Κινητική Ενέργεια και Έργο

Άσκηση 1. Δίνεται η δύναμη $\vec{F}$ στο επίπεδο xy που περιγράφεται από την εξίσωση $\vec{F}(x, y) = (2x + y)\hat{\imath} + (2y + x)\hat{\jmath}$. Να υπολογιστεί το έργο που παράγεται από τη δύναμη αυτή από το σημείο A(0, 0) στο σημείο B(2, 8) μέσω των δύο παρακάτω διαδρομών: α) y=4x και β) $y=x^3$.

Λύση

(α) <u>Διαδρομή $y = 4x$</u>

$$W_\alpha = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy = \int_{x=0}^{x=2} (2x + y)\, dx + \int_{y=0}^{y=8} (2y + x)\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} (2x + 4x)\, dx + \int_{y=0}^{y=8} \left(2y + \frac{y}{4}\right) dy = \int_0^2 6x dx + \int_0^8 \frac{9y}{4} dy$$

$$= \left[3x^2\right]_0^2 + \left[\frac{9y^2}{8}\right]_0^8 = 12 + 72 = 84$$

(β) <u>Διαδρομή $y = x^3$</u>

$$W_\beta = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy = \int_{x=0}^{x=2} (2x + y)\, dx + \int_{y=0}^{y=8} (2y + x)\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left(2x + x^3\right) dx + \int_{y=0}^{y=8} \left(2y + y^{1/3}\right) dy = \left[x^2 + \frac{x^4}{4}\right]_0^2 + \left[y^2 + \frac{3y^{4/3}}{4}\right]_0^8 = 4+4+64+12 = 84$$

<u>ή εναλλακτικά</u>

$$W_\beta = \int_{x=0}^{x=2} (2x + y)\, dx + \int_{y=0}^{y=8} (2y + x)\, dy = \int_{x=0}^{x=2} \left(2x + x^3\right) dx + \int_{x=0}^{x=2} \left(2x^3 + x\right) \left(3x^2 dx\right)$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left(2x + x^3 + 6x^5 + 3x^3\right) dx = \left[x^2 + \frac{x^4}{4} + x^6 + \frac{3x^4}{4}\right]_0^2 = 4 + 4 + 64 + 12 = 84$$

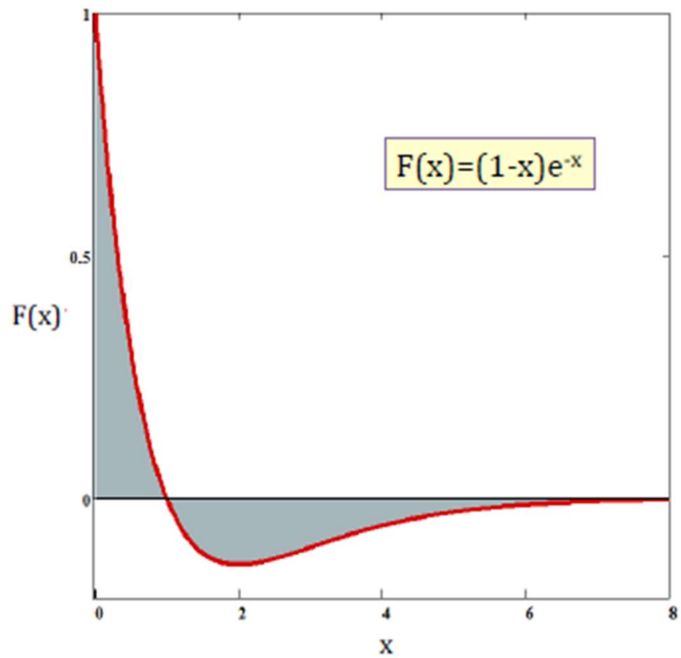
Παρατηρούμε πως το παραγόμενο έργο και στις δύο διαδρομές είναι το ίδιο. Επειδή δε:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(2y + x) = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

συμπεραίνουμε πως η δύναμη αυτή είναι συντηρητική.

Άσκηση 2. Υλικό σημείο κινείται επάνω στο άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F}(x) = (1-x)*e^{-x}\hat{\imath}$. Να αποδειχθεί ότι το παραγόμενο από τη δύναμη έργο από το σημείο x=0 στο x=1 καταναλώνεται στο υπόλοιπο της διαδρομής μέχρι το άπειρο, δηλαδή $W_{0\to1} = -W_{1\to\infty}$.

Λύση



Η γραφική παράσταση της δύναμης $\vec{F}(x)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Είναι ευχόλως κατανοητό πως για τιμές $x < 1$ η δύναμη έχει θετική φορά (προς τα δεξιά) ενώ για $x > 1$ η φορά της αντιστρέφεται.

Γενικά, ο υπολογισμός του έργου από το σημείο α στο σημείο β δίνεται από τη σχέση:

$$W_{\alpha\to\beta} = \int_\alpha^\beta F(x)dx$$

και για την συγκεκριμένη δύναμη:

$$W_{\alpha\to\beta} = \int_\alpha^\beta (1-x)e^{-x}dx = \int_\alpha^\beta (x-1)\left[e^{-x}\right]'dx = \Big[(x-1)e^{-x}\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta (x-1)'e^{-x}dx$$

$$= \Big[(x-1)e^{-x}\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta e^{-x}dx = \Big[(x-1)e^{-x}+e^{-x}\Big]_\alpha^\beta = \Big[xe^{-x}\Big]_\alpha^\beta \Longrightarrow \boxed{W_{\alpha\to\beta} = \Big[xe^{-x}\Big]_\alpha^\beta}$$

Για τα όρια του παρόντος προβλήματος ισχύουν:

$$W_{0\to1} = \Big[xe^{-x}\Big]_0^1 = 1e^{-1} - 0e^0 = e^{-1} \quad \& \quad W_{1\to\infty} = \Big[xe^{-x}\Big]_1^\infty = 0 - e^{-1} = -e^{-1}$$

Στην περίπτωση υπολογισμού του παραπάνω ορίου στο άπειρο γίνεται χρήση του κανόνα του L'Hospital. Άρα $W_{0\to1} = -W_{1\to\infty}$ (ίσες επιφάνειες στο σχήμα) ή ισοδύναμα $W_{0\to1} + W_{1\to\infty} = 0$.

Άσκηση 7.29 HR

Η μόνη δύναμη που δρα σε σώμα 2,0 kg καθώς αυτό κινείται κατά μήκος ενός θετικού άξονα x έχει συνιστώσα F_x = -6x N με το x σε μετρά. Η ταχύτητα στη θέση x=3,0m είναι 8,0m/s. α) Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος στη θέση x=4,0m; β) Σε ποια θετική τιμή της θέσης x θα έχει το σώμα ταχύτητα 5,0m/s;

Άσκηση 7.35HR

Η δύναμη σε ένα σωματίδιο κατευθύνεται κατά μήκος ενός άξονα x και δίνεται από τη σχέση $F = F_0\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)$. Βρείτε το έργο που εκτελείται από τη δύναμη καθώς η δύναμη μετακινεί το σωματίδιο από τη θέση x=0 στη θέση x=2x_0 (α) σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της F(x) και μετρώντας το έργο από το γράφημα και β) ολοκληρώνοντας την F(x).

Άσκηση 7.45 HR

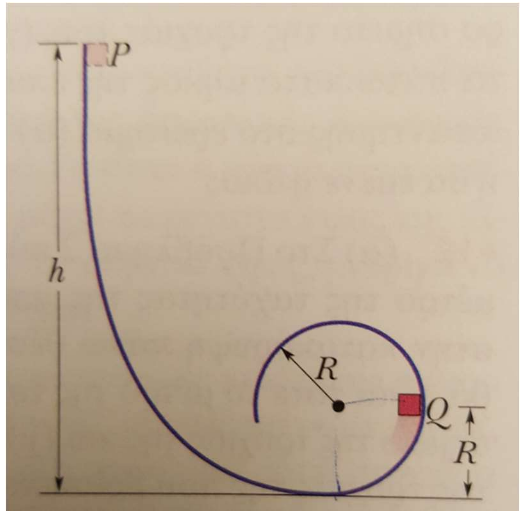
Δύναμη 5,0 N δρα σε σώμα 15 kg που αρχικά ηρεμεί. Υπολογίστε το έργο που εκτελείται από τη δύναμη α) στο πρώτο, β) στο δεύτερο και γ) στο τρίτο δευτερόλεπτο και δ) τη στιγμιαία ισχύ της δύναμης στο τέλος του τρίτου δευτερόλεπτου.

Άσκηση 7.80 HR

Θήκη CD ολισθαίνει κατά μήκος ενός δαπέδου προς τη θετική κατεύθυνση ενός άξονα x ενώ μια δύναμη $\overrightarrow{F_a}$ δρα στη θήκη. Η δύναμη κατευθύνεται κατά μήκος του άξονα x και έχει x συνιστώσα $F_{\alpha x} = 9x - 3x^2$, με x σε μέτρα και F_{ax} σε N. Η θήκη ξεκινά από την ηρεμία στη θέση x=0, και κινείται έως ότου βρίσκεται ξανά σε κατάσταση ηρεμίας. α) Κάντε το γράφημα του έργου που εκτελεί η $\overrightarrow{F_a}$ στη θήκη ως συνάρτηση του x. β) Σε ποια θέση το έργο είναι μέγιστο, και γ) πόση είναι αυτή η μέγιστη τιμή; δ) Σε ποια θέση το έργο έχει μειωθεί στην τιμή μηδέν; ε) Σε ποια θέση η θήκη βρίσκεται ξανά σε κατάσταση ηρεμίας;

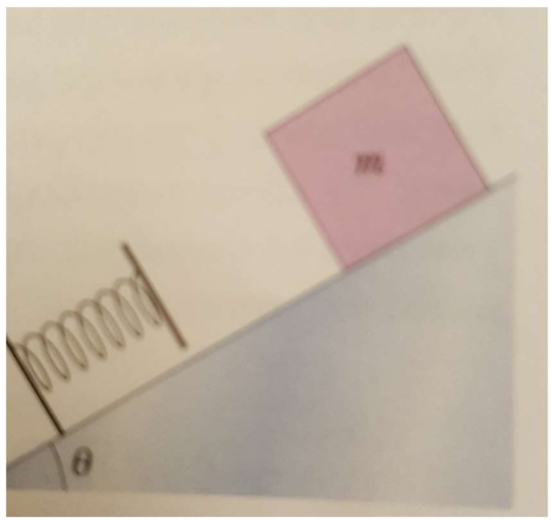
Δυναμική Ενέργεια – Διατήρηση της Ενέργειας

Άσκηση 8.8 HR



Στο σχήμα παρουσιάζεται ένας μικρός κύβος μάζας m = 0,032 kg ο οποίος μπορεί να ολισθαίνει κατά μήκος μιας διαδρομής ανακύκλωσης χωρίς τριβές. Η ακτίνα του βρόχου είναι R = 12 cm. Ο κύβος αφήνεται από το σημείο P σε ύψος h = 5R πάνω από το χαμηλότερο σημείο του βρόχου. Πόσο έργο εκτελεί η βαρυτική δύναμη στο σώμα κατά τη διάρκεια της κίνησης του κύβου από το σημείο P μέχρι α) το σημείο Q και β) το υψηλότερο σημείο του βρόχου; Αν δεχθούμε ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος κύβος – Γη είναι μηδέν στο χαμηλότερο σημείο του βρόχου, πόση είναι η τιμή της όταν ο κύβος είναι γ) στο σημείο P, δ) στο σημείο Q και ε) στην κορυφή του βρόχου; στ) Αν, αντί ο κύβος απλά αφεθεί, βληθεί με αρχική ταχύτητα και κατεύθυνση προς τα κάτω κατά μήκος της διαδρομής, οι τιμές των απαντήσεων στα ερωτήματα από το α) έως το ε) αυξάνονται, μειώνονται ή μένουν ιδίες;

Άσκηση 8.31 HR



Στο σχήμα ένα σώμα μάζας m = 12 kg που αρχικά ηρεμεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο χωρίς τριβές, γωνίας κλίσης θ = 30° αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Κάτω από το σώμα υπάρχει ελατήριο που αν εφαρμοστεί επάνω του δύναμη 270 N θα συσπειρωθεί κατά 2 cm. Το σώμα στιγμιαία ακινητοποιείται όταν συσπειρώνει το ελατήριο κατά 5,5 cm. α) Πόσο το σώμα μετακινείται προς τα κάτω κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου από τη θέση που αρχικά ηρεμούσε μέχρι το σημείο ακινητοποίησής του; β) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελατήριο.

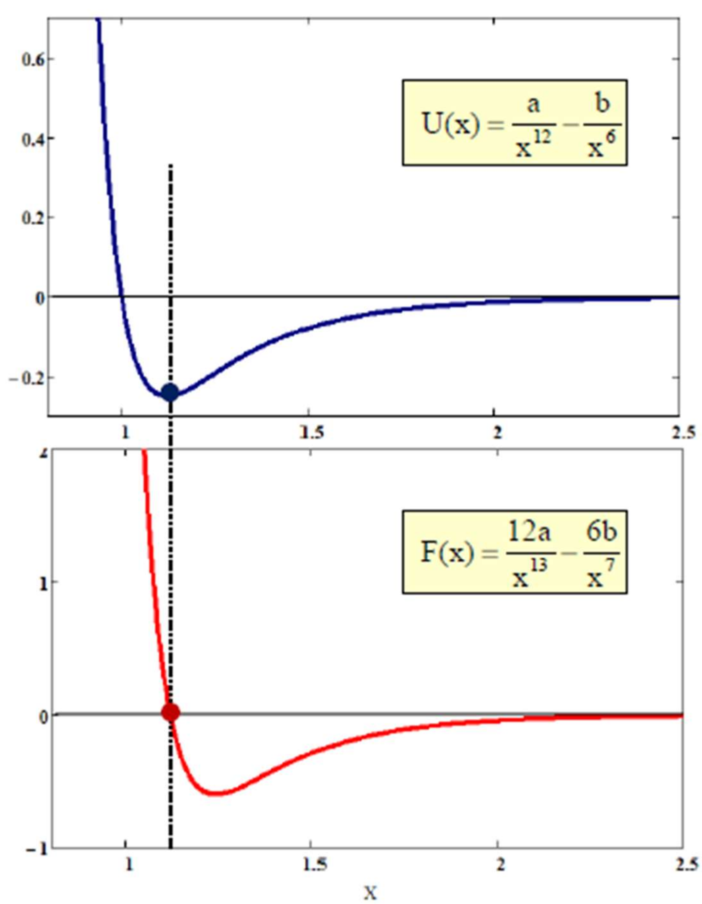
Άσκηση 3. Για την περιγραφή των ασκούμενων δυνάμεων σε ένα διατομικό μόριο χρησιμοποιείται το δυναμικό Lennard-Jones το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^{6}}$$

Όπου x η απόσταση των ατόμων στο μόριο και A και B θετικές σταθερές. Να παρασταθεί γραφικά το δυναμικό αυτό καθώς και η ασκούμενη δύναμη και να βρεθεί η θέση ισορροπίας των ατόμων του μορίου

Λύση

Η ασκούμενη δύναμη από τη συνάρτηση δυναμικού Lennard-Jones υπολογίζεται:



$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

$$\Longrightarrow F(x) = -\frac{d}{dx}\left[\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^{6}}\right]$$

$$\Longrightarrow F(x) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^{7}}$$

Οι γραφικές παραστάσεις αμφοτέρων των συναρτήσεων $U(x)$ και $F(x)$ φαίνονται στο διπλανό σχήμα για τιμές των παραμέτρων $a = 1$ και $b = 1$.

Η ζητούμενη θέση ισορροπίας βρίσκεται από τον μηδενισμό της δύναμης:

$$F(x) = 0 \Longrightarrow \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^{7}} = 0 \Longrightarrow x^6 = \frac{2a}{b} \Longrightarrow \boxed{x_0 = \sqrt[6]{2a/b}}$$

Αντίστοιχα η θέση μηδενισμού του δυναμικού είναι:

$$U(x) = 0 \Longrightarrow \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^{6}} = 0 \Longrightarrow x^6 = \frac{a}{b} \Longrightarrow x = \sqrt[6]{a/b}$$

Άσκηση 8.38 HR

Η δυναμική ενέργεια ενός διατομικού μορίου (ενός συστήματος που αποτελείται από δύο άτομα) δίνεται από την

$$U = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^{6}}$$

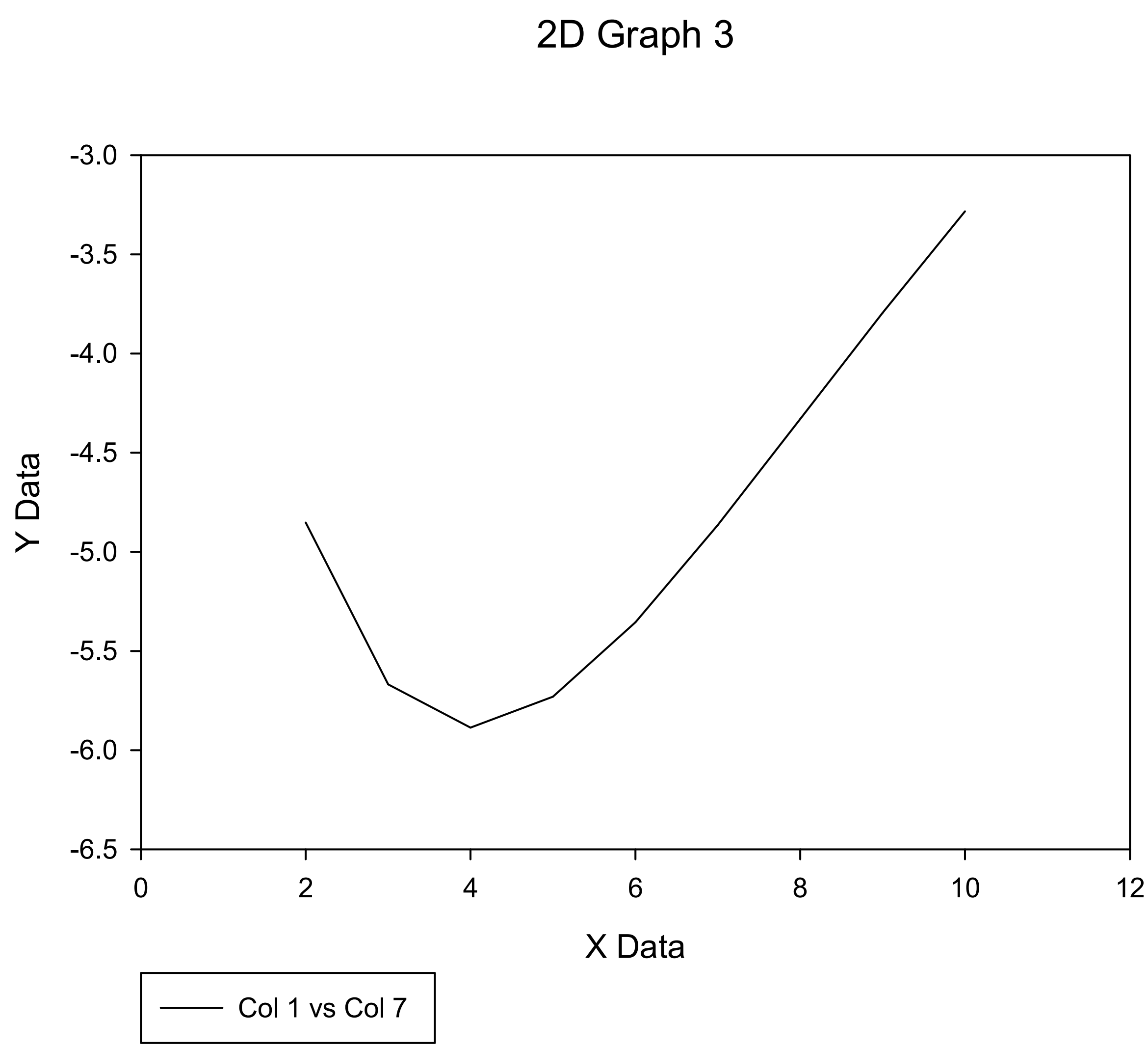
Όπου r είναι η απόσταση ανάμεσα στα δύο άτομα που αποτελούν το μόριο και A και B είναι θετικές σταθερές. Αυτή η δυναμική ενέργεια συνδέεται με τη δύναμη που κρατάει τα δύο άτομα ενωμένα στο μόριο. α) Υπολογίστε την απόσταση ισορροπίας – δηλαδή την απόσταση ανάμεσα στα άτομα όταν η δύναμη που δρα στο καθένα από αυτά είναι μηδέν. Η δύναμη ανάμεσα στα άτομα είναι απωστική (δηλαδή τα άτομα τείνουν να απομακρυνθούν) ή ελκτική (δηλαδή τα άτομα τείνουν να πλησιάσουν) αν η απόστασή τους είναι β) μικρότερη και γ) μεγαλύτερη από την απόσταση ισορροπίας;

Άσκηση 8.41 HR

Σε σωματίδιο μάζας 1 kg το οποίο κινείται κατά μήκος του άξονα x δρα μόνο μια συντηρητική δύναμη F(x). Η δυναμική ενέργεια U(x) που συνδέεται με την F(x) δίνεται από την

$$U(x) = -4xe^{-\frac{x}{4}}J$$

Όπου το x είναι σε μέτρα . Στη θέση x = 5m το σωματίδιο έχει κινητική ενέργεια 2 J. α) Πόση είναι η μηχανική ενέργεια του συστήματος; β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της U(x) ως συνάρτηση του x για $0 \leq x \leq 10\ m$ και πάνω στην ίδια γραφική παράσταση σχεδιάστε τη γραμμή που αναπαριστά τη μηχανική ενέργεια του συστήματος. Χρησιμοποιήστε το ερώτημα β) για να καθορίσετε γ) την ελάχιστη τιμή του x στην οποία το σωματίδιο μπορεί να φτάσει και δ) τη μεγαλύτερη τιμή του x στην οποία το σωματίδιο μπορεί να φτάσει. Χρησιμοποιήστε το ερώτημα β) για να καθορίσετε ε)τη μέγιστη κινητική ενέργεια του σωματιδίου και στ) την τιμή της θέσης x που την αποκτά. ι) Βρείτε τη συνάρτηση F(x) ως συνάρτηση του x, όπου η δύναμη είναι σε N και η θέση σε μέτρα. ια) Για ποια (πεπερασμένη) τιμή του x μηδενίζεται η δύναμη;


2D Graph 3
Y Data
-3.0
-3.5
-4.0
-4.5
-5.0
-5.5
-6.0
-6.5
0
2
4
6
8
10
12
X Data
Col 1 vs Col 7