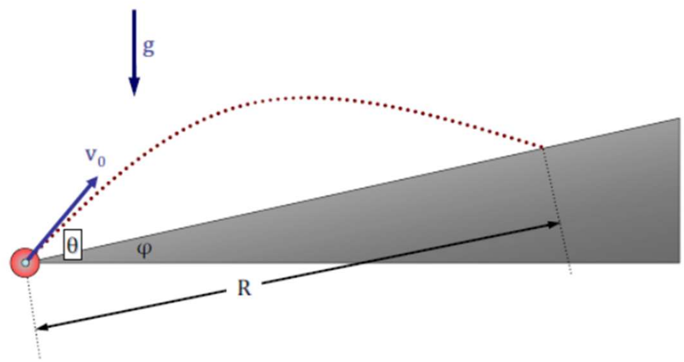
$$tan^2\phi - 3.673tan\phi + 1.735 = 0 \Longrightarrow tan\phi_1 = 3.117\ , tan\phi_2 = 0.557 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\phi_1 = 72.2^o}\ ,\ \boxed{\phi_2 = 29.1^o}$$

Άσκηση 4.51 HR

Ένας ποδοσφαιριστής μπορεί να δώσει στη μπάλα αρχική ταχύτητα $25 m/s$. Πόση είναι α) η ελάχιστη και β) η μέγιστη γωνία ανύψωσης στις οποίες μπορεί να κλοτσήσει τη μπάλα ώστε να βάλει γκολ από το σημείο των 50 m μπροστά από τα δοκάρια του τέρματος, όταν το οριζόντιο δοκάρι βρίσκεται 3.44 m πάνω από το έδαφος;

Άσκηση 6. Βλήμα εκτοξεύεται από βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας φ υπό γωνία θ ως προς τον ορίζοντα. Να υπολογιστεί το βεληνεκές R επί του κεκλιμένου επιπέδου.



Λύση

<u>*ΜΕΘΟΔΟΣ Α*</u>

Αναλύουμε τη κίνηση του βλήματος στον άξονα παράλληλο προς το κεκλιμένο επίπεδο και στον αντίστοιχο κάθετο. Στην περίπτωση αυτή, και στις δύο αυτές κατευθύνσεις δρα η βαρυτική επιτάχυνση με μέτρα $gsin\phi$ και $gcos\phi$ αντίστοιχα. Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = v_0cos(\theta-\phi)t - \frac{1}{2}g(sin\phi)t^2 \\ 0 = v_0sin(\theta-\phi)t - \frac{1}{2}g(cos\phi)t^2 \end{array} \right\}$$

Η δεύτερη των εξισώσεων λυόμενη ως προς τον χρόνο t δίνει:

$$t = \frac{2v_0}{g}\frac{sin(\theta-\phi)}{cos\phi}$$

και μετά από αντικατάσταση στην πρώτη λαμβάνουμε για το βεληνεκές R την παρακάτω σχέση:

$$R = v_0cos(\theta-\phi)\frac{2v_0}{g}\frac{sin(\theta-\phi)}{cos\phi} - \frac{1}{2}gsin\phi\frac{2^2v_0^2}{g^2}\frac{sin^2(\theta-\phi)}{cos^2\phi} \Longrightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\frac{cos(\theta-\phi)sin(\theta-\phi)cos\phi - sin\phi sin^2(\theta-\phi)}{cos^2\phi} \Longrightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{sin(\theta - \phi)[cos(\theta - \phi)cos\phi - sin\phi sin(\theta - \phi)]}{cos^2\phi} \Longrightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{sin(\theta - \phi)cos(\theta - \phi + \phi)}{cos^2\phi} \Longrightarrow$$

$$\boxed{R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{sin(\theta - \phi)cos\theta}{cos^2\phi}}$$

Η σχέση αυτή για την οριακή περίπτωση $\phi = 0$ απλοποιείται στην γνωστή σχέση του βεληνεκούς για το οριζόντιο επίπεδο $R = \frac{2v_0^2}{g} sin\theta cos\theta = \frac{v_0^2}{g} sin2\theta$.

<u>*ΜΕΘΟΔΟΣ Β*</u>

Αναζητούμε το σημείο τομής της τροχιάς του βλήματος και του κεκλιμένου επιπέδου. Οι εξισώσεις αυτές αντίστοιχα είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = xtan\theta - gx^2/2(v_0 cos\theta)^2 \\ y = xtan\phi \end{array} \right\} \Longrightarrow xtan\theta - gx^2/2(v_0 cos\theta)^2 = xtan\phi \Longrightarrow$$

$$x = \frac{2v_0^2}{g}(tan\theta - tan\phi)cos^2\theta$$

Αλλά το x δίνεται μέσω του βεληνεκούς και της γωνίας φ ως $x = Rcos\phi$, οπότε:

$$Rcos\phi = \frac{2v_0^2}{g}(tan\theta - tan\phi)cos^2\theta \Longrightarrow R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{tan\theta - tan\phi}{cos\phi} cos^2\theta \Longrightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{sin\theta cos\theta - cos^2\theta tan\phi}{cos\phi} \Longrightarrow R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{cos\theta(sin\theta - cos\theta sin\phi/cos\phi)}{cos\phi} \Longrightarrow$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{cos\theta(sin\theta cos\phi - cos\theta sin\phi)}{cos^2\phi} \Longrightarrow$$

$$\boxed{R = \frac{2v_0^2}{g} \frac{sin(\theta - \phi)cos\theta}{cos^2\phi}}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ίδιο με την προηγούμενη μέθοδο αποτέλεσμα.

Άσκηση 4.31 HR

Ένα αεροπλάνο που εφορμά με σταθερή ταχύτητα σχηματίζοντας γωνία 53.0° με την κατακόρυφη, ελευθερώνει ένα βλήμα από ύψος 730 m. Το βλήμα προσκρούει στο έδαφος 5.00s μετά την ελευθέρωση. α) Πόση είναι η ταχύτητα του αεροπλάνου; β) Πόσο μακριά και οριζόντια κινείται το βλήμα κατά τη διάρκεια της πτήσης του; Πόση είναι γ) η οριζόντια και δ) η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητάς του ακριβώς πριν χτυπήσει στο έδαφος;

Άσκηση 4.65 HR

Τη χρονική στιγμή t_1 =2.00 s η επιτάχυνση ενός σωματιδίου που κινείται δεξιόστροφα είναι $\overrightarrow{\alpha_1} = (6.00 m/s^2)\hat{\imath} + (4.00 m/s^2)\hat{\jmath}$. Το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Τη χρονική στιγμή t_2=5.00 s η επιτάχυνσή του είναι $\overrightarrow{\alpha_2} = (4.00 m/s^2)\hat{\imath} + (-6.00 m/s^2)\hat{\jmath}$. Πόση είναι η ακτίνα της τροχιάς που ακολουθεί το σωματίδιο αν $t_2 - t_1$ είναι μικρότερο από μία περίοδο;

Άσκηση 4.68 HR

Μια γάτα κάνει βόλτα στα αλογάκια του λούνα πάρκ εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση. Τη χρονική στιγμή t_1 =2.00 s η ταχύτητα της γάτας είναι $\overrightarrow{v_1} = (3.00 m/s)\hat{\imath} + (4.00 m/s)\hat{\jmath}$, μετρημένη ως προς οριζόντιο σύστημα συντεταγμένων xy. Τη χρονική στιγμή t_2=5.00 s η ταχύτητα της γάτας είναι $\overrightarrow{v_2} = (-3.00 m/s)\hat{\imath} + (-4.00 m/s)\hat{\jmath}$. α) Πόσο είναι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης της γάτας και β) πόση είναι η μέση επιτάχυνση της γάτας κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $t_2 - t_1$, το οποίο είναι μικρότερο από μία περίοδο;

Άσκηση 4.73 HR

Δύο πλοία Α και Β, φεύγουν από το λιμάνι τη ίδια ώρα. Το πλοίο Α ταξιδεύει βορειοδυτικά με 24 κόμβους (knots) και το πλοίο Β ταξιδεύει με 28 κόμβους σε κατεύθυνση 40° δυτικά της νότιας. α) Πόσο είναι το μέτρο και β) ποια η κατεύθυνση της ταχύτητας του Α ως προς το Β; γ) Σε ποια χρονική στιγμή τα πλοία θα απέχουν 160 ναυτικά μίλια; δ)Ποια θα είναι η πορεία του Β (η κατεύθυνση της θέσης του Β) ως προς το Α εκείνη τη στιγμή;