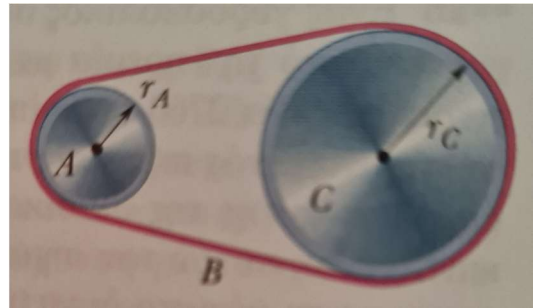


Περιστροφή

Άσκηση 10.30 Η

Στο σχήμα ο τροχός Α ακτίνας $r_A = 10 \text{ cm}$ είναι συνδεδεμένος μέσω του μάντα Β με τον τροχό C ακτίνας $r_C = 25 \text{ cm}$. Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού Α αυξάνεται από την ηρεμία με σταθερό ρυθμό 1.6 rad/s^2 . Να βρείτε ο χρόνος που χρειάζεται ο τροχός C για να φτάσει σε γωνιακή ταχύτητα 100 rev/min , υποθέτοντας ότι ο μάντας δεν ολισθαίνει.



Άσκηση 1.

Να μελετηθεί η Μηχανή Atwood, δηλαδή σύστημα δύο μαζών m_1 m_2 που κρέμονται με αβαρές και μη εκτατό νήμα από τροχαλία μάζας M και ακτίνας R . Υποθέστε ότι $m_1 > m_2$ και υπολογίστε την επιτάχυνση a του συστήματος.

Λύση

Με βάση τις δυνάμεις που δρουν στα δύο σώματα και την τροχαλία όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, περιγράφεται η γραμμική κίνηση των δύο σωμάτων και η περιστροφική κίνηση της τροχαλίας με τις παρακάτω εξισώσεις:

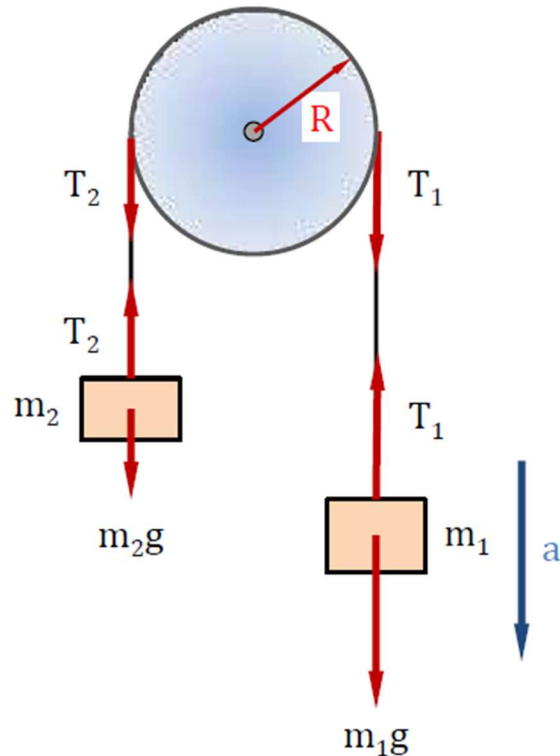
$$m_1 g - T_1 = +a m_1 \quad (1)$$

$$m_2 g - T_2 = -a m_2 \quad (2)$$

$$(T_1 - T_2)R = I a_{\Gamma} = I \frac{a}{R} \quad (3)$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει:

$$a(m_1 + m_2) = (m_1 - m_2)g - (T_1 - T_2)$$



και αντικαθιστώντας τον όρο $(T_1 - T_2)$ από την εξίσωση (3) παίρνουμε τελικά:

$$a(m_1 + m_2) = (m_1 - m_2)g - I \frac{a}{R^2} \implies a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2}g$$

Λαμβάνοντας δε υπόψη την ροπή αδράνειας της δισκοειδούς τροχαλίας $I = 1/2MR^2$, το αποτέλεσμα διαμορφώνεται στο:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + (1/2MR^2)/R^2}g \implies \boxed{a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}g}$$

Συγκρινόμενο το αποτέλεσμα αυτό με την προκύπτουσα επιτάχυνση για τροχαλία αμελητέας μάζας

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

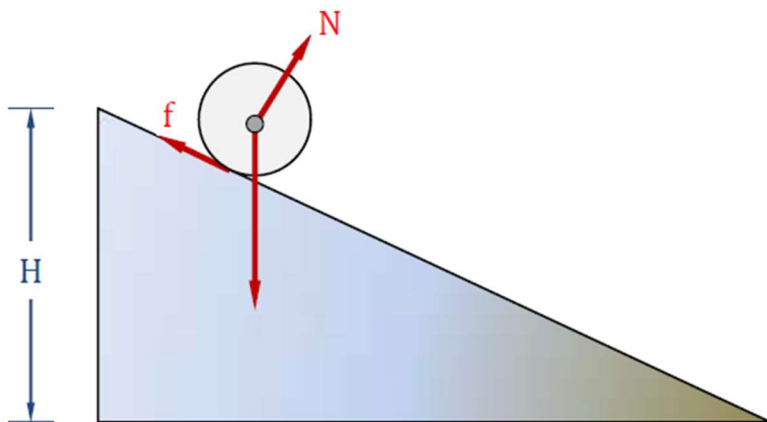
παρατηρούμε πως η μάζα της τροχαλίας συμμετέχει κατά το ήμισυ στην συνολική αδράνεια του συστήματος $(m_1 + m_2 + M/2)$ ενώ η κινούσα δύναμη $(m_1 - m_2)g$ παραμένει η ίδια και στις δύο περιπτώσεις.

Άσκηση 2.

Σφαίρα και κύλινδρος ίσης μάζας M και ακτίνας R αφήνονται χωρίς αρχική ταχύτητα να κυλίσουν από το ίδιο αρχικό ύψος H σε κεκλιμένο επίπεδο. Εάν τα σώματα αυτά δεν ολισθαίνουν κατά την κίνησή τους, να βρεθεί ποιο από τα δύο θα φτάσει πρώτο στο τέλος του κεκλιμένου επιπέδου. Δίνονται οι ροπές αδράνειας της σφαίρας $I_S = \frac{2}{5}MR^2$ και του κυλίνδρου $I_C = \frac{1}{3}MR^2$.

Λύση

Κάνοντας χρήση της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για κάθε ένα των σωμάτων θα έχουμε τελικά μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης. Θα ισχύει λοιπόν:



$$MgH = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\frac{V^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V^2 = \frac{2MgH}{M+I/R^2}}$$

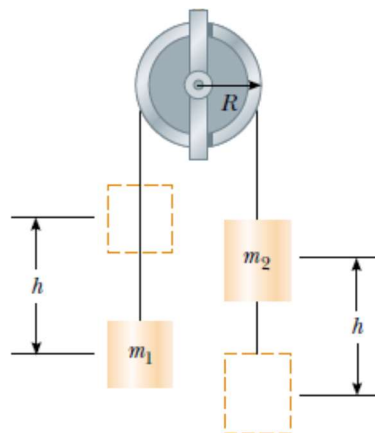
Παρατηρούμε πως το σώμα με την μικρότερη ροπή αδράνειας έχει μεγαλύτερη τελική γραμμική ταχύτητα, άρα φτάνει πρώτο. Κατά συνέπεια η σφαίρα είναι αυτή που θα φτάσει πρώτη στο τέλος του κεκλιμένου επιπέδου. Ειδικότερα δε, οι τελικές ταχύτητες θα είναι:

$$V_S^2 = \frac{2MgH}{M + (2/5MR^2)/R^2} \Rightarrow \boxed{V_S^2 = \frac{10}{7}gH}$$

$$V_C^2 = \frac{2MgH}{M + (1/2MR^2)/R^2} \Rightarrow \boxed{V_C^2 = \frac{4}{3}gH}$$

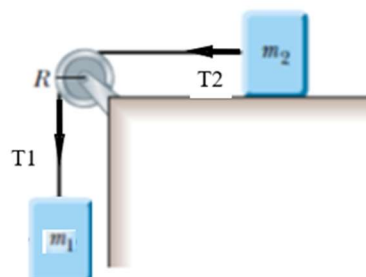
Άσκηση 10.55 Η

Στο σχήμα το σώμα 1 έχει μάζα $m_1 = 460 \text{ g}$, το σώμα 2 έχει μάζα $m_2 = 500 \text{ g}$ και η τροχαλία, που είναι στερεωμένη σε οριζόντιο άξονα με αμελητέα τριβή, έχει $R = 5 \text{ cm}$. Όταν αφηθεί από την ηρεμία, το σώμα 2 πέφτει κατά 75 cm σε 5 s χωρίς το νήμα να ολισθαίνει στην τροχαλία. α) Πόσο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης των σωμάτων; Πόση είναι β) η τάση T_2 και γ) η τάση T_1 ; δ) Πόσο είναι το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας; ε) Πόση είναι η ροπή αδράνειάς της;



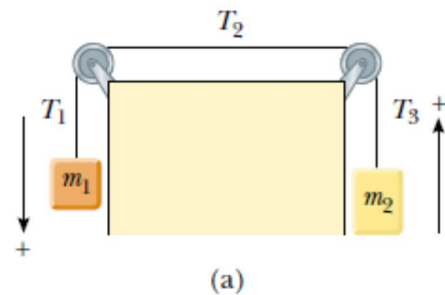
Άσκηση 10.69 Η

Στο σχήμα δύο σώματα μάζας $6,2 \text{ kg}$ το καθένα, συνδέονται με αβαρές νήμα μέσω τροχαλίας ακτίνας $R = 2.4 \text{ cm}$ και ροπής αδράνειας $I = 7.4 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία, είναι άγνωστο εάν υπάρχει τριβή μεταξύ του τραπεζιού και του ολισθαίνοντος σώματος, ο άξονας της τροχαλίας είναι χωρίς τριβές. Όταν αυτό το σύστημα αφηθεί από την ηρεμία η τροχαλία περιστρέφεται κατά 1.3 rad σε 91 ms και η επιτάχυνση των σωμάτων είναι σταθερή. Πόσο είναι α) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας, β) το μέτρο της επιτάχυνσης οποιουδήποτε από τα δύο σώματα, γ) η τάση του νήματος T_1 και δ) η τάση του νήματος T_2 ;



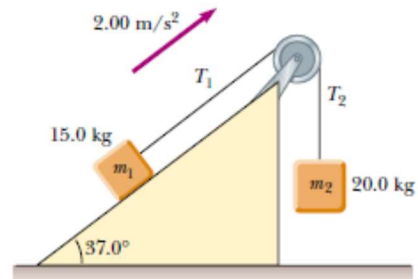
Άσκηση 3.

Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 συνδέονται μέσω αβαρούς νήματος το οποίο διέρχεται από δύο όμοιες χωρίς τριβές τροχαλίες. Η κάθε μία τροχαλία έχει ροπή αδράνειας I και ακτίνα R όπως φαίνονται στο σχήμα. Υπολογίστε την επιτάχυνση του κάθε σώματος και τις τάσεις T_1 , T_2 και T_3 (Θεωρήστε ότι δεν υπάρχει ολίσθηση στις τροχαλίες).



Άσκηση 4.

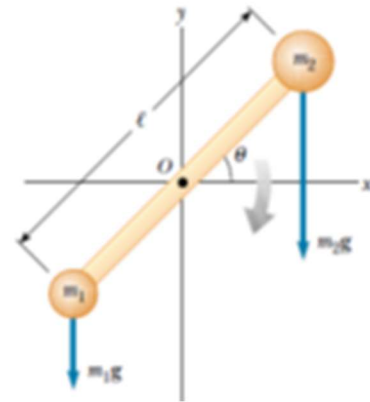
Δύο σώματα όπως φαίνονται στο σχήμα συνδέονται μέσω αβαρούς νήματος το οποίο διέρχεται από μια τροχαλία ακτίνας $r=0.25\text{m}$ και ροπής αδράνειας ίση με I . Το σώμα στο χωρίς τριβές κεκλιμένο επίπεδο κινείται προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση $a=2.0\text{m/s}^2$. A) Υπολογίστε τις τάσεις T_1 και T_2 στα δύο τμήματα του νήματος. B) Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας I της τροχαλίας.



Κύλιση, Ροπή και Στροφορμή

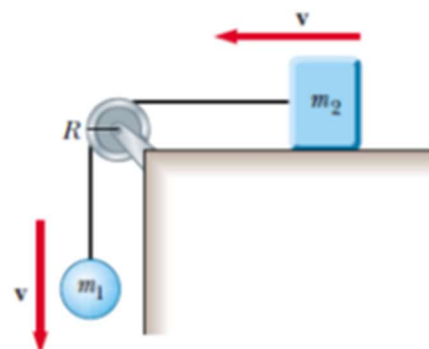
Άσκηση 5.

Μία συμπαγής ράβδος μάζας M και μήκους l περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το κέντρο της. Δύο σώματα m_1 και m_2 συνδέονται στα δύο άκρα της. Ο συνδυασμός της ράβδου και των σωμάτων περιστρέφεται σε ένα κάθετο επίπεδο με γωνιακή ταχύτητα ω . α) Βρείτε μία σχέση για το μέγεθος της στροφορμής του συστήματος. β) Βρείτε μία σχέση για το μέγεθος της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα.



Άσκηση 6.

Μία σφαίρα μάζας m_1 και ένας κύβος μάζας m_2 συνδέονται με αβαρές νήμα το οποίο διέρχεται από μία τροχαλία ακτίνας R και ροπής αδράνειας I . Ο κύβος ολισθαίνει χωρίς τριβή σε οριζόντιο επίπεδο. Βρείτε μια σχέση για τη γραμμική επιτάχυνση των



δύο σωμάτων, χρησιμοποιώντας τον συνδυασμό της στροφορμής και της ροπής.

Άσκηση 7.

Ένας δίσκος μάζας 2 kg κινείται με ταχύτητα 3 m/s και προσκρούει σε ράβδο μάζας 1 kg η οποία ηρεμεί σε επίπεδο πάγο χωρίς τριβές. Θεωρήστε ότι η κρούση είναι ελαστική. Βρείτε τις γραμμικές ταχύτητες του δίσκου και της ράβδου καθώς επίσης και την ταχύτητα περιστροφής της ράβδου αμέσως μετά την κρούση. Η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από το κέντρο μάζας είναι ίση με $I = 1.33 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

