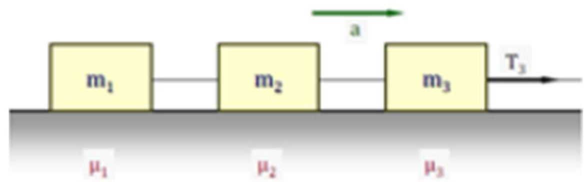
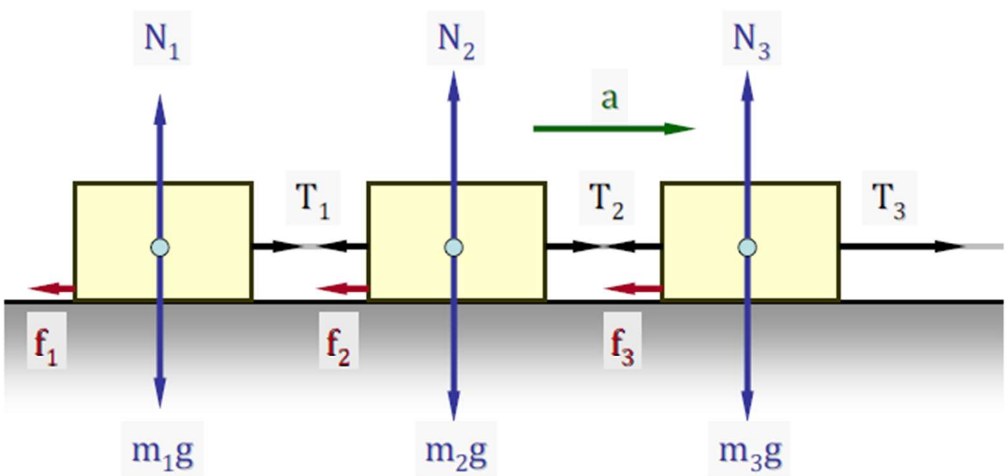
Δύναμη και Κίνηση – Νόμοι του Newton

Άσκηση 1. Συστοιχία τριών σωμάτων με μάζες m_1, m_2 και m_3, συνδεδεμένων με αβαρές και μη εκτατό νήμα, κινείται σε οριζόντιο δάπεδο υπό την επίδραση της οριζόντιας δύναμης $\overrightarrow{T_3}$, η οποία εφαρμόζεται στο τρίτο σώμα. Να υπολογιστούν οι οριζόντιες τάσεις του νήματος και η συνολική επιτάχυνση $\vec{a}$ του συστήματος: α) Όταν δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ των σωμάτων και του δαπέδου. β) Όταν οι συντελεστές τριβής ολίσθησης για τα τρία σώματα με το δάπεδο είναι μ_1, μ_2, και μ_3 αντίστοιχα. Πως διαμορφώνονται οι παραπάνω απαντήσεις όταν οι μάζες των σωμάτων είναι ίσες $m_1=m_2=m_3=m$ ή όταν οι συντελεστές τριβής είναι ίσοι με $\mu_1= \mu_2= \mu_3=\mu$;



Λύση

Στην πιο γενική περίπτωση διαφορετικών μαζών και συντελεστών τριβής οι ασκούμενες στα τρία σώματα δυνάμεις έχουν όπως στο παρακάτω σχήμα. Προφανώς οι αντιδράσεις



του δαπέδου N_i εξουδετερώνουν την δύναμη του βάρους $m_i g$ κάθε σώματος, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις $N_1 = m_1 g$, $N_2 = m_2 g$ και $N_3 = m_3 g$.

Κατά συνέπεια, οι εξισώσεις κίνησης στη γενική περίπτωση για κάθε σώμα περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$\left\{\begin{array}{l} T_1 - f_1 = m_1 a \\ T_2 - T_1 - f_2 = m_2 a \\ T_3 - T_2 - f_3 = m_3 a \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} T_1 - m_1 g \mu_1 = m_1 a \\ T_2 - T_1 - m_2 g \mu_2 = m_2 a \\ T_3 - T_2 - m_3 g \mu_3 = m_3 a \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} T_1 & = & m_1 a + m_1 g \mu_1 \\ T_2 - T_1 & = & m_2 a + m_2 g \mu_2 \\ T_3 - T_2 & = & m_3 a + m_3 g \mu_3 \end{array}\right\}$$

(α) Περίπτωση χωρίς Τριβές $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$

Στην περίπτωση αυτή το σετ των εξισώσεων διαμορφώνεται στην απλή μορφή:

$$\left\{\begin{array}{l} T_1 = m_1 a \\ T_2 - T_1 = m_2 a \\ T_3 - T_2 = m_3 a \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} T_1 = m_1 a \\ T_2 - m_1 a = m_2 a \\ T_3 - (m_1 + m_2) a = m_3 a \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} T_1 = m_1 a \\ T_2 = (m_1 + m_2) a \\ T_3 = (m_1 + m_2 + m_3) a \end{array}\right\}$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι η επιτάχυνση a και οι τάσεις T_1 και T_2:

$$\boxed{a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3}}$$

$$\boxed{T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} T_3}$$

$$\boxed{T_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} T_3}$$

Παρατηρούμε πως $T_1 < T_2 < T_3$, ενώ στην ειδική περίπτωση ίσων μαζών το αποτέλεσμα αυτό απλοποιείται στις σχέσεις:

$$a = \frac{T_3}{3m} \quad , \quad T_1 = \frac{1}{3} T_3 \quad , \quad T_2 = \frac{2}{3} T_3$$

(β) Περίπτωση με Τριβές

Στην περίπτωση αυτή, οι προηγούμενες γενικές εξισώσεις διαμορφώνονται στην παρακάτω μορφή:

$$\left\{\begin{array}{l} T_1 = m_1 a + m_1 g\mu_1 \\ T_2 = m_2 a + m_2 g\mu_2 + T_1 \\ T_3 = m_3 a + m_3 g\mu_3 + T_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} T_1 = m_1(a + g\mu_1) \\ T_2 = m_2(a + g\mu_2) + m_1(a + g\mu_1) \\ T_3 = m_3(a + g\mu_3) + m_2(a + g\mu_2) + m_1(a + g\mu_1) \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} (1) & T_1 = m_1 a + m_1\mu_1 g \\ (2) & T_2 = (m_1 + m_2)a + (m_1\mu_1 + m_2\mu_2)g \\ (3) & T_3 = (m_1 + m_2 + m_3)a + (m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3)g \end{array}\right\}$$

Από την εξίσωση (3) προκύπτει για την επιτάχυνση a η σχέση:

$$\boxed{a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3} - \frac{m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3}{m_1 + m_2 + m_3} g}$$

Για την περίπτωση που οι συντελεστές τριβής είναι ίσοι με μ, η παραπάνω σχέση απλοποιείται στην

$$\boxed{a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3} - \mu g}$$

ενώ οι αντίστοιχες τάσεις υπολογίζονται από τις (1) και (2):

$$T_1 = m_1 a + m_1\mu g \Longrightarrow T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} T_3 - m_1\mu g + m_1\mu g$$

$$\Longrightarrow \boxed{T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} T_3}$$

και

$$T_2 = (m_1 + m_2)a + (m_1 + m_2)\mu g \Longrightarrow T_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} T_3 - (m_1 + m_2)\mu g + (m_1 + m_2)\mu g$$

$$\Longrightarrow \boxed{T_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} T_3}$$

Παρατηρήσεις

1. Στην περίπτωση του κοινού συντελεστή τριβής μ των σωμάτων με το δάπεδο, οι τάσεις των νημάτων είναι ταυτόσημες με την περίπτωση όπου δεν υπάρχει τριβή!

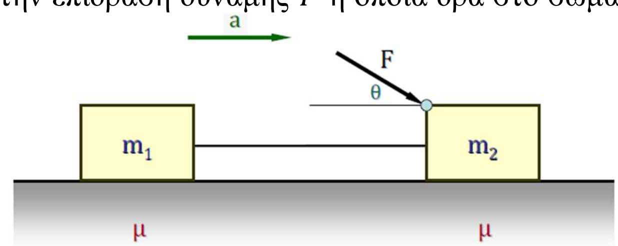
2. Στην γενική περίπτωση τριβών με διαφορετικούς συντελεστές, η επιταχυνόμενη κίνηση της συστοιχίας απαιτεί $a \geq 0$, δηλαδή:

$$a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3} - \frac{m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3}{m_1 + m_2 + m_3} g \geq 0$$

$$\Longrightarrow T_3 \geq (m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3)g$$

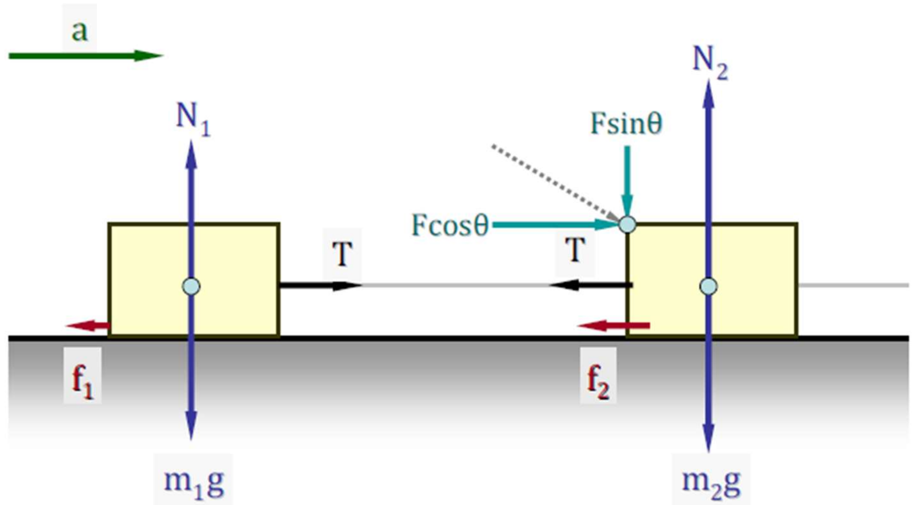
3. Σε οποιαδήποτε των περιπτώσεων ισχύει πάντα για τις τάσεις του νήματος η ανισότητα $T_1 < T_2 < T_3$.

Άσκηση 2. Δύο σώματα μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα είναι συνδεδεμένα με αβαρές και μη εκτατό νήμα και ολισθαίνουν σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση δύναμης $\vec{F}$ η οποία δρα στο σώμα 2 σχηματίζοντας γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Εάν ο κοινός συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του επιπέδου είναι μ, να υπολογισθεί η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του συστήματος των δύο σωμάτων καθώς και η τάση του νήματος T.



Λύση

Αναλύοντας τη δύναμη $\vec{F}$ στις συνιστώσες της, μέτρου $Fcos\theta$ (οριζόντια) και $Fsin\theta$ (κάθετη στο επίπεδο) και συμπεριλαμβάνοντας την τάση T του νήματος και τις αντίστοιχες τριβές των σωμάτων f_1 και f_2 έχουμε το σύνολο των δυνάμεων όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Για τις αντιδράσεις του επιπέδου N_1 και N_2 στα σώματα 1 και 2



αντίστοιχα ισχύουν $N_1 = m_1 g$ και $N_2 = m_2 g + F sin\theta$. Λαμβάνοντας τη κίνηση κάθε σώματος χωριστά σχηματίζουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left\{ \begin{array}{l} T - f_1 = m_1 a \\ F cos\theta - T - f_2 = m_2 a \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} T - N_1 \mu = m_1 a \\ F cos\theta - T - N_2 \mu = m_2 a \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} T - m_1 g \mu = m_1 a & (1) \\ F cos\theta - T - (m_2 g + F sin\theta)\mu = m_2 a & (2) \end{array} \right\}$$

Απαλείφοντας την τάση T του νήματος, προσθέτοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις, καταλήγουμε στην:

$$F cos\theta - (m_2 g + F sin\theta)\mu - m_1 g \mu = (m_1 + m_2) a$$

$$\Longrightarrow F(cos\theta - \mu sin\theta) - (m_1 + m_2)\mu g = (m_1 + m_2) a$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = \frac{F}{m_1 + m_2}(cos\theta - \mu sin\theta) - \mu g}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην (1) προκύπτει το μέτρο της τάσης T του νήματος:

$$T = m_1 a + m_1 \mu g = m_1 \frac{F}{m_1 + m_2}(cos\theta - \mu sin\theta) - m_1 \mu g + m_1 \mu g$$

$$\Longrightarrow \boxed{T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F (cos\theta - \mu sin\theta)}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Απαιτώντας η τάση του νήματος να είναι θετική, ώστε το σώμα 2 να μπορεί να σύρει το σώμα 1, καταλήγουμε στην σχέση:

$$T > 0 \Longrightarrow cos\theta - \mu sin\theta > 0 \Longrightarrow \boxed{tan\theta < \frac{1}{\mu}}$$

2. Η προηγούμενη απαίτηση διασφαλίζει τεντωμένο νήμα. Για να υπάρξει όμως και κίνηση χρειάζεται η επιτάχυνση να είναι θετική, ή οριακά μηδέν, οπότε:

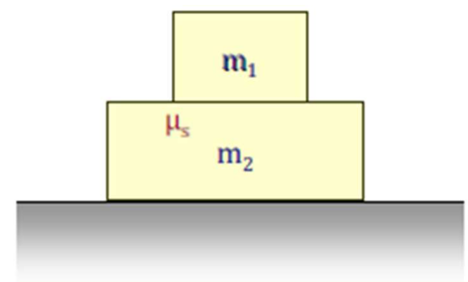
$$a \geq 0 \Longrightarrow \frac{F}{m_1 + m_2}(cos\theta - \mu sin\theta) - \mu g \geq 0$$

$$\Longrightarrow F(cos\theta - \mu sin\theta) \geq \mu(m_1 + m_2)g \Longrightarrow \boxed{F \geq \frac{\mu(m_1 + m_2)g}{cos\theta - \mu sin\theta}}$$

Αριθμητικό Παράδειγμα

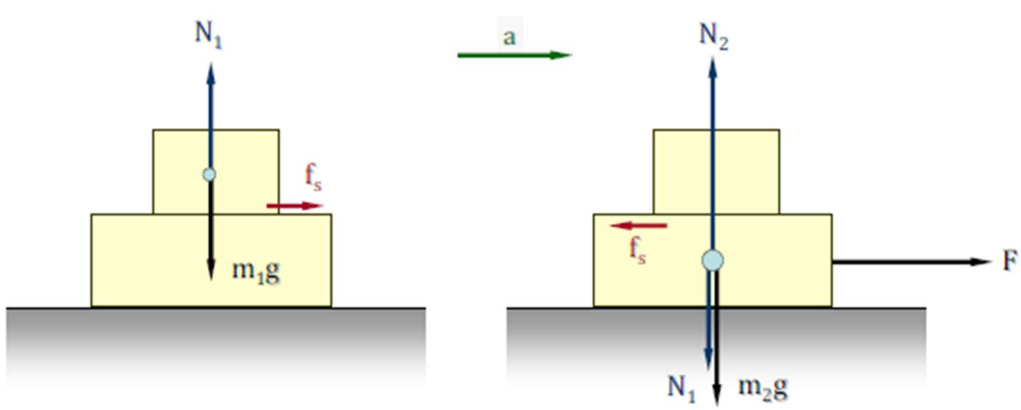
Για $\mu = 0.20$ η οριακή γωνία εφαρμογής της δύναμης $\vec{F}$ είναι $tan\theta < \frac{1}{0.20} = 5$, δηλαδή $\theta < 78.7^o$. Παραδείγματος χάριν, για $\theta = 30^o$ και $m_1 = m_2 = m$ βρίσκουμε οριακή δύναμη $F \approx 0.52mg$ και οριακή τάση νήματος $T = \mu m_1 g = 0.20mg$.

Άσκηση 3. Κιβώτιο 1 μάζας m_1 βρίσκεται πάνω σε κιβώτιο 2 μάζας m_2, το οποίο μπορεί να κινηθεί χωρίς τριβές σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Εάν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των δύο κιβωτίων είναι μ_s, να βρεθεί η μέγιστη δύναμη που μπορεί να ασκηθεί στο κιβώτιο 2 ώστε να αποφευχθεί η ολίσθηση του 1 και το σύστημα των δύο σωμάτων να κινηθεί ενιαία.



Λύση

Εάν το σώμα 2 κινείται προς τα δεξιά, τότε το σώμα 1 τείνει λόγω αδράνειας να κινηθεί προς τα αριστερά σχετικά με το 2, οπότε η δύναμη τριβής που ασκείται σ΄ αυτό έχει την ίδια κατεύθυνση με την επιτάχυνση. Οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα ξεχωριστά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Δεδομένου ότι στο σώμα 1 το βάρος του $m_1 g$ εξουδετερώνεται από την αντίδραση N_1 που του ασκεί το σώμα 2, η μοναδική δύναμη που δρα για να το επιταχύνει είναι η δύναμη τριβής f_s:

$$f_s = m_1 a \Longrightarrow f_s^{max} = m_1 a^{max} = m_1 g \mu_s \Longrightarrow \boxed{a^{max} = \mu_s g}$$

Η κίνηση του συστήματος και των δύο σωμάτων $(m_1 + m_2)$ γίνεται υπό την επίδραση της δύναμης F, οπότε ισχύει:

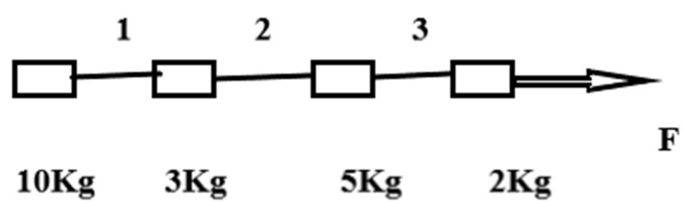
$$F = (m_1 + m_2)a \Longrightarrow F^{max} = (m_1 + m_2)a^{max} \Longrightarrow \boxed{F^{max} = (m_1 + m_2)\mu_s g}$$

Σημείωση Η εξίσωση κίνησης μόνο του σώματος 2 αναπαράγει τη κίνηση της συστοιχίας και των δύο σωμάτων:

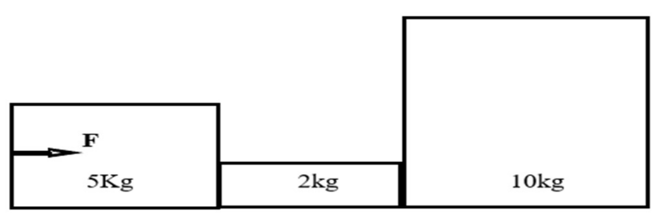
$$F - f_s = m_2 a \Longrightarrow F - m_1 a = m_2 a \Longrightarrow F = (m_1 + m_2)a$$

Ερώτηση 5.7 HR

Το σχήμα δείχνει ένα συρμό από τέσσερα σώματα, τα οποία τραβάει δύναμη $\vec{F}$σε επίπεδο χωρίς τριβές. Πόση είναι η συνολική μάζα που επιταχύνεται προς τα δεξιά από α) τη δύναμη $\vec{F}$ β) το νήμα 3 και γ) το σχοινί 1 ; δ) Κατατάξτε τα σώματα σύμφωνα με τις επιταχύνσεις τους με τη μεγαλύτερη τιμή πρώτη. ε) Κατατάξτε τα νήματα σύμφωνα με τις τάσεις τους, με τη μεγαλύτερη πρώτη.

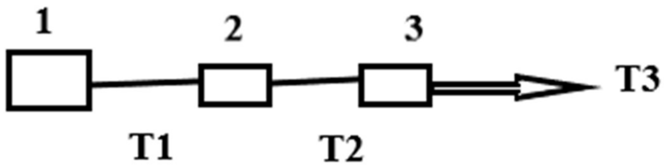


Ερώτηση 5.12 HR. Το σχήμα δείχνει τρία σώματα που ωθούνται από οριζόντια δύναμη $\vec{F}$σε επίπεδο χωρίς τριβές. Πόση είναι η συνολική μάζα που επιταχύνεται προς τα δεξιά από α) τη δύναμη $\vec{F}$ β) από τη δύναμη $\overrightarrow{F_{21}}$ στο σώμα 2 από το σώμα 1, γ) από τη δύναμη $\overrightarrow{F_{32}}$ στο σώμα 3 από το σώμα 2 δ) Κατατάξτε τα σώματα σύμφωνα με τα μέτρα των επιταχύνσεων τους με τη μεγαλύτερη τιμή πρώτη. ε) Κατατάξτε τις δυνάμεις $\vec{F}, \overrightarrow{F_{21}}\, και\, \overrightarrow{F_{32}}$, σύμφωνα με τα μέτρα τους, με τη μεγαλύτερη πρώτη.



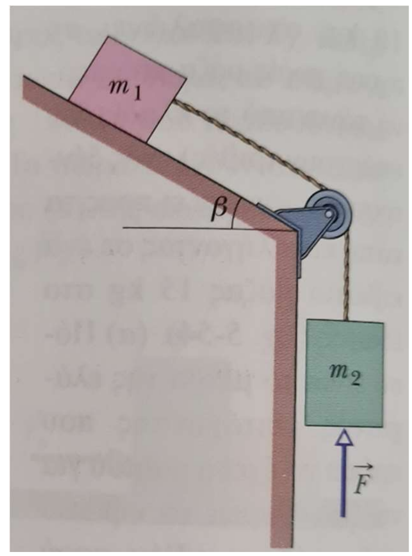
Άσκηση 5.51 HR

Στο σχήμα τρία σώματα συνδεδεμένα μεταξύ τους τραβιούνται προς τα δεξιά σε οριζόντιο τραπέζι χωρίς τριβές με δύναμη μέτρου T_3=65,0 N. Αν m_1 = 12Kg, m_2 = 24Kg και m_3 = 31 Kg, να υπολογίστε α) το μέτρο της επιτάχυνσης του συστήματος, β) την τάση T_1 και γ) την τάση T_2 .



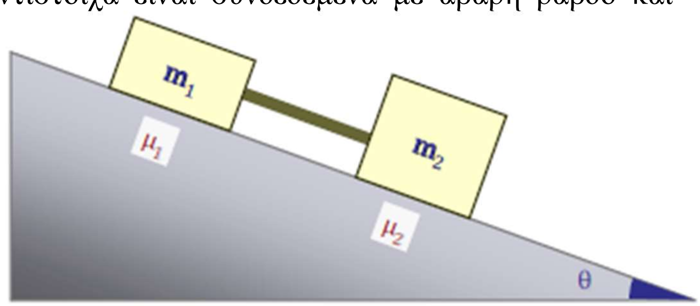
Άσκηση 5.101 HR

Στο σχήμα ένα τσίγκινο κουτί (m_1 = 1,0 Kg), σε κεκλιμένο επίπεδο χωρίς τριβές συνδέεται μέσω νήματος με μια μεγάλη κονσέρβα (m_2 = 2,0 Kg). Η τροχαλία είναι χωρίς μάζα και τριβές. Στην κονσέρβα, η οποία έχει επιτάχυνση 5.5m/s^2 προς τα κάτω, ασκείται δύναμη μέτρου F= 6,0N προς τα πάνω. Πόση είναι α) η τάση στο νήμα και β) η γωνία β ;



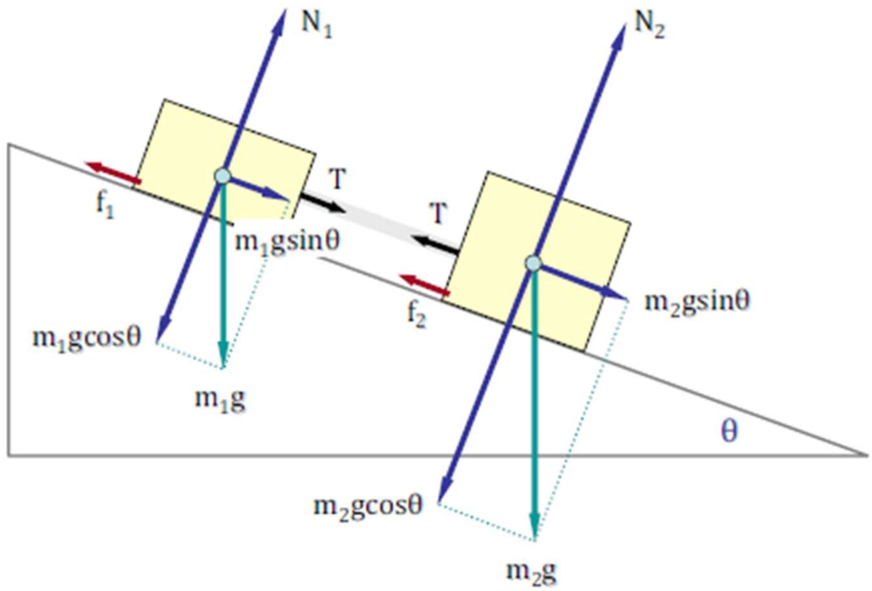
Άσκηση 4.

Δύο σώματα 1 και 2 μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα είναι συνδεδεμένα με αβαρή ράβδο και ολισθαίνουν κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ μόνο υπό την επίδραση των βαρών τους. Εάν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του επιπέδου είναι αντίστοιχα μ_1 και μ_2 να υπολογιστεί η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του συστήματος των δύο σωμάτων καθώς και η τάση $\vec{T}$ της ράβδου.



Λύση

Η σύζευξη των δύο σωμάτων με την αβαρή ράβδο επιτρέπει το σύστημα να κινηθεί ενιαία με επιτάχυνση a. Η ράβδος, σε αντίθεση με το νήμα, επιτρέπει την άσκηση δύναμης Τ και προς τις δύο κατευθύνσεις. Ανάλογα δηλαδή με τις τιμές που έχουν οι συντελεστές τριβής μ_1 και μ_2, θα μπορούσε το σώμα 1 να ασκεί μέσω της ράβδου επιπρόσθετη δύναμη στο σώμα 2, εάν η επιτάχυνση του σώματος 1 ήταν μεγαλύτερη αυτής του 2 στην περίπτωση που τα θεωρούσαμε ασύνδετα. Μια τέτοια άσκηση δύναμης δεν είναι δυνατή με νήμα.



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι ασκούμενες δυνάμεις σε κάθε σώμα. Εδώ έχουμε θεωρήσει για την τάση T τέτοια φορά, ωσάν το σώμα 2 να έλκει το 1. Αρνητικό αποτέλεσμα στην τιμή της T πρέπει να αναστρέψει τη φορά της

Οι αντιδράσεις του επιπέδου N_1 και N_2 στα σώματα 1 και 2 είναι αντίστοιχα $N_1 = m_1gcos\theta$ και $N_2 = m_2gcos\theta$. Θεωρώντας επιταχυνόμενη κίνηση μέτρου a κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και εξετάζοντας τη κίνηση κάθε σώματος χωριστά σχηματίζουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_1gsin\theta + T - f_1 = m_1a & (1) \\ m_2gsin\theta - T - f_2 = m_2a & (2) \end{array} \right\}$$

Διαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων (1) και (2) απαλείφει την επιτάχυνση a και δίνει:

$$m_2(m_1 g sin\theta + T - f_1) = m_1(m_2 g sin\theta - T - f_2) \Longrightarrow m_2 T - m_2 f_1 = -m_1 T - m_1 f_2$$

$$\Longrightarrow T = \frac{m_2 f_1 - m_1 f_2}{m_1 + m_2} \Longrightarrow T = \frac{m_2 \mu_1 N_1 - m_1 \mu_2 N_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Longrightarrow T = \frac{m_2 \mu_1 m_1 g cos\theta - m_1 \mu_2 m_2 g cos\theta}{m_1 + m_2} \Longrightarrow \boxed{T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mu_1 - \mu_2) g cos\theta}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή της τάσης T στην (1) υπολογίζεται η επιτάχυνση a:

$$a = g sin\theta + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mu_1 - \mu_2) g cos\theta - \mu_1 g cos\theta$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = \left[sin\theta - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} cos\theta \right] g}$$

Παρατηρήσεις

1. Το αποτέλεσμα της τάσης T δείχνει πως η φορά της είναι αυτή του σχεδίου εφόσον $\mu_1 > \mu_2$. Σε αντίθετη περίπτωση το σώμα 1 (έχοντας μικρότερη τριβή και άρα μεγαλύτερη επιτάχυνση του 2 εάν ήταν ασύζευκτα) ωθεί το σώμα 2 με δυνάμεις T αντίθετες των σχεδιασμένων.

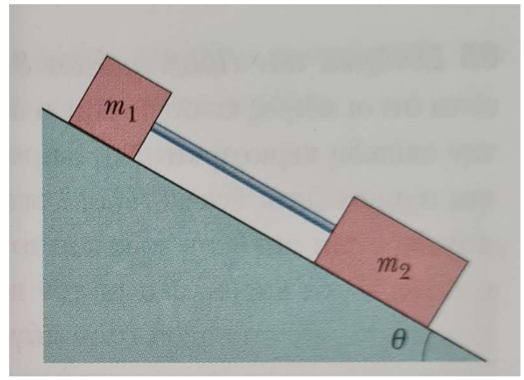
2. Εάν απαιτήσουμε το σύστημα να κινείται οριακά με ομαλή ταχύτητα, δηλαδή $a = 0$, πρέπει:

$$sin\theta - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} cos\theta = 0 \Longrightarrow \boxed{tan\theta = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}}$$

3. Στην περίπτωση που $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ η τάση μηδενίζεται ($T = 0$) ενώ η επιτάχυνση απλοποιείται στην μορφή $a = (sin\theta - \mu cos\theta) g$, ικανοποιώντας την γνωστή σχέση $\mu = tan\theta$ στην οριακή περίπτωση της ομαλής κίνησης.

Άσκηση 6.27 HR

Δύο κύβοι, με βάρη 3,6 N και 7,2 N, συνδέονται με σχοινί χωρίς μάζα και ολισθαίνουν προς τα κάτω σε κεκλιμένο επίπεδο 30°. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στον ελαφρότερο κύβο και το επίπεδο είναι 0,10. Ο αντίστοιχος συντελεστής τριβής ανάμεσα στον βαρύτερο κύβο και το επίπεδο είναι 0,20. Υποθέτοντας ότι ο ελαφρότερος κύβος είναι μπροστά βρείτε α) το μέτρο της επιτάχυνσης των κύβων και β) την τάση στο σχοινί.



Άσκηση 6.35 HR

Πλοίο 1000 kg ταξιδεύει με 90 Km/h όταν η μηχανή του σταματά. Το μέτρο της δύναμης τριβής $\overrightarrow{F_\kappa}$ ανάμεσα στο πλοίο και το νερό είναι ανάλογο της ταχύτητας v του πλοίου $\overrightarrow{F_\kappa} = 70 * v$ όπου, η v είναι σε μέτρα το δευτερόλεπτο και η $\overrightarrow{F_\kappa}$ σε newtons. Βρείτε τον χρόνο που απαιτείται για να επιβραδυνθεί το πλοίο μέχρι το μέτρο της ταχύτητάς του να γίνει 45 Km/h.

Άσκηση 4. Στερεό σώμα μάζας m ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα και πέφτει προς τα κάτω υπό την επίδραση του βαρυτικού πεδίου της Γης. Εάν η αντίσταση του αέρα δίνεται από τη σχέση $F = -kv$, όπου v η ταχύτητά του και k σταθερά, να βρεθεί η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας του σώματος αυτού.

Λύση

Θεωρώντας θετική φορά των διανυσμάτων προς τα κάτω θα ισχύει η σχέση:

$$mg - kv = ma \Longrightarrow mg - kv = m\frac{dv}{dt} \Longrightarrow g - \frac{k}{m}v = \frac{dv}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = dt \Longrightarrow \int_0^v \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = \int_0^t dt \Longrightarrow \int_0^v \frac{d\left(g - \frac{k}{m}v\right)}{g - \frac{k}{m}v} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$

$$\Longrightarrow ln\left(g - \frac{k}{m}v\right) - ln(g) = -\frac{k}{m}t \Longrightarrow ln\left(1 - \frac{k}{mg}v\right) = -\frac{k}{m}t$$

$$\Longrightarrow 1 - \frac{k}{mg}v = e^{-\frac{k}{m}t} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)}$$

Η σχέση αυτή δείχνει την εκθετική αύξηση της ταχύτητας προς την οριακή τιμή

$$\boxed{v_0 = \lim_{t\to\infty} v = \frac{mg}{k}}$$