

# **ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι**

## **ΜΗΧΑΝΙΚΗ – ΚΥΜΑΤΙΚΗ - ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ**

**Υπό**

**Μ. Χανιά**

**Αν. Καθηγητή**

**Τμήμα Φυσικής ΔΙ.ΠΑ.Ε.  
Καβάλα 2021**

# 1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η φυσική είναι πειραματική επιστήμη. Οι φυσικοί παρατηρούν τα φυσικά φαινόμενα και προσπαθούν να βρουν κανονικότητες και αρχές, που συνδέουν αυτά τα φαινόμενα. Αυτές οι συσχετίσεις λέγονται φυσικές θεωρίες, ή, όταν είναι πολύ ευρείες και καλά θεμελιωμένες, φυσικοί νόμοι. Η ανάπτυξη μιας φυσικής θεωρίας απαιτεί δημιουργικότητα σε όλα τα στάδια. Ο φυσικός πρέπει να διατυπώνει τις κατάλληλες ερωτήσεις, να σχεδιάζει πειράματα, που μπορούν ν' απαντούν ερωτήματα και από τα αποτελέσματα να βγάζει τα κατάλληλα συμπεράσματα. Το Σχ. 1-1 δείχνει δύο διάσημα εργαστήρια.



(a)



(b)

1-1 Δύο ερευνητικά εργαστήρια. (a) Ο κεκλιμένος πύργος της Πίζας (Ιταλία). Σύμφωνα με την παράδοση ο Γαλιλαίος μελέτησε την κίνηση σωμάτων, που πέφτουν ελεύθερα κάτω, ρίχνοντάς τα από αυτόν τον πύργο. Λέγεται επίσης ότι έβγαλε συμπεράσματα για την κίνηση του εκκρεμούς παρατηρώντας τις αιωρήσεις των πολυελαίων του καθεδρικού ναού, που βρίσκεται πίσω από τον πύργο. (b) Το αστρονομικό παρατηρητήριο, που λειτουργήσε στο διαστημικό λεωφορείο *Columbia* το Δεκέμβριο του 1990. Τα όργανά του έκαναν μετρήσεις της ακτινοβολίας X και της υπεριώδους ακτινοβολίας αστρονομικών αντικειμένων και βρήκαν ενδείξεις για την πιθανή ύπαρξη μελανών οπών στα κέντρα μακρινών γαλαξιών.

**Επιστήμη είναι ό,τι ξέρουμε. Φιλοσοφία είναι ό,τι δεν ξέρουμε.**

Ο Αριστοτέλης θεωρούσε ότι οι γυναίκες έχουν λιγότερα δόντια από τους άντρες. Αν και παντρεύτηκε δυο φορές, ποτέ δεν του πέρασε από το μυαλό να επαληθεύσει αυτήν τη θεωρία ελέγχοντας τα στόματα των συζύγων του.

**B. RUSSEL**

- i) ΚΛΑΣΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ < 1900
- ii) ΝΕΩΤΕΡΗ ΜΟΝΤΕΡΝΑ ΦΥΣΙΚΗ

- I) ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
- II) ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ
- III) ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ
- IV) ΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΠΕΔΙΟΥ
- V) ΕΞΩΤΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ

Όπως και η ποίηση έτσι και η φυσική είναι μια δημιουργική δραστηριότητα που συνδυάζει την συγκίνηση με την διανόηση και οι άνθρωποι που ασχολούνται με αυτήν αξίζει να αποκαλούνται καλλιτέχνες **Α.Αινσταιν**

«Εξήγησα τα ουράνια φαινόμενα με το νόμο της Βαρύτητας μα δεν ξέρω ποια είναι τα αίτια της βαρύτητας, δεν κατόρθωσα να βγάλω το «γιατί» της ιδιότητας που λέω βαρύτητα». Νεύτων, 1700

«Όλες μου οι προσπάθειες να προσαρμόσω τις βασικές θεωρίες της παλαιάς Φυσικής στις νέες γνώσεις της ίδιας Επιστήμης, απέτυχαν. Η διαπίστωση αυτή με έκανε να καταλάβω πώς το έδαφος της κλασικής Φυσικής είχε υποχωρήσει και ήταν αδύνατον να στηριχθεί επάνω στο έδαφος αυτό, το οικοδόμημα των νέων γνώσεων».

Α.Αινσταιν, 1949

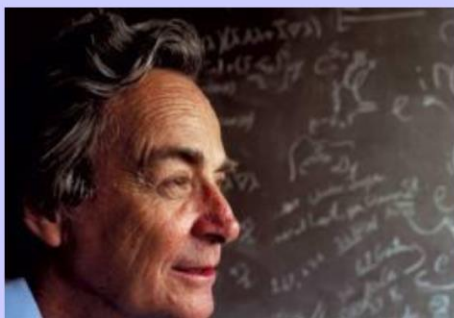
«Οι εξελίξεις που προκάλεσε η ανάπτυξη της σύγχρονης Φυσικής, δημιούργησαν στους Επιστήμονες το συναίσθημα πώς το έδαφος έφευγε κάτω από τα πόδια τους».

*«Τα Άτομα ΔΕΝ είναι αντικείμενα. Όσον αφορά τα Ηλεκτρόνια, που σχηματίζουν το φλοιό του ατόμου, δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε σ' αυτά ούτε μέγεθος ούτε ταχύτητα ούτε να καθορίσουμε τη θέση τους μέσα στο χώρο του ατόμου. Γι' αυτό λέμε ότι ο κόσμος του ατόμου δεν είναι αντικειμενικός, δεν υπάρχει στο Χωρόχρονο».*

**B. Heisenberg**

**ΤΗΝ ΑΜΦΙΣΒΗΤΗΣΗ**

**«ΕΠΙΣΤΗΜΗ  
ΕΙΝΑΙ  
Η ΠΙΣΤΗ  
ΣΤΗΝ ΑΓΝΟΙΑ ΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΩΝ»**



Richard Feynman



## ΤΟΝ ΕΡΩΤΑ ΠΡΟΣ ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ

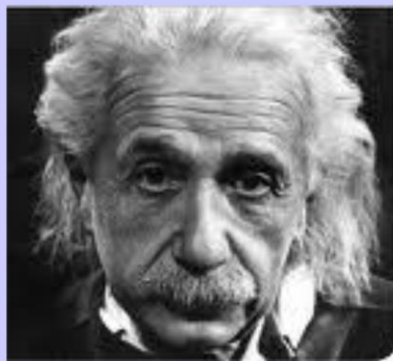
Τι ευτυχία  
που συναντήθηκαμε με το παράδοξο!  
Τώρα υπάρχει ελπίδα  
ότι θα προχωρήσουμε μπροστά.



Niels Bohr

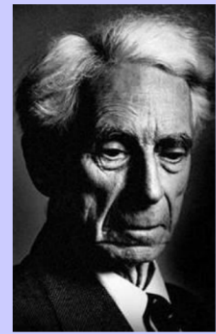
ΤΗ ΜΗ ΑΠΟΡΙΨΗ  
ΤΗΣ ΕΞΩΦΡΕΝΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

Όποια ιδέα δεν ακουγεται από την αρχή  
εξωφρενική  
είναι καταδικασμένη.



## ΤΗΝ ΑΜΦΙΒΟΛΙΑ

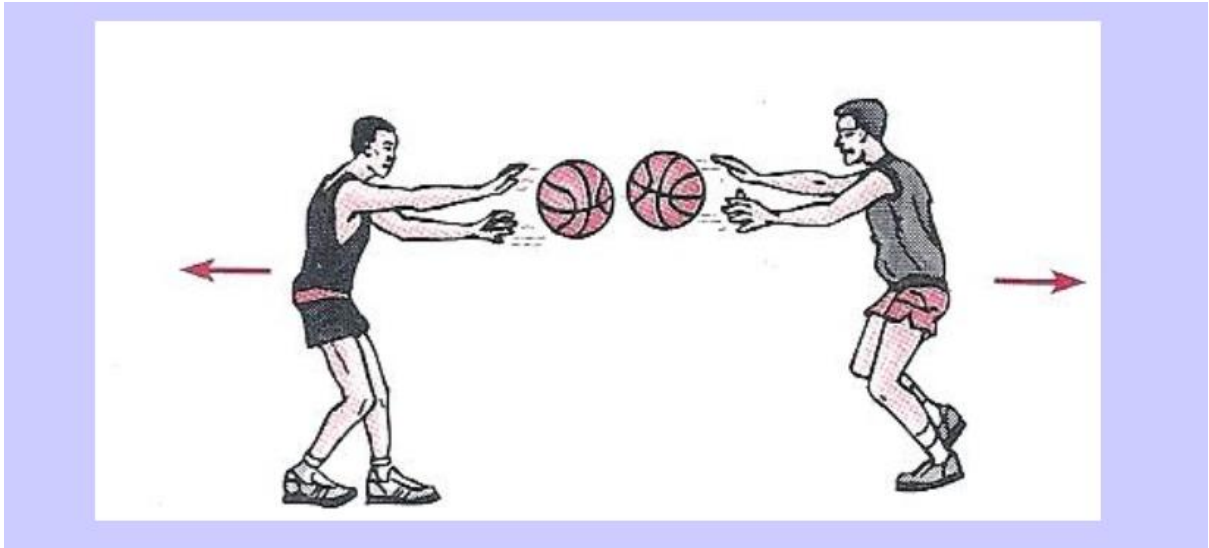
«ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΙΝΑΙ ΟΤΙ  
ΑΝΟΗΤΟΙ ΚΑΙ ΦΑΝΑΤΙΚΟΙ  
ΕΙΝΑΙ ΠΑΝΤΑ ΒΕΒΑΙΟΙ ΜΕ ΤΟΝ ΕΑΥΤΟ ΤΟΥΣ  
ΕΝΩ ΣΟΦΟΙ ΑΝΘΡΩΠΟΙ  
ΕΙΝΑΙ ΓΕΜΑΤΟΙ ΑΠΟ ΑΜΦΙΒΟΛΙΕΣ»



B. Russel



Η Πολιτεία του Πλάτωνα περιλαμβάνει την  
Αλληγορία του σπηλαιού..



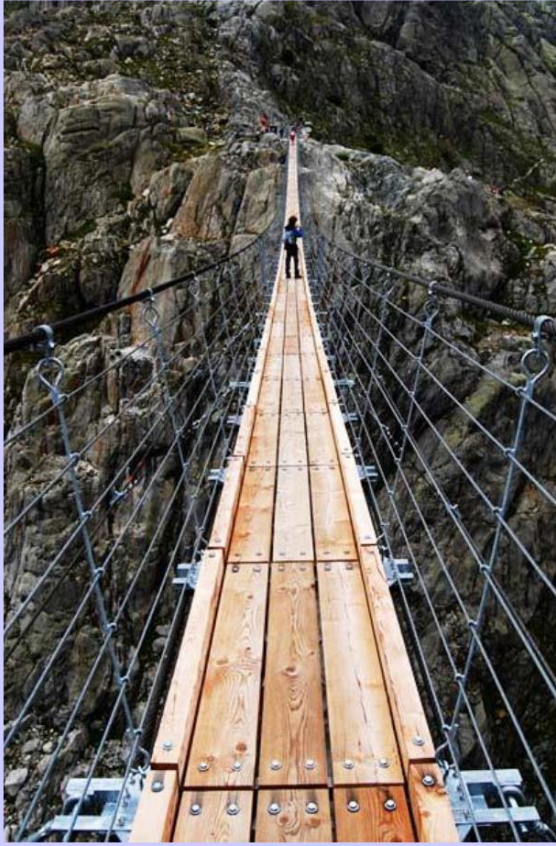
# ΠΡΟΤΥΠΑ



ΓΙΑΤΙ ΚΑΤΑΦΕΥΓΟΥΜΕ  
ΣΤΑ ΠΡΟΤΥΠΑ;

ΔΕΝ ΘΑ ΑΠΟΦΑΣΙΖΑΜΕ  
ΝΑ ΠΕΡΑΣΟΥΜΕ  
ΑΠΟ ΤΗΝ ΓΕΦΥΡΑ  
ΑΝ ΔΕΝ ΕΙΧΕ ΤΑ  
ΠΡΟΣΤΑΤΕΥΤΙΚΑ  
ΣΤΙΣ ΑΚΡΕΣ ΤΗΣ.  
ΟΤΑΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ  
ΤΗ ΔΙΑΣΧΙΖΟΥΜΕ  
ΧΩΡΙΣ ΝΑ ΚΡΑΤΙΟΜΑΣΤΕ  
ΑΠΟ ΤΑ ΠΡΟΣΤΑΤΕΥΤΙΚΑ.  
ΣΚΕΦΤΕΙΤΕ ΤΟ.





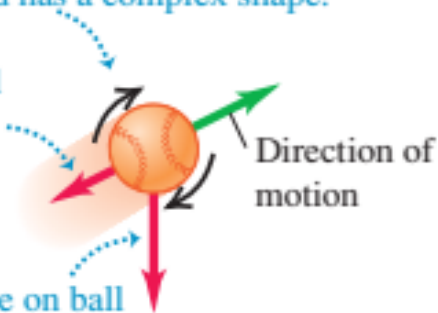
ΕΛΠΙΖΟΥΜΕ  
ΟΤΙ ΘΑ  
ΥΠΑΡΘΟΥΝ ΓΕΦΥΡΕΣ  
ΠΟΥ ΘΑ ΜΑΣ  
ΜΕΤΑΦΕΡΟΥΝ  
ΑΠΟ ΤΗΝ  
ΟΥΤΟΠΙΑ  
(ΠΡΟΤΥΠΑ)  
ΣΤΗΝ  
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ  
ή  
Η ΜΕΛΕΤΗ  
ΤΩΝ ΠΡΟΤΥΠΩΝ  
ΘΑ ΕΙΝΑΙ Η ΓΕΦΥΡΑ.

(a) A real baseball in flight

Baseball spins and has a complex shape.

Air resistance and wind exert forces on the ball.

Gravitational force on ball depends on altitude.



(b) An idealized model of the baseball

Baseball is treated as a point object (particle).

No air resistance.

Gravitational force on ball is constant.



## NOMOI ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ :

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ = ΣΤΑΘΕΡΑ \* ΑΙΤΙΟ

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ =  $\frac{1}{\text{ΣΤΑΘΕΡΑ}}$  \* ΑΙΤΙΟ



$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}$$

$$I = \frac{1}{R} V$$

# SI system

## International System of Units - SI

**K**

▶ kelvin (*temperature*)

**m**

▶ meter (*distance*)

**A**

▶ ampere (*electric current*)

**s**

▶ second (*time*)

**mol**

▶ mole (*amount of substance*)

**kg**

▶ kilogram (*mass*)

**cd**

▶ candela (*intensity of light*)

**TABLE 1-5 SI Base Quantities and Units**

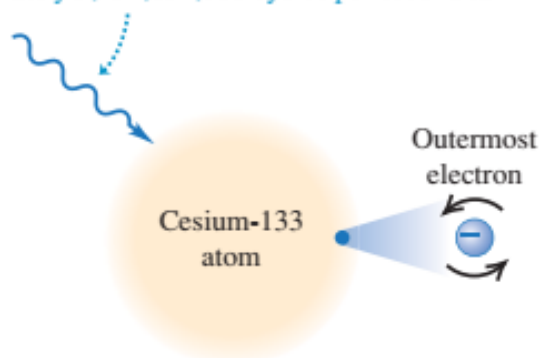
Quantity	Unit	Unit Abbreviation
Length	meter	m
Time	second	s
Mass	kilogram	kg
Electric current	ampere	A
Temperature	kelvin	K
Amount of substance	mole	mol
Luminous intensity	candela	cd



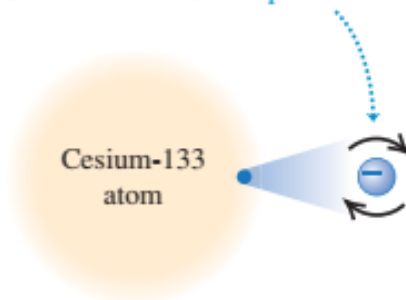
## ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ 1s

(a) Measuring the second

Microwave radiation with a frequency of exactly 9,192,631,770 cycles per second ...



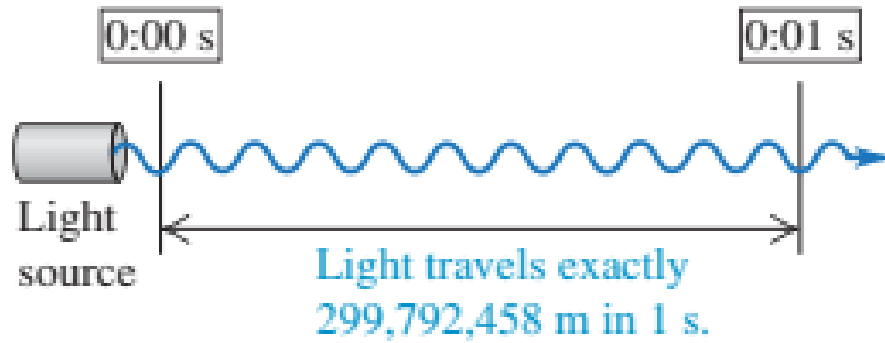
... causes the outermost electron of a cesium-133 atom to reverse its spin direction.



An atomic clock uses this phenomenon to tune microwaves to this exact frequency. It then counts 1 second for each 9,192,631,770 cycles.

## ΜΟΝΑΔΑ ΜΗΚΟΥΣ 1m

(b) Measuring the meter



## ΜΟΝΑΔΑ ΜΑΖΑΣ 1kg

**1.4** The international standard kilogram is the metal object carefully enclosed within these nested glass containers.



**Table 1.1** Some Units of Length, Mass, and Time

Length	Mass	Time
1 nanometer = 1 nm = $10^{-9}$ m (a few times the size of the largest atom)	1 microgram = 1 $\mu$ g = $10^{-6}$ g = $10^{-9}$ kg (mass of a very small dust particle)	1 nanosecond = 1 ns = $10^{-9}$ s (time for light to travel 0.3 m)
1 micrometer = 1 $\mu$ m = $10^{-6}$ m (size of some bacteria and living cells)	1 milligram = 1 mg = $10^{-3}$ g = $10^{-6}$ kg (mass of a grain of salt)	1 microsecond = 1 $\mu$ s = $10^{-6}$ s (time for space station to move 8 mm)
1 millimeter = 1 mm = $10^{-3}$ m (diameter of the point of a ballpoint pen)	1 gram = 1 g = $10^{-3}$ kg (mass of a paper clip)	1 millisecond = 1 ms = $10^{-3}$ s (time for sound to travel 0.35 m)
1 centimeter = 1 cm = $10^{-2}$ m (diameter of your little finger)		
1 kilometer = 1 km = $10^3$ m (a 10-minute walk)		

**TABLE 1.2**  
**Masses of Various Bodies**  
**(Approximate Values)**

Body	Mass (kg)
Visible Universe	$\sim 10^{52}$
Milky Way galaxy	$7 \times 10^{41}$
Sun	$1.99 \times 10^{30}$
Earth	$5.98 \times 10^{24}$
Moon	$7.36 \times 10^{22}$
Horse	$\sim 10^3$
Human	$\sim 10^2$
Frog	$\sim 10^{-1}$
Mosquito	$\sim 10^{-5}$
Bacterium	$\sim 10^{-15}$
Hydrogen atom	$1.67 \times 10^{-27}$
Electron	$9.11 \times 10^{-31}$

**TABLE 1.3** Approximate Values of Some Time Intervals

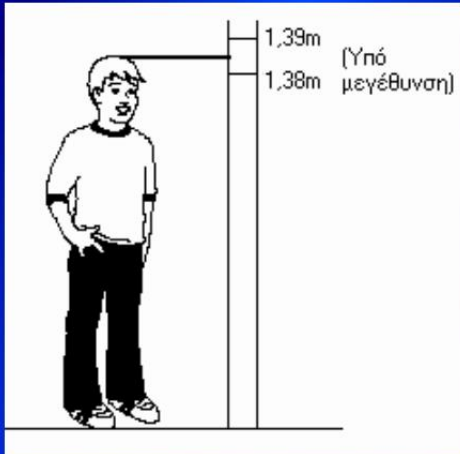
	<b>Interval (s)</b>
Age of the Universe	$5 \times 10^{17}$
Age of the Earth	$1.3 \times 10^{17}$
Average age of a college student	$6.3 \times 10^8$
One year	$3.16 \times 10^7$
One day (time for one rotation of the Earth about its axis)	$8.64 \times 10^4$
Time between normal heartbeats	$8 \times 10^{-1}$
Period of audible sound waves	$\sim 10^{-3}$
Period of typical radio waves	$\sim 10^{-6}$
Period of vibration of an atom in a solid	$\sim 10^{-13}$
Period of visible light waves	$\sim 10^{-15}$
Duration of a nuclear collision	$\sim 10^{-22}$
Time for light to cross a proton	$\sim 10^{-24}$

**TABLE 1.4** Prefixes for SI Units

Power	Prefix	Abbreviation
$10^{-24}$	yocto	y
$10^{-21}$	zepto	z
$10^{-18}$	atto	a
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-3}$	milli	m
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-1}$	deci	d
$10^1$	deka	da
$10^3$	kilo	k
$10^6$	mega	M
$10^9$	giga	G
$10^{12}$	tera	T
$10^{15}$	peta	P
$10^{18}$	exa	E
$10^{21}$	zetta	Z
$10^{24}$	yotta	Y



# ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ



$\gamma = 1.385$

## Η Ακρίβεια (precision)

περιγράφει το πόσο οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις ενός μεγέθους δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα

## Με το όρο Πιστότητα (accuracy)

εννοούμε το πόσο κοντά βρίσκεται η μετρούμενη τιμή με την πραγματική τιμή του μεγέθους



Καλή Ακρίβεια  
Καλή Πιστότητα



Καλή Ακρίβεια  
Κακή Πιστότητα



Κακή Ακρίβεια  
Κακή Πιστότητα



ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ ΕΝΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ  $d=56.47 \pm 0.02\text{mm}$

$$56.45\text{mm} \leq d \leq 56.49\text{mm}$$

Result may have no more significant figures than the starting number with the fewest significant figures:

$$\frac{0.745 \times 2.2}{3.885} = 0.4$$

$$1.32578 \times 10^7 \times 4.11 \times 10^{-3} = 5.45 \times 10^4$$

**Addition or subtraction:**

Number of significant figures is determined by the starting number with the largest uncertainty (i.e., fewest digits to the right of the decimal point):

$$27.153 + 138.2 - 11.74 = 153.6$$

## ΤΑΞΗ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗ

Υποθέστε ότι γράφετε μυθιστόρημα διεθνούς κατασκοπείας, όπου ο ήρωας δραπετεύει από τα σύνορα μεταφέροντας στη βαλίτσα του χρυσό αξίας ενός δισεκατομμυρίου δολαρίων. Είναι δυνατό; Θα χωρούσε τόσο χρυσάφι σε βαλίτσα; Δεν θα ήταν πάρα πολύ βαρύ για να το σηκώσουμε;

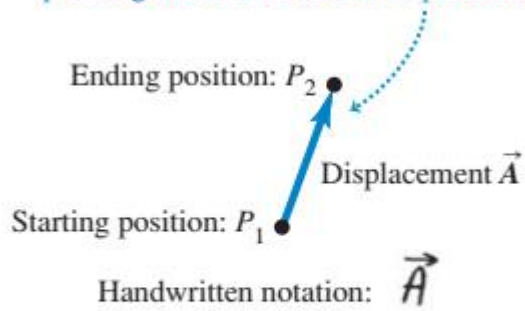
$1g = 10€$  Τα  $10^9 €$  -----> ?

### ΔΙΑΣΤΑΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

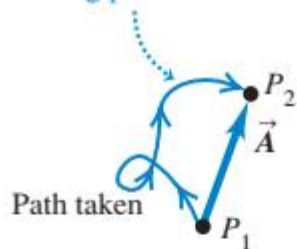
$$x = \frac{1}{2} at^2$$
$$L = \frac{L}{T^2} \cdot T^2 = L$$

## 2 . ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

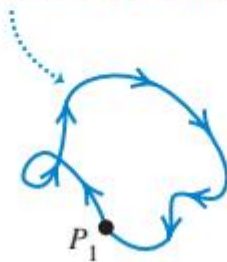
- (a) We represent a displacement by an arrow pointing in the direction of displacement.

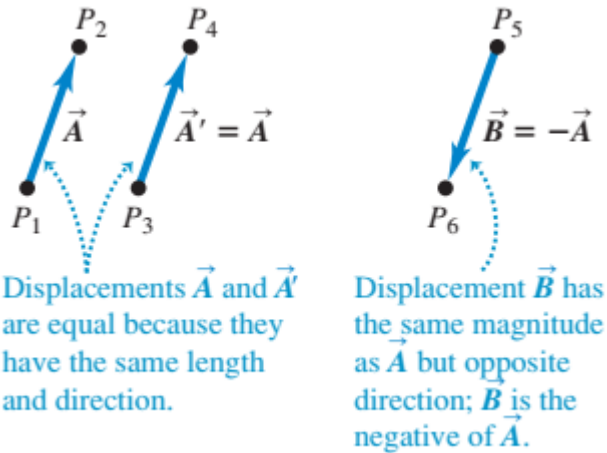


- (b) Displacement depends only on the starting and ending positions—not on the path taken.



- (c) Total displacement for a round trip is 0, regardless of the distance traveled.





**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ=ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ+ΦΟΡΑ**  
**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ, ΦΟΡΑ ΔΕΞΙΑ**  
**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ, ΦΟΡΑ ΠΡΟΣ ΤΑ**  
**ΚΑΤΩ**

**ΜΕΤΡΟ = ΘΕΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ + ΜΟΝΑΔΑ**  
**ΜΕΤΡΗΣΗΣ**

**ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΙΜΗ=ΠΡΟΣΗΜΟ ΜΕΤΡΟ**  
**Π.Χ**

$$\overrightarrow{F}$$

$$F = 3N > 0$$

**Αλγεβρική τιμή**

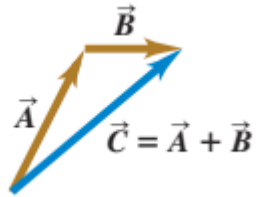
$$F = -3N,$$

**ή**

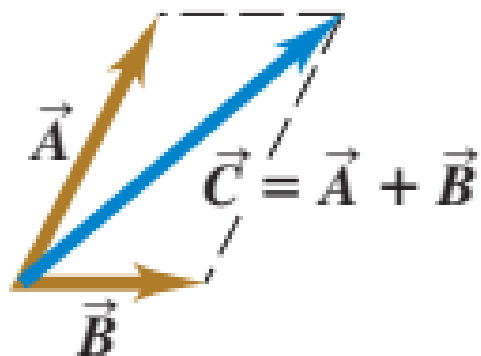
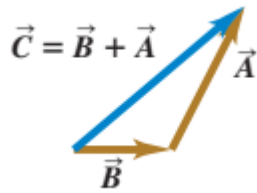
$$F = +3N$$

$$(\text{Magnitude of } \vec{A}) = A = |\vec{A}|$$

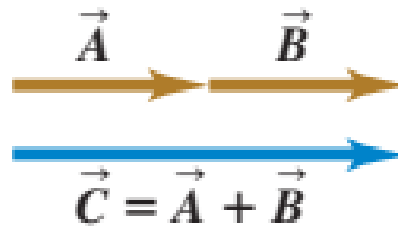
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$



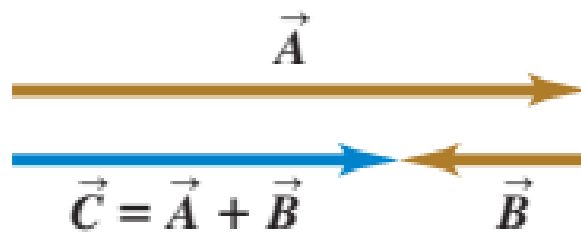
$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \quad \text{and} \quad \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



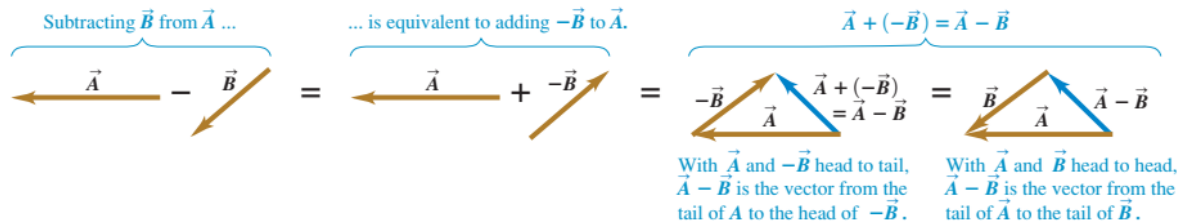
(a) The sum of two parallel vectors



(b) The sum of two antiparallel vectors



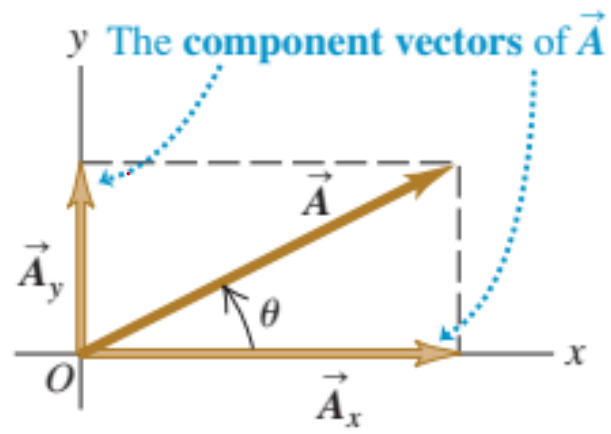
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



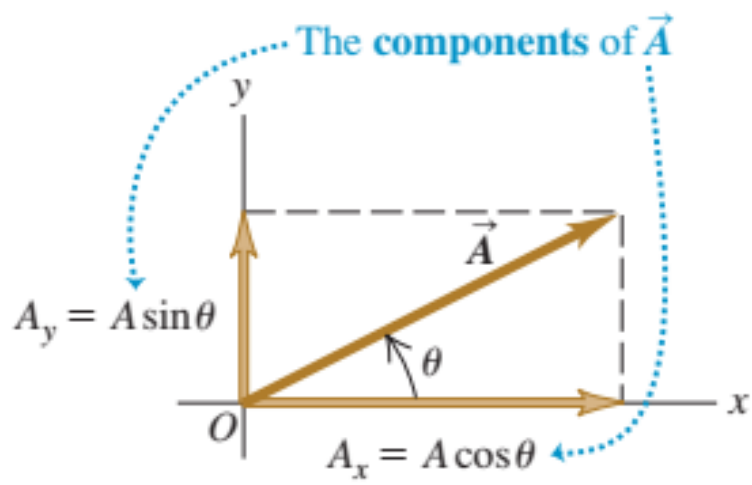
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$



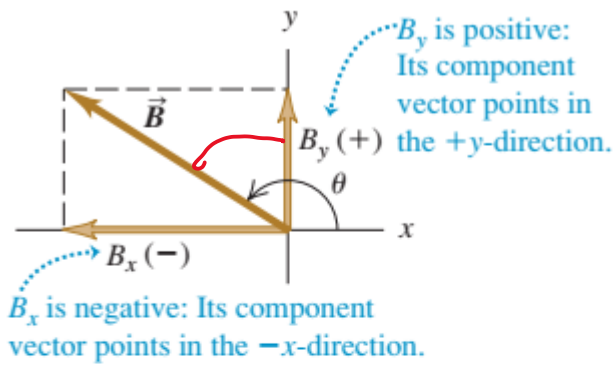
(a)



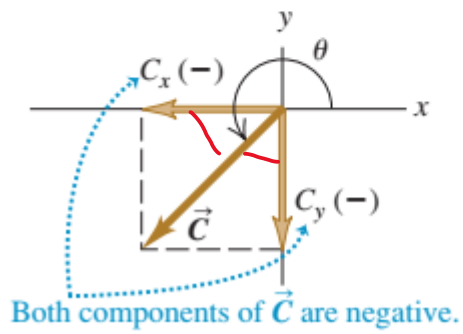
(b)



(a)



(b)

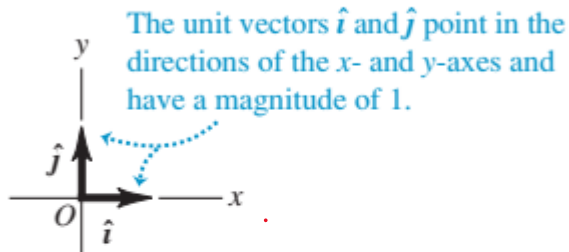


**Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{r}$**

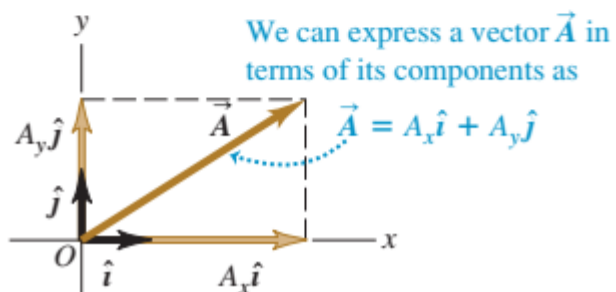
$\hat{r}$  έχει μέτρο  $|\hat{r}| = 1$

- 1.23** (a) The unit vectors  $\hat{i}$  and  $\hat{j}$ .  
(b) Expressing a vector  $\vec{A}$  in terms of its components.

(a)



(b)



$$\vec{A}_x = A_x \hat{i}$$

$$\vec{A}_y = A_y \hat{j}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

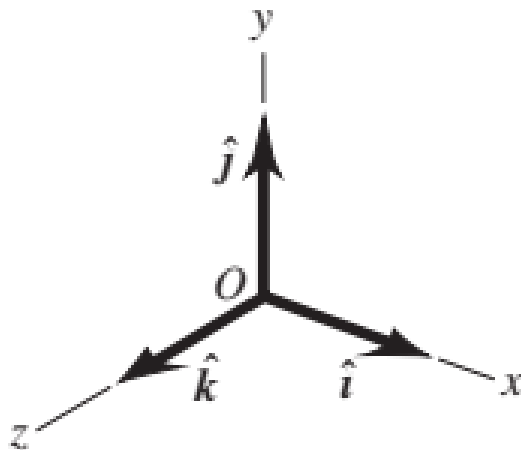
$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j})$$

$$= (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j}$$

$$= R_x \hat{i} + R_y \hat{j}$$



## ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

DOT •  
PRODUCT

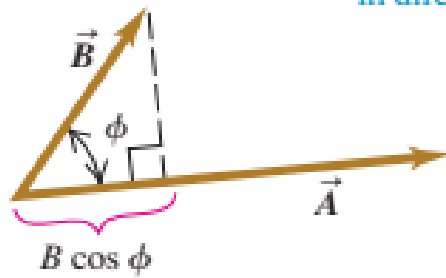
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \phi \quad (\text{definition of the scalar (dot) product})$$

(a)



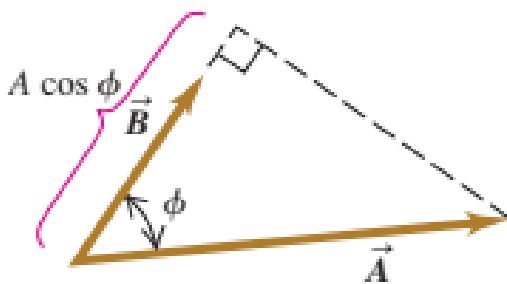
(b)  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  equals  $A(B \cos \phi)$ .

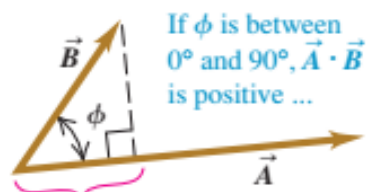
(Magnitude of  $\vec{A}$ ) times (Component of  $\vec{B}$  in direction of  $\vec{A}$ )



(c)  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  also equals  $B(A \cos \phi)$

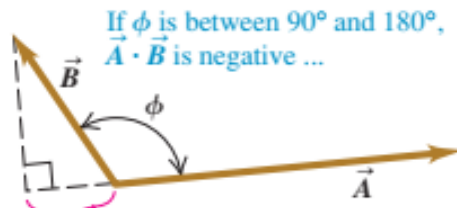
(Magnitude of  $\vec{B}$ ) times (Component of  $\vec{A}$  in direction of  $\vec{B}$ )





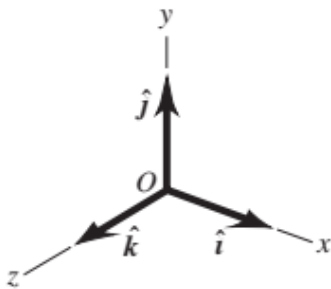
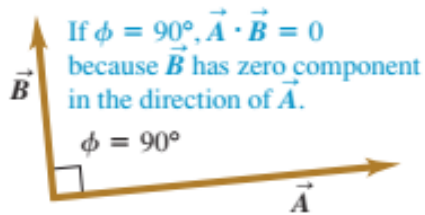
... because  $B \cos \phi > 0$ .

(b)



... because  $B \cos \phi < 0$ .

(c)



$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = (1)(1) \cos 0^\circ = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = (1)(1) \cos 90^\circ = 0$$

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\
&= A_x \hat{i} \cdot B_x \hat{i} + A_x \hat{i} \cdot B_y \hat{j} + A_x \hat{i} \cdot B_z \hat{k} \\
&\quad + A_y \hat{j} \cdot B_x \hat{i} + A_y \hat{j} \cdot B_y \hat{j} + A_y \hat{j} \cdot B_z \hat{k} \\
&\quad + A_z \hat{k} \cdot B_x \hat{i} + A_z \hat{k} \cdot B_y \hat{j} + A_z \hat{k} \cdot B_z \hat{k} \qquad (1.20) \\
&= A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \cdot \hat{k} \\
&\quad + A_y B_x \hat{j} \cdot \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \cdot \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \cdot \hat{k} \\
&\quad + A_z B_x \hat{k} \cdot \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \cdot \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k}
\end{aligned}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad \text{(scalar (dot) product in terms of components)}$$

## ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

### CROSS $\times$ PRODUCT

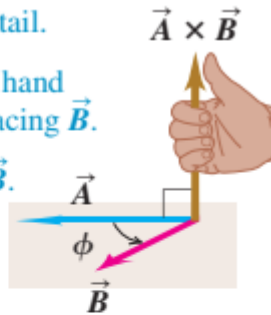
$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

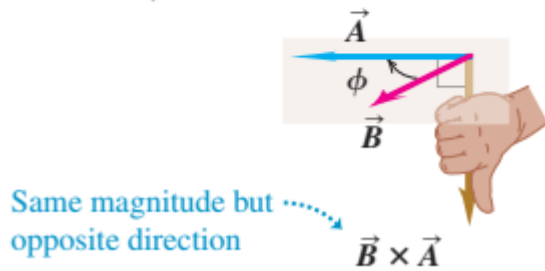
$$C = AB \sin \phi$$



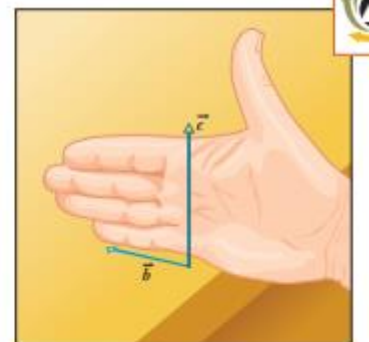
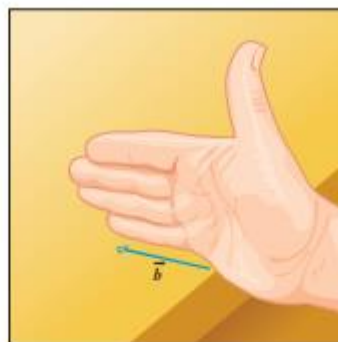
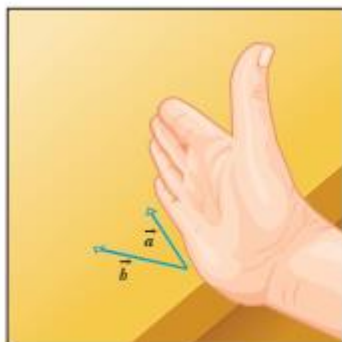
- ① Place  $\vec{A}$  and  $\vec{B}$  tail to tail.
- ② Point fingers of right hand along  $\vec{A}$ , with palm facing  $\vec{B}$ .
- ③ Curl fingers toward  $\vec{B}$ .
- ④ Thumb points in direction of  $\vec{A} \times \vec{B}$ .



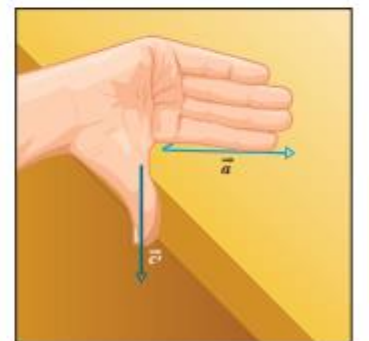
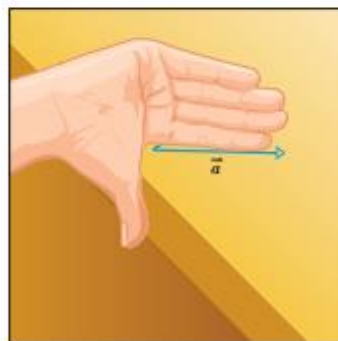
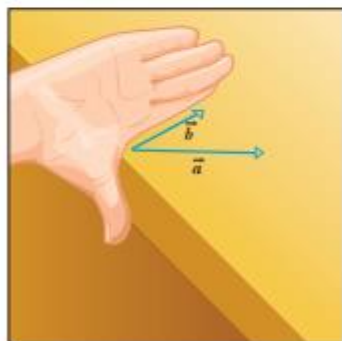
(b)  $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$  (the vector product is anticommutative)



$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$



(a)



(b)

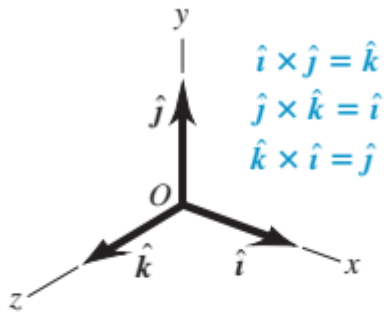
$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \mathbf{0}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k}$$

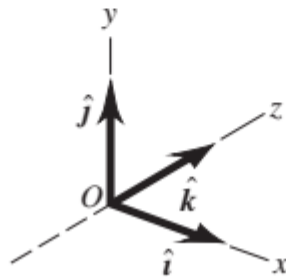
$$\hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}$$

(a) A right-handed coordinate system



(b) A left-handed coordinate system; we will not use these.



$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= A_x \hat{i} \times B_x \hat{i} + A_x \hat{i} \times B_y \hat{j} + A_x \hat{i} \times B_z \hat{k} \\ &\quad + A_y \hat{j} \times B_x \hat{i} + A_y \hat{j} \times B_y \hat{j} + A_y \hat{j} \times B_z \hat{k} \\ &\quad + A_z \hat{k} \times B_x \hat{i} + A_z \hat{k} \times B_y \hat{j} + A_z \hat{k} \times B_z \hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z \quad C_z = A_x B_y - A_y B_x$$

(components of  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ )

### 3 ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ 1 ΔΙΑΣΤΑΣΗ

**ΜΕΤΑΒΟΛΗ  $\Delta x$  ενός μεγέθους  $x$**

**$\Delta x = x(\text{τελική τιμή} - \text{αρχική τιμή})$**

**Διαφορά του A από το B = A - B**

$$\Delta x \equiv x_f - x_i$$

**(3.1)**

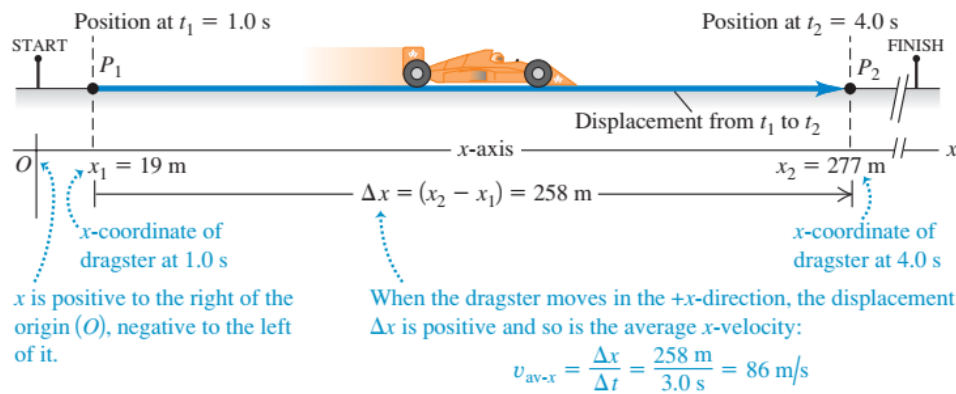
**Μετατόπιση  $\Delta \vec{x}$**

$$\Delta \vec{x} \equiv \vec{x}_2 - \vec{x}_1,$$

**(3.2)**

**Χρονικό διάστημα  $\Delta t$**

$\Delta t = t(\text{τελική χρονική στιγμή}) - t(\text{αρχική χρονική στιγμή})$



## Ταχύτητα (speed – velocity)

Ο όρος **speed** (μέση ταχύτητα ή ταχύτητα ή μέση αριθμητική ταχύτητα) εκφράζει πόσο μακριά ταξιδεύει ένα κινητό ανεξάρτητου διεύθυνσης για ένα χρονικό διάστημα  $\Delta t$ . Η μέση ταχύτητα ορίζεται από την **απόσταση ή το διάστημα  $s$**  που διανύει το κινητό εντός του χρονικού διαστήματος  $\Delta t$ . Επειδή το διάστημα είναι πάντα θετικός αριθμός η μέση ταχύτητα είναι πάντα θετική.

$$v_{avg} = \frac{s}{\Delta t} \quad (3.3)$$

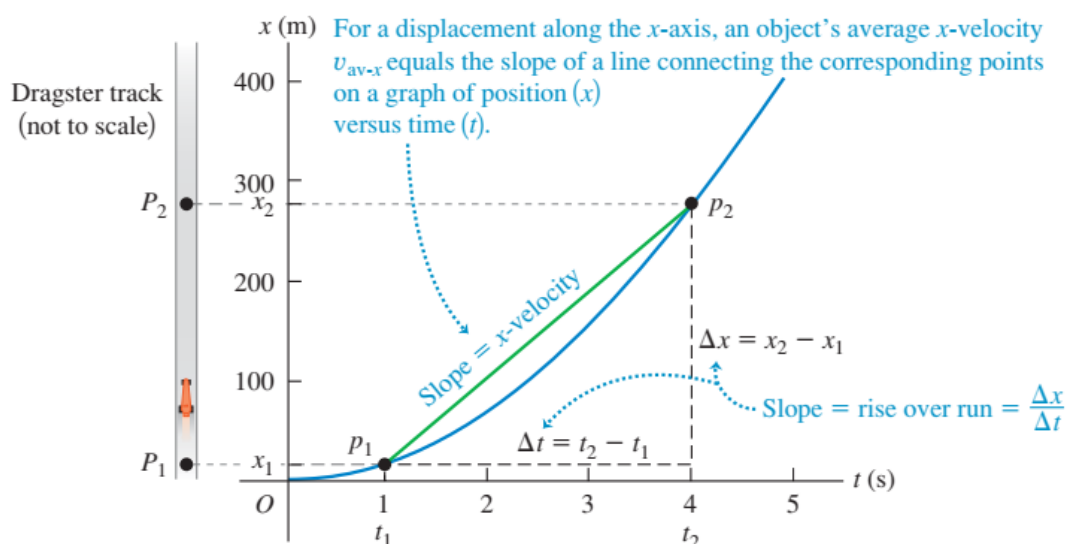
Ο όρος **velocity** (μέση διανυσματική ταχύτητα ή διανυσματική ταχύτητα) καθορίζεται από την μετατόπιση προς

χρονικό διάστημα  $\Delta t$ . Επειδή η μετατόπιση είναι διανυσματικό μέγεθος έτσι και η ταχύτητα όπως ορίστηκε πριν είναι διανυσματικό μέγεθος. Το μέτρο του δίνεται από την σχέση

(3.3)

$$v_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

(Πολλές φορές η διανυσματική ταχύτητα παριστάνεται με δείκτη που δηλώνει την διεύθυνση  $v_x$  μέτρο της διανυσματικής ταχύτητας,  $v$  ταχύτητα)



Άξονας x, κίνηση στο +x

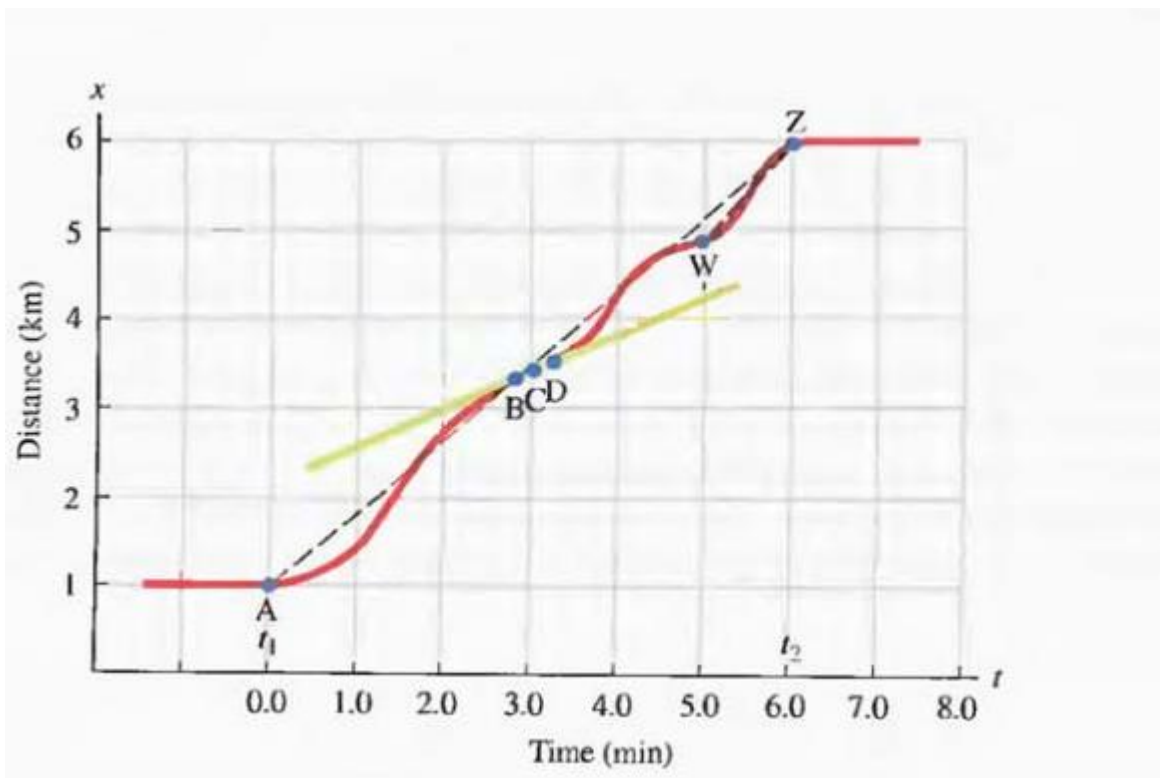
$$x_f > x_i, \quad \frac{dx}{dt} > 0, \vec{v} = v\hat{i}$$

$$x_f < x_i, \quad \frac{dx}{dt} < 0, \vec{v} = -v\hat{i}$$

Άξονας x, κίνηση στο -x

$$x_f > x_i, \quad \frac{dx}{dt} > 0, \vec{v} = v\hat{i}$$

$$x_f < x_i, \quad \frac{dx}{dt} < 0, \vec{v} = -v\hat{i}$$



Στιγμαία αριθμητική ταχύτητα

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

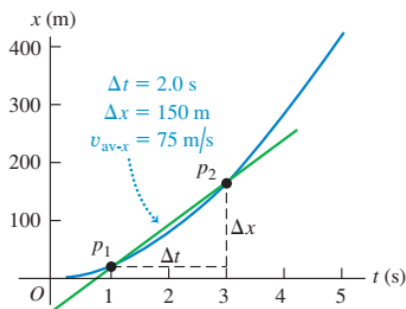
(3.5)

## Στιγμιαία διανυσματική ταχύτητα

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (3.5.1.1)$$

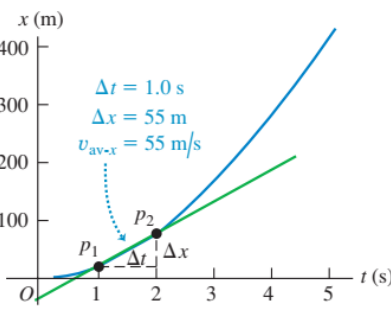
**2.7** Using an  $x$ - $t$  graph to go from (a), (b) average  $x$ -velocity to (c) instantaneous  $x$ -velocity  $v_x$ . In (c) we find the slope of the tangent to the  $x$ - $t$  curve by dividing any vertical interval (with distance units) along the tangent by the corresponding horizontal interval (with time units).

(a)



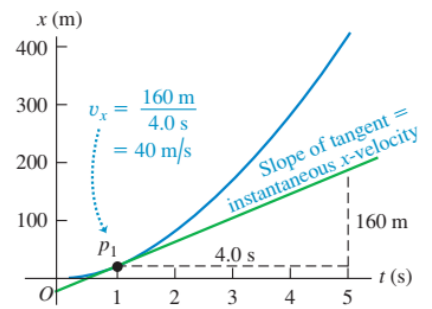
As the average  $x$ -velocity  $v_{av-x}$  is calculated over shorter and shorter time intervals ...

(b)



... its value  $v_{av-x} = \Delta x/\Delta t$  approaches the instantaneous  $x$ -velocity.

(c)



The instantaneous  $x$ -velocity  $v_x$  at any given point equals the slope of the tangent to the  $x$ - $t$  curve at that point.

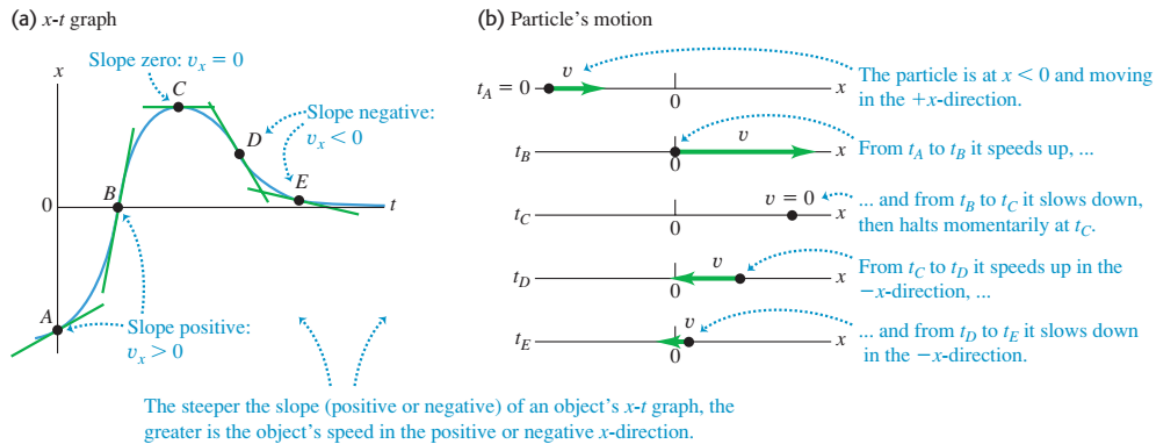
$$v = \frac{dx}{dt} \quad (3.5.1) \quad \Delta.E.$$

$$\Delta x = v \Delta t$$

$$v = f(t)$$

ΧΩΡΟΣ = ΤΑΧΥΤΗΤΑ x ΧΡΟΝΟΣ





## Μέση επιτάχυνση

$$a_{\text{avg}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

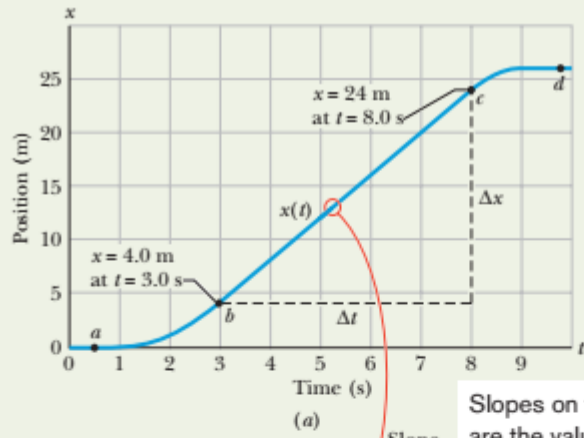
(3.6)

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

(3.7)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

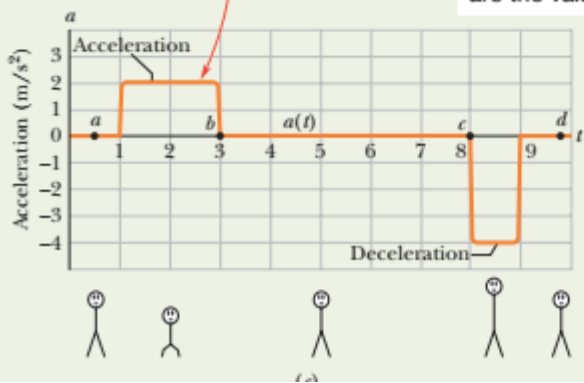
(3.8)



Slopes on the  $x$  versus  $t$  graph are the values on the  $v$  versus  $t$  graph.



Slopes on the  $v$  versus  $t$  graph are the values on the  $a$  versus  $t$  graph.



## Application **Testing Humans at High Accelerations**

In experiments carried out by the U.S. Air Force in the 1940s and 1950s, humans riding a rocket sled demonstrated that they could withstand accelerations as great as  $440 \text{ m/s}^2$ . The first three photos in this sequence show Air Force physician John Stapp speeding up from rest to  $188 \text{ m/s}$  ( $678 \text{ km/h} = 421 \text{ mi/h}$ ) in just 5 s. Photos 4–6 show the even greater magnitude of acceleration as the rocket sled braked to a halt.



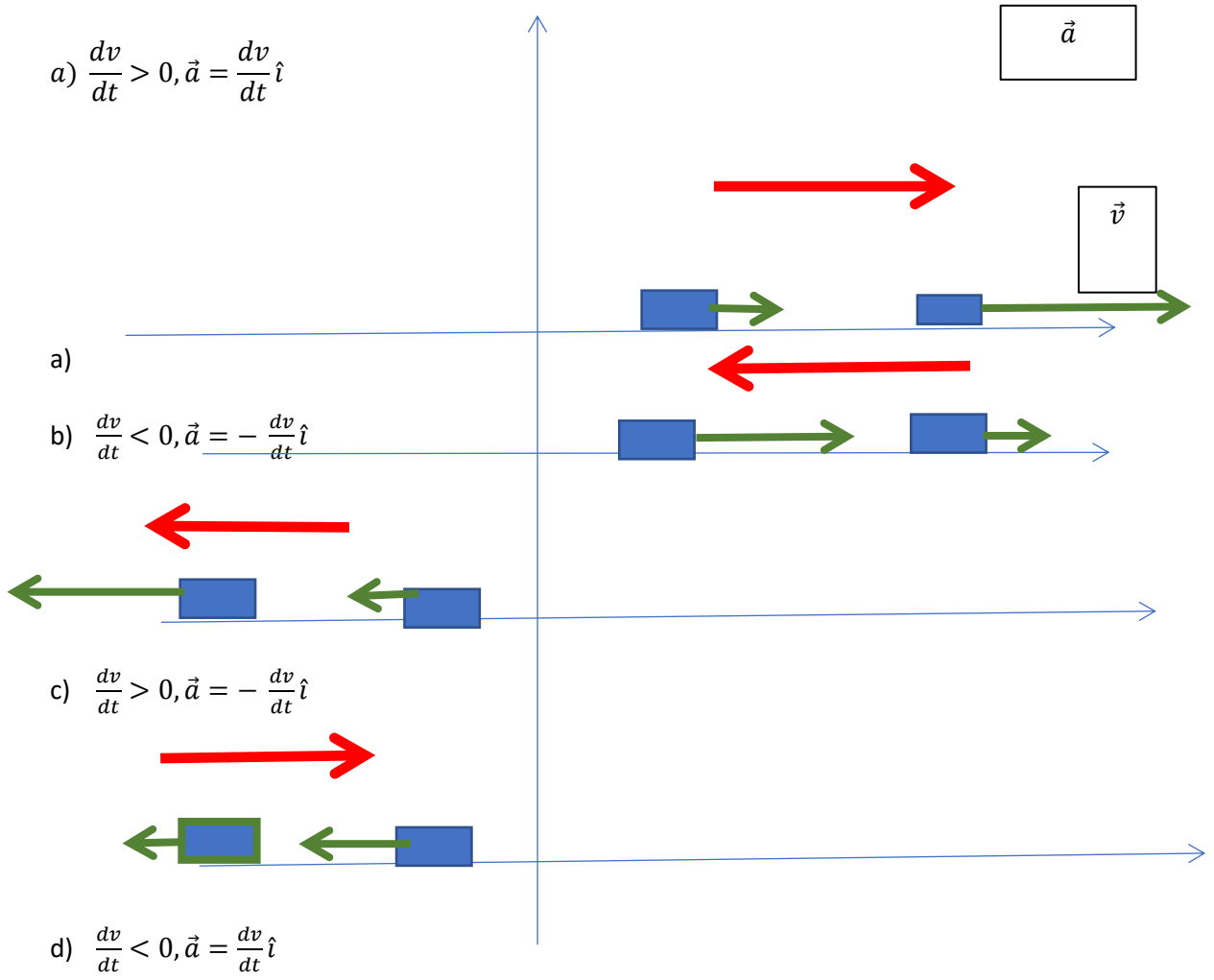
a)  $\frac{dv}{dt} > 0, \vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{i}$

a)

b)  $\frac{dv}{dt} < 0, \vec{a} = -\frac{dv}{dt} \hat{i}$

c)  $\frac{dv}{dt} > 0, \vec{a} = -\frac{dv}{dt} \hat{i}$

d)  $\frac{dv}{dt} < 0, \vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{i}$



## 4. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a dt \quad (4.1)$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt \rightarrow v - v_0 = at \quad (4.2)$$

$$v = v_0 + at \quad (4.3)$$

Ομοίως,

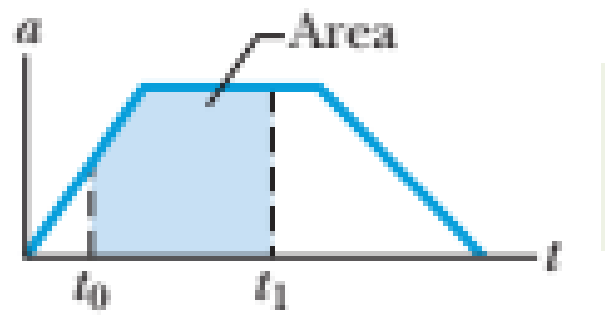
$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v dt \quad (4.4)$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt \rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 + at) dt \quad (4.5)$$

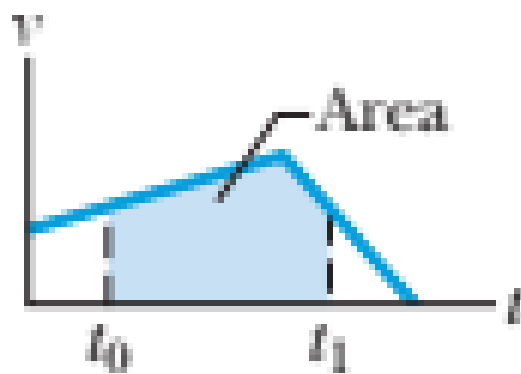
$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt \rightarrow$$
$$\int_{x_0}^x dx = v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t dt \quad (4.6)$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (4.7)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (4.8)$$



$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a \, dt.$$



$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v \, dt,$$

## Ελεύθερη πτώση



$$\vec{g} = -g\hat{j} \quad (4.9)$$

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad (4.10)$$

$$g_{\Sigma} = 1.6 \frac{m}{s^2}, \text{ Σελήνη}$$

$$g_H = 270 \frac{m}{s^2}, \text{ Ήλιος}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

για κατακόρυφη κίνηση

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

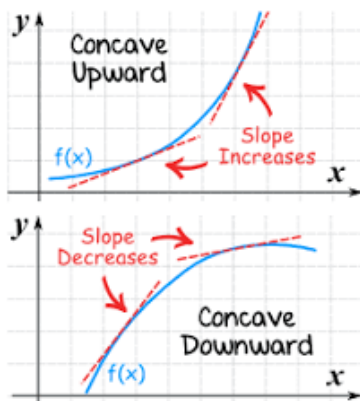
$$y = 0 + 0 + \frac{1}{2} g t^2 \quad (4.11)$$

### Ερώτηση 1

Στο υψηλότερο σημείο της ελεύθερης πτώσης η  $v_y=0$  . Η επιτάχυνση είναι μηδέν

### Ερώτηση 2

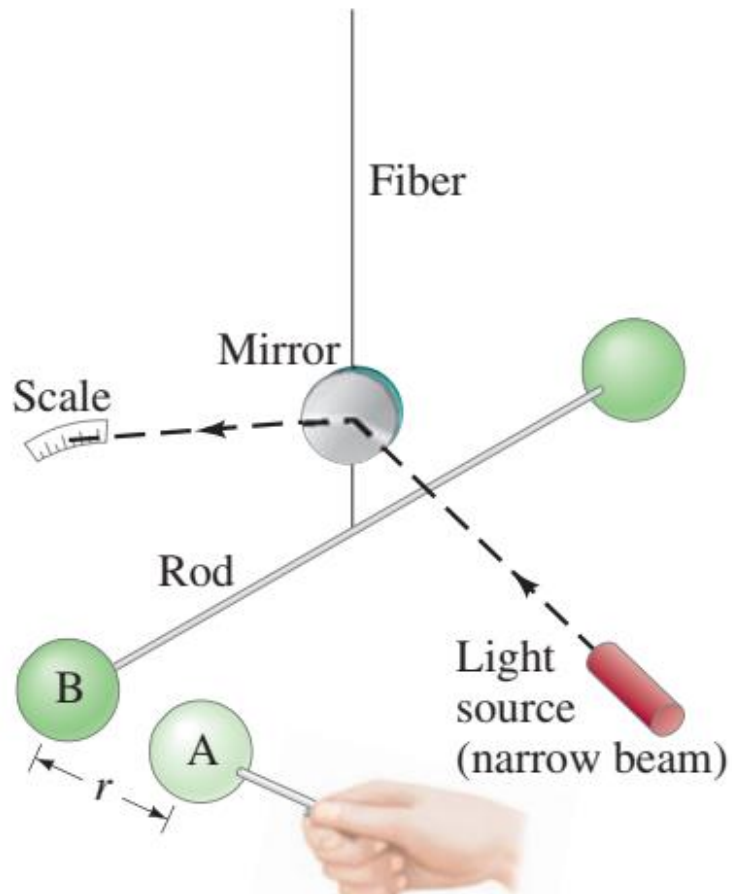
Εάν η επιτάχυνση  $a_x$  αυξάνει με τον χρόνο τότε το διάγραμμα  $v_x - t$  είναι α) Ευθεία γραμμή β) καμπύλη κυρτή γ) Καμπύλη κοίλη



## Νόμος παγκόσμιας έλξης

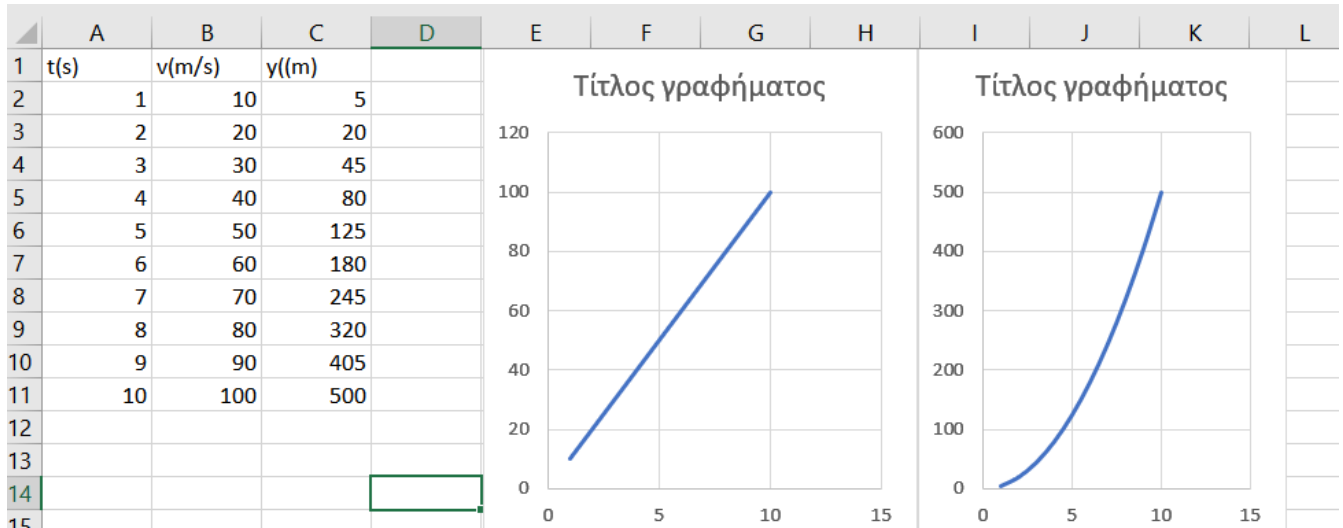
$$F = G \frac{Mm}{r^2} = mg \rightarrow g = \frac{GM}{r^2} \quad (4.12)$$



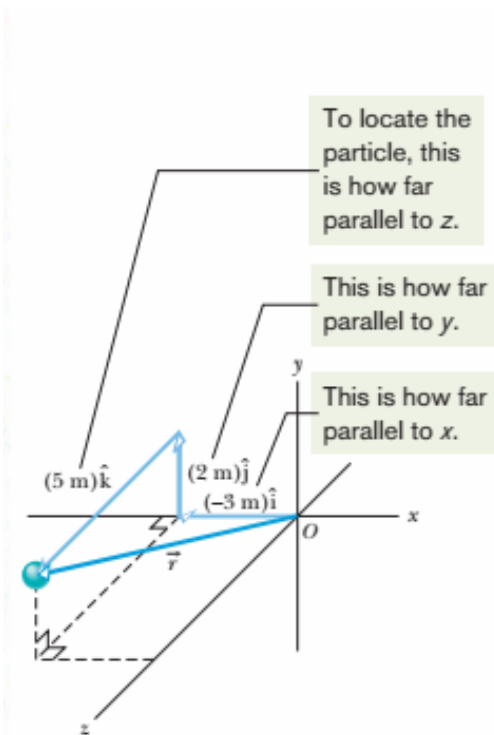


$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2.$$

$$g = \frac{GM}{r^2} \text{ Βρίσκουμε την } M$$



## 5. ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΚΑΙ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k},$$

(5.1)

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (5.2)$$

$$\Delta \vec{r} = (x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k}) - (x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k}) \quad (5.3)$$

$$\Delta \vec{r} = (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j} + (z_2 - z_1) \hat{k}, \quad (5.4)$$

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}.$$

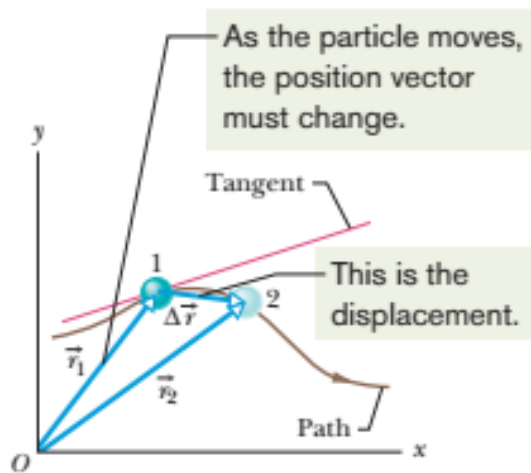
### ΜΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ

$$\vec{v}_{\text{avg}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (5.5)$$

$$\vec{v}_{\text{avg}} = \frac{\Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k}. \quad (5.6)$$

### ΣΤΙΓΜΙΑΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (5.7)$$



$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}. \quad (5.8)$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}, \quad (5.9)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad \text{and} \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (5.10)$$

$$\vec{a}_{\text{avg}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (5.11)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt} (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \\ &= \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k}.\end{aligned}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k},$$

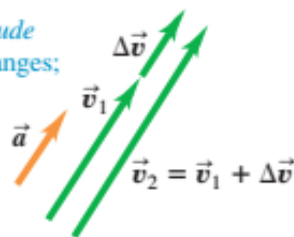
(5.13)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \text{and} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

(5.14)

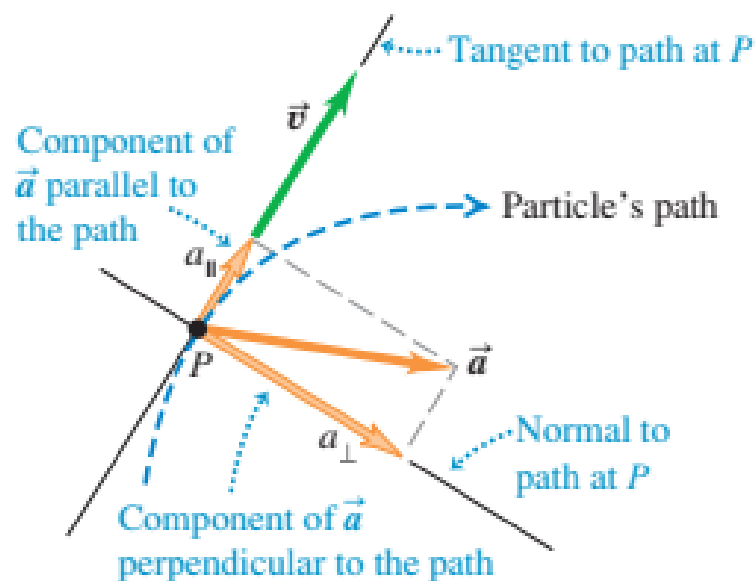
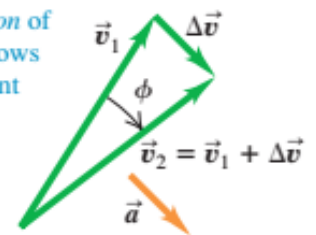
(a) Acceleration parallel to velocity

Changes only *magnitude* of velocity: speed changes; direction doesn't.

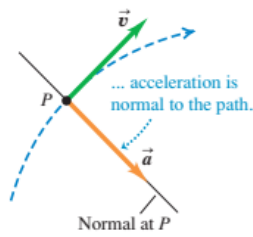


(b) Acceleration perpendicular to velocity

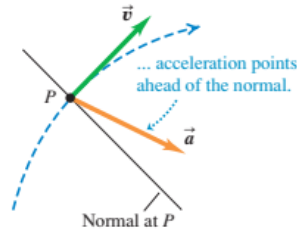
Changes only *direction* of velocity: particle follows curved path at constant speed.



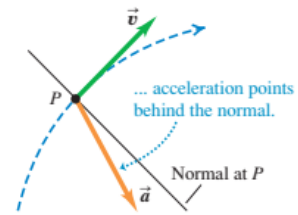
(a) When speed is constant along a curved path ...



(b) When speed is increasing along a curved path ...



(c) When speed is decreasing along a curved path ...



The velocity vector is always tangent to the path.

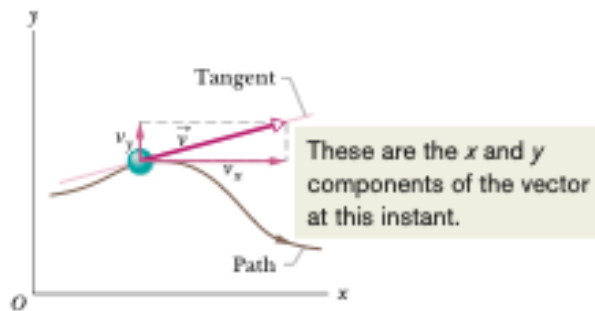
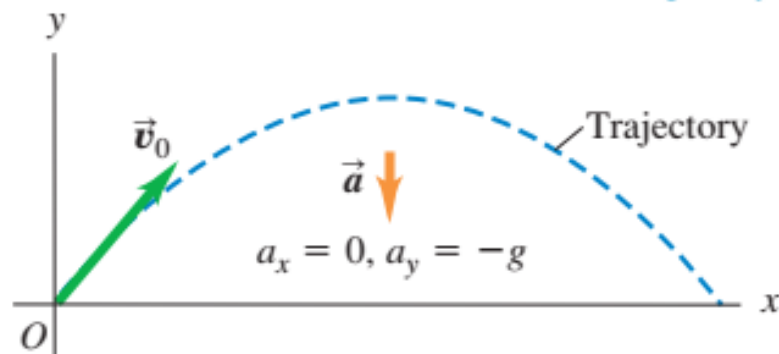


Fig. 4-4 The velocity  $\vec{v}$  of a particle, along with the scalar components of  $\vec{v}$ .

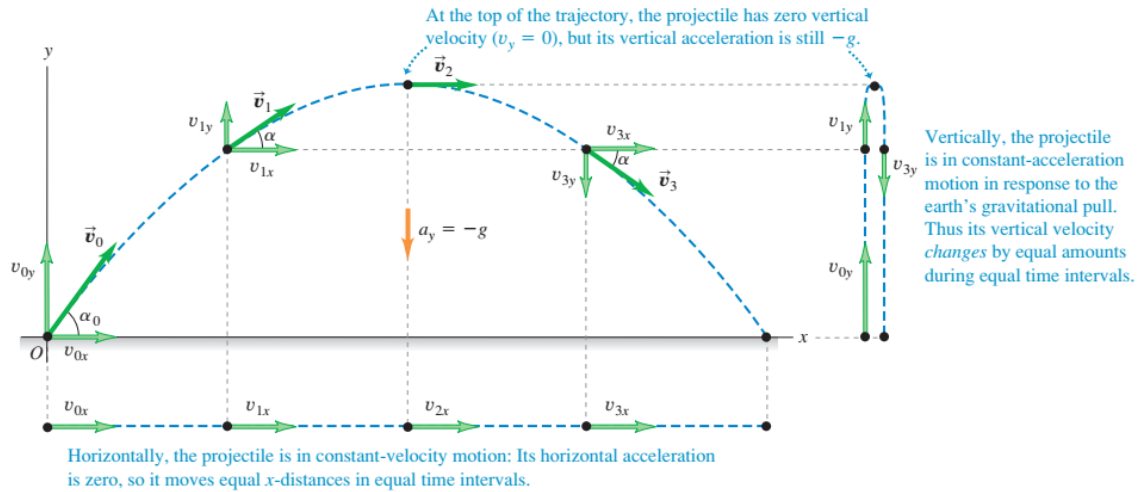
## ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ

- A projectile moves in a vertical plane that contains the initial velocity vector  $\vec{v}_0$ .
- Its trajectory depends only on  $\vec{v}_0$  and on the downward acceleration due to gravity.



**3.16** The red ball is dropped from rest, and the yellow ball is simultaneously projected horizontally; successive images in this stroboscopic photograph are separated by equal time intervals. At any given time, both balls have the same  $y$ -position,  $y$ -velocity, and  $y$ -acceleration, despite having different  $x$ -positions and  $x$ -velocities.





$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} \quad (5.15)$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \quad \text{and} \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta_0. \quad (5.16)$$

### Οριζόντια Κίνηση

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_{0x}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\vec{x} = x_0\hat{i} + v_{0x}t\hat{i}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \quad (5.17)$$

$$x = x_0 + v_0(\cos\theta_0)t \quad (5.18)$$

### Κατακόρυφη Κίνηση

$$\vec{y} = \vec{y}_0 + \vec{v}_{0y}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \rightarrow$$

$$\vec{y} = y_0\hat{j} + v_{0y}t\hat{j} - \frac{1}{2}gt^2\hat{j}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$



$$y = y_0 + (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.19)$$

Πληκτρολογήστε την εξίσωση εδώ.

**Ομοίως**

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt \quad (5.20)$$

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0) \quad (5.21)$$

**Εξίσωση της τροχιάς**

$$x = x_0 + v_0(\cos \theta_0)t \quad (5.18)$$

**Λύνοντας ως προς t αντικαθιστώντας στην**

$$y = y_0 + (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.19)$$

**Λαμβάνουμε για  $x_0=0$  και  $y_0=0$**

**$Y=f(x)$**

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}$$

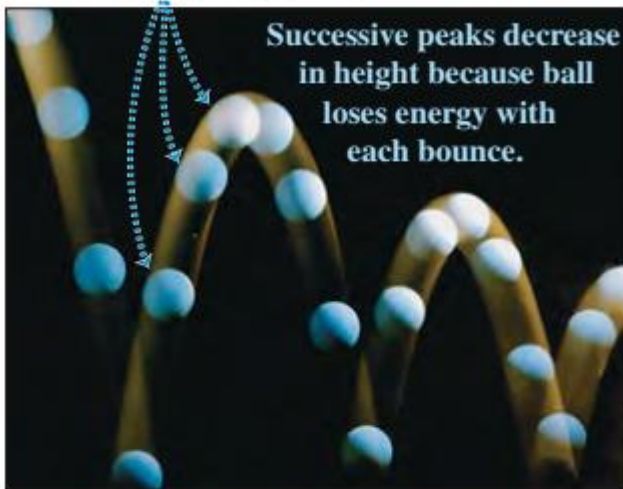
**(5.22)**

**Βεληνεκές**

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0.$$

Για ποια  $\theta_0$  το  $R$  γίνεται μέγιστο?

- (a) Successive images of ball are separated by equal time intervals.

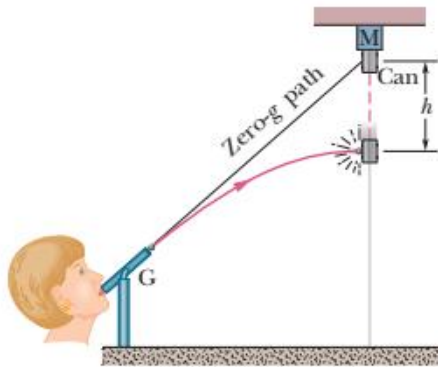


- (b)

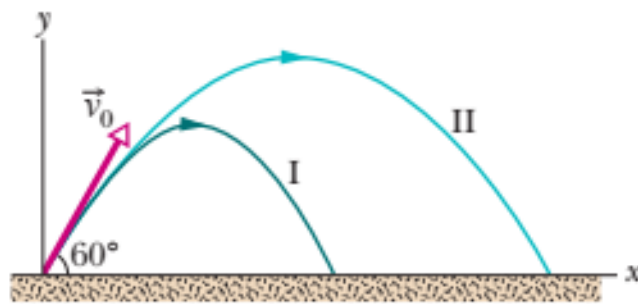


Πρόβλημα

The ball and the can fall the same distance  $h$ .



**Επίδραση του αέρα**



**Fig. 4-13** (I) The path of a fly ball calculated by taking air resistance into account. (II) The path the ball would follow in a vacuum, calculated by the methods of this chapter. See Table 4-1 for corresponding data. (Adapted from “The Trajectory of a Fly Ball,” by Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985.)

**Table 4-1**

**Two Fly Balls<sup>a</sup>**

	Path I (Air)	Path II (Vacuum)
Range	98.5 m	177 m
Maximum height	53.0 m	76.8 m
Time of flight	6.6 s	7.9 s

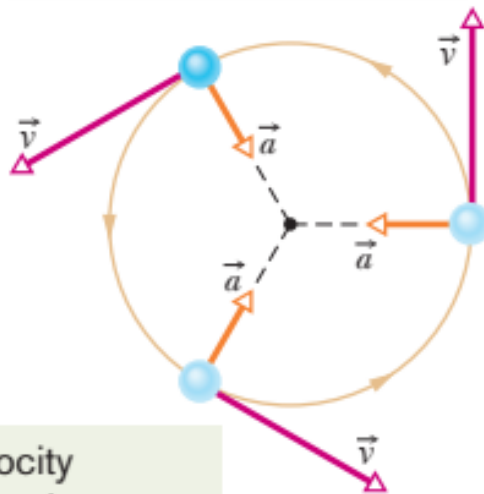
<sup>a</sup>See Fig. 4-13. The launch angle is  $60^\circ$  and the launch speed is 44.7 m/s.

## 6. ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

$\vec{a}$ , ή  $a_R$ , ή  $a_{rad}$  κεντρομόλος ή ακτινική επιτάχυνση

$\vec{a}$  γραμμική επιτάχυνση

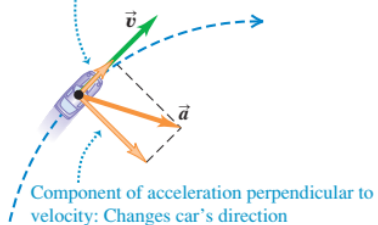
The acceleration vector always points toward the center.



The velocity vector is always tangent to the path.

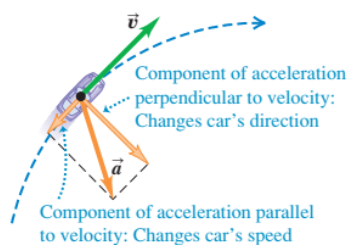
(a) Car speeding up along a circular path

Component of acceleration parallel to velocity: Changes car's speed

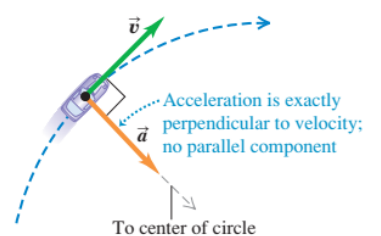


(b) Car slowing down along a circular path

Component of acceleration perpendicular to velocity: Changes car's direction



(c) Uniform circular motion: Constant speed along a circular path

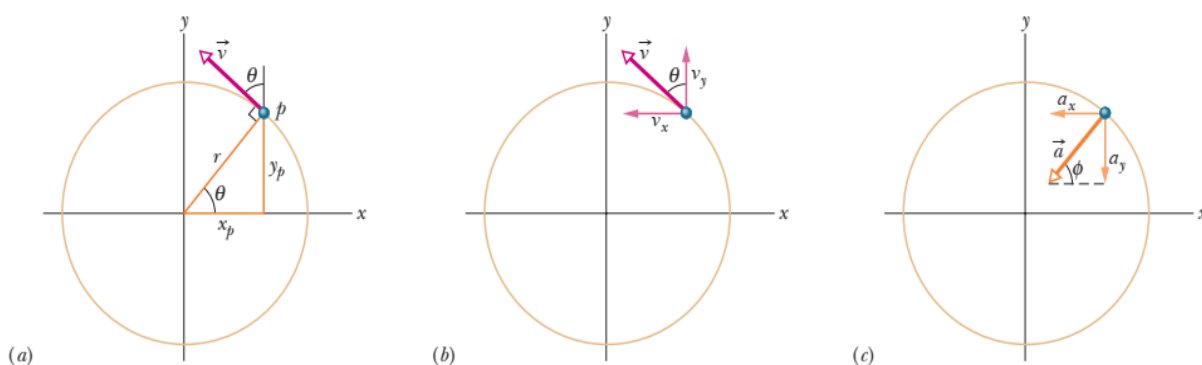


Περίοδος  $T$ ,  
 συχνότητα  $f$ ,  
 κυκλική συχνότητα  $\omega$ .

$$f = \frac{1}{T} \text{ (Hz)}$$

$$\omega = \frac{2\pi \text{ (rad)}}{T \text{ (s)}}$$

$$\omega = 2\pi f \quad (6.1)$$



$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (-v \sin \theta) \hat{i} + (v \cos \theta) \hat{j}.$$

(6.2)

$$\vec{v} = \left( -\frac{vy_p}{r} \right) \hat{i} + \left( \frac{vx_p}{r} \right) \hat{j}.$$

(6.3)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left( -\frac{v}{r} \frac{dy_p}{dt} \right) \hat{i} + \left( \frac{v}{r} \frac{dx_p}{dt} \right) \hat{j}.$$

$$= \left( -\frac{v}{r} v_y \right) \hat{i} + \left( \frac{v}{r} v_x \right) \hat{j} \rightarrow$$

$$\vec{a} = \left( -\frac{v^2}{r} \cos \theta \right) \hat{i} + \left( -\frac{v^2}{r} \sin \theta \right) \hat{j}.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{1} = \frac{v^2}{r},$$

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (6.4)$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (6.5)$$

$$\text{Από 6.5 έχουμε } v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad (6.6)$$

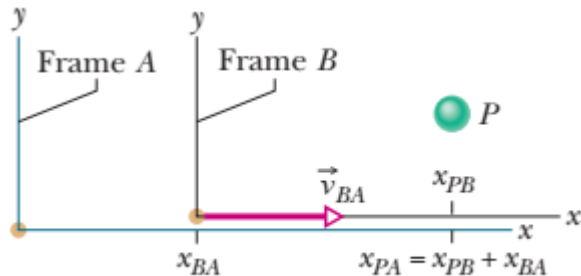
Από (6.1), (6.4) και (6.6)

$$\alpha = \omega^2 r \quad \text{ή} \quad \alpha_{rad} = \omega^2 r \quad (6.7)$$

Από (6.5)

$$v = \omega r \quad (6.8)$$

## 7. ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ



$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}. \quad (7.1)$$

$$\frac{d}{dt}(x_{PA}) = \frac{d}{dt}(x_{PB}) + \frac{d}{dt}(x_{BA}). \quad (7.2)$$

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}. \quad (7.3)$$

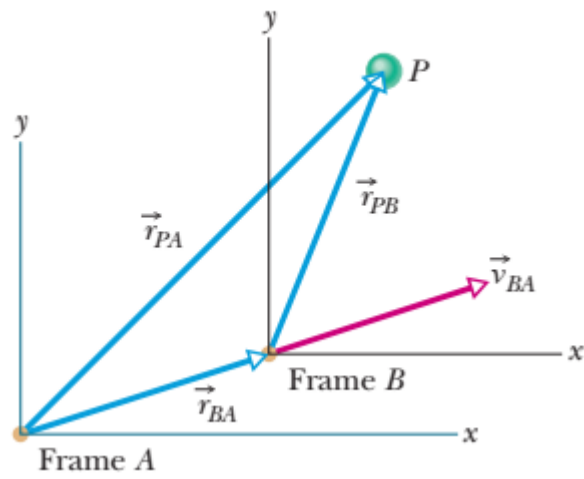
$$\frac{d}{dt}(v_{PA}) = \frac{d}{dt}(v_{PB}) + \frac{d}{dt}(v_{BA}). \quad (7.4)$$

$$a_{PA} = a_{PB}. \quad (7.5)$$

Παρατηρητές σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς που κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα θα μετρούν την ίδια επιτάχυνση για ένα κινούμενο σωματίδιο.

## 8. ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ





$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}. \quad (8.1)$$

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}. \quad (8.2)$$

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}. \quad (8.3)$$

# 9.ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ



## Οι 4 βασικές αλληλεπιδράσεις στην Φύση

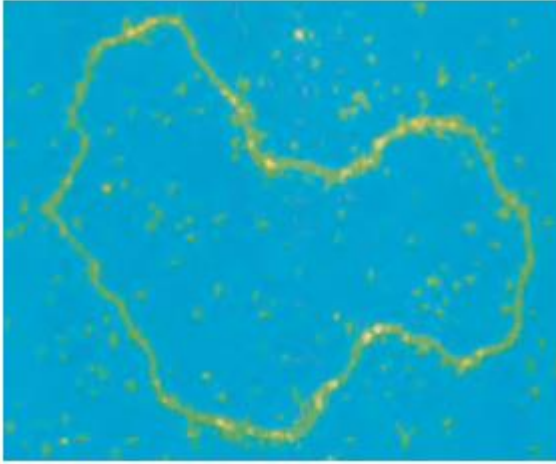
### 1.Βαρυτική αλληλεπίδραση

(a) Gravitational forces hold planets together.



### 2. Ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση

(b) Electromagnetic forces hold molecules together.



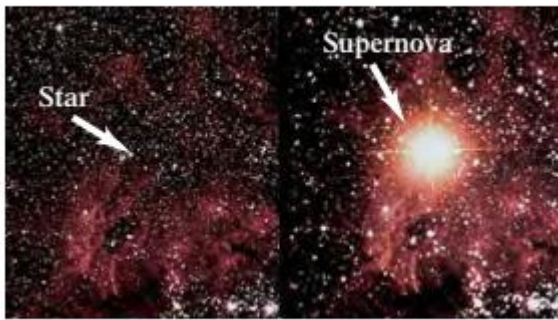
### 3. Ισχυρή αλληλεπίδραση

(c) Strong forces release energy to power the sun.



### 4. Ασθενής αλληλεπίδραση

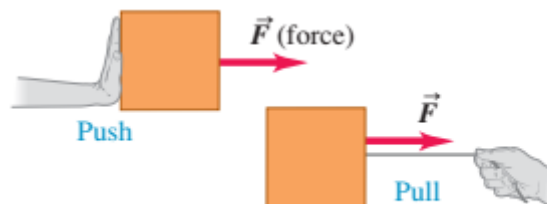
(d) Weak forces play a role in exploding stars.



**Ηλεκτροασθενής αλληλεπίδραση  
(Ηλεκτρομαγνητική – Ασθενής)  
Μεγάλη ενοποιημένη θεωρία (GUT)  
(Ηλεκτρομαγνητική – Ασθενής -Ισχυρή)  
Θεωρία των Πάντων (TOE)?????  
(Ηλεκτρομαγνητική – Ασθενής -Ισχυρή -Βαρυτική)**

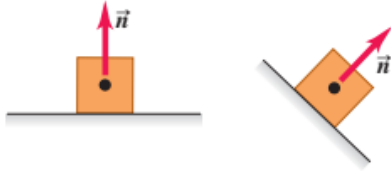
#### 4.1 Some properties of forces.

- A force is a push or a pull.
- A force is an interaction between two objects or between an object and its environment.
- A force is a vector quantity, with magnitude and direction.

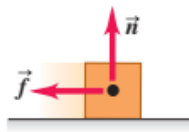


#### 4.2 Four common types of forces.

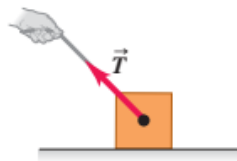
(a) **Normal force  $\vec{n}$ :** When an object rests or pushes on a surface, the surface exerts a push on it that is directed perpendicular to the surface.



(b) **Friction force  $\vec{f}$ :** In addition to the normal force, a surface may exert a frictional force on an object, directed parallel to the surface.



(c) **Tension force  $\vec{T}$ :** A pulling force exerted on an object by a rope, cord, etc.

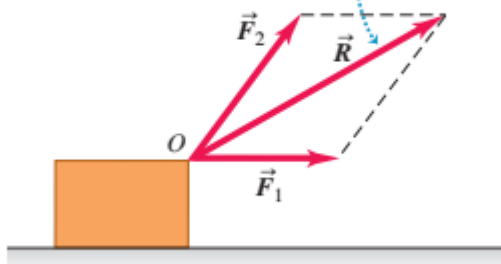


(d) **Weight  $\vec{w}$ :** The pull of gravity on an object is a long-range force (a force that acts over a distance).



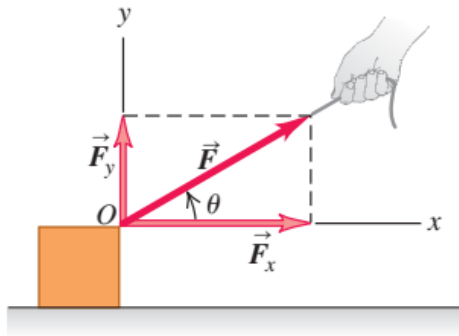
## Αρχή της Επαλληλίας ή Υπέρθεσης

Two forces  $\vec{F}_1$  and  $\vec{F}_2$  acting on a body at point  $O$  have the same effect as a single force  $\vec{R}$  equal to their vector sum.

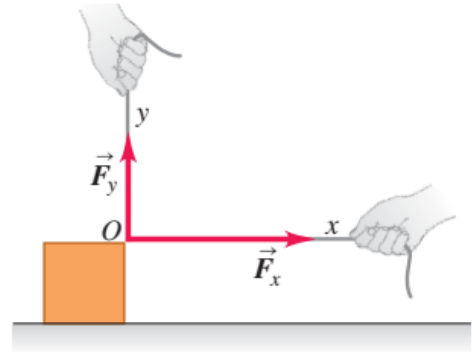


$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

(a) Component vectors:  $\vec{F}_x$  and  $\vec{F}_y$   
 Components:  $F_x = F \cos \theta$  and  $F_y = F \sin \theta$



(b) Component vectors  $\vec{F}_x$  and  $\vec{F}_y$  together have the same effect as original force  $\vec{F}$ .



$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum \vec{F}$$

**Οι νόμοι του Newton αναφέρονται σε υλικά σημεία**

### 1<sup>ος</sup> Νόμος

- Είναι νοητικός νόμος (Σε ένα κόσμο που αποτελείται από ένα υλικό σημείο αυτό θα εκκινείτο ευθύγραμμα και ομαλά)
- Εισάγει την έννοια του αδρανειακού συστήματος αναφοράς. **Αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι εκείνο το σύστημα στο οποίο ισχύει ο 1<sup>ος</sup> νόμος**

- Ο 1<sup>ος</sup> νόμος καθορίζει τα κατάλληλα συστήματα αναφοράς στα οποία θα δουλεύει ο 2<sup>ος</sup> νόμος

- Ισοτροπικό σύμπαν

$$\vec{F}_{net} = 0 \text{ τότε } \vec{v} = \text{σταθερή και επομένως } \vec{a} = 0$$

## 2<sup>ος</sup> Νόμος

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}$$

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \quad (\text{Newton's second law}). \quad (9.1)$$

$$F_{net,x} = ma_x, \quad F_{net,y} = ma_y, \quad \text{and} \quad F_{net,z} = ma_z. \quad (9.2)$$

Όπου  $m$  είναι η μάζα αδράνειας

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

**Table 5-1**

**Units in Newton's Second Law (Eqs. 5-1 and 5-2)**

System	Force	Mass	Acceleration
SI	newton (N)	kilogram (kg)	m/s <sup>2</sup>
CGS <sup>a</sup>	dyne	gram (g)	cm/s <sup>2</sup>
British <sup>b</sup>	pound (lb)	slug	ft/s <sup>2</sup>

<sup>a</sup>1 dyne = 1 g · cm/s<sup>2</sup>.

<sup>b</sup>1 lb = 1 slug · ft/s<sup>2</sup>.

Εάν  $\vec{F} = 0$  τότε  $\vec{a} = 0$  οπότε  $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \rightarrow d\vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = const \rightarrow$   
1<sup>ος</sup> Νόμος

## Αδρανειακά συστήματα αναφοράς

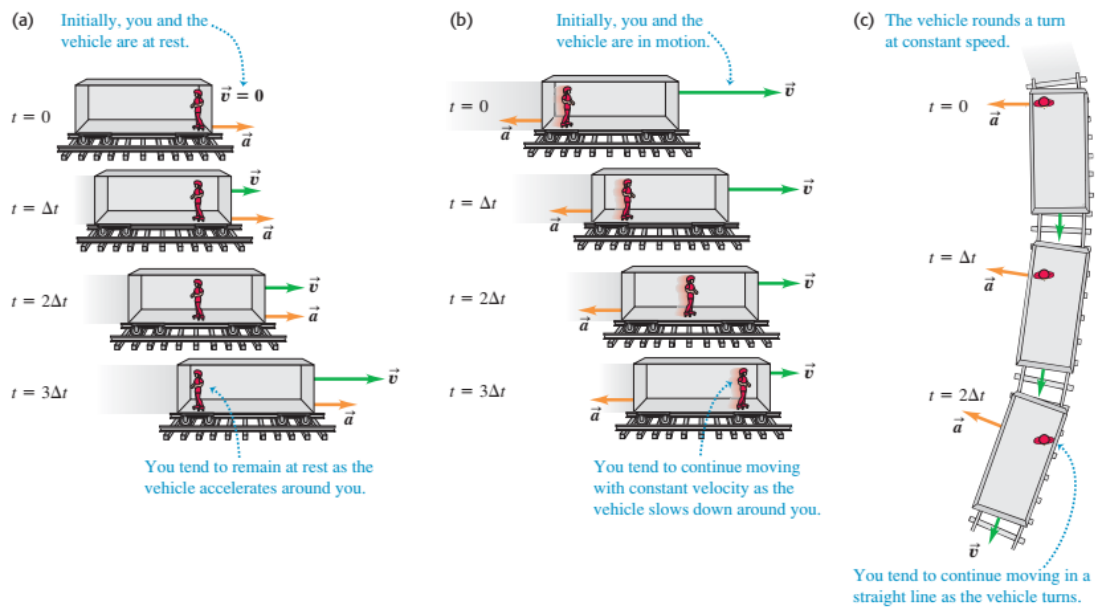
Αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι το σύστημα στο οποίο ισχύει ο 1<sup>ος</sup> νόμος του Newton.

Αν εξασφαλίσουμε ότι σε ένα υλικό σημείο  $\sum \vec{F} = 0$  τότε  $\vec{v} = \text{σταθερή}$ . Αν βλέπουμε το σωματίδιο να κινείται με  $\vec{v} = \text{σταθερή}$  τότε λέμε ότι το δικό μας σύστημα είναι αδρανειακό.

Αν το βλέπουμε να κινείται με  $\vec{v} \neq \text{σταθερή}$  τότε δεν είμαστε σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς και πρέπει να αλλάξουμε σύστημα. Ένας τρόπος είναι να ενσωματοθούμε με το σωματίδιο.

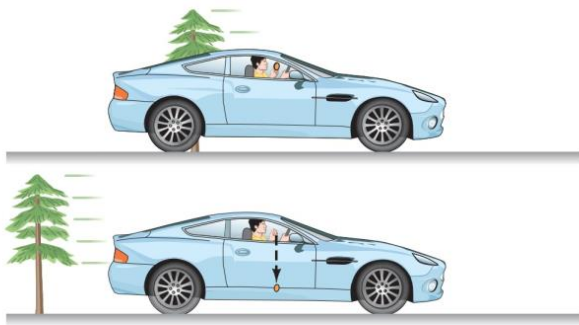
Στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς ισχύει η αρχή της σχετικότητας δηλαδή οι νόμοι της Φυσικής πρέπει να ισχύουν απόλυτα και με τον ίδιο τρόπο για παρατηρητές που κινούνται ο καθένας ανεξάρτητα από τον άλλο με σταθερή ταχύτητα



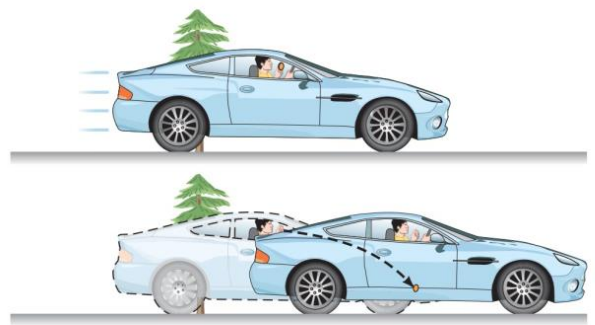


Το βαγόνι επιταχύνεται ως προς την Γή και δεν είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ο 1<sup>ος</sup> νόμος ισχύει σε κάποια συστήματα αναφοράς ενώ σε κάποια άλλα όχι.





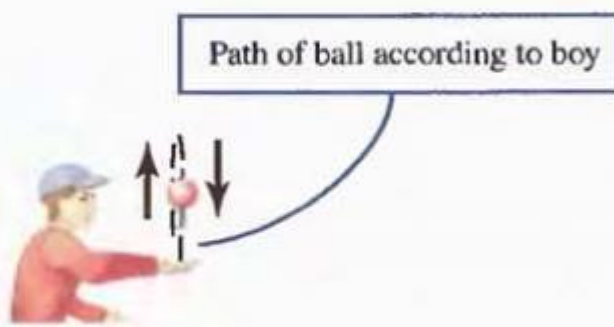
(a)  
Reference frame = car



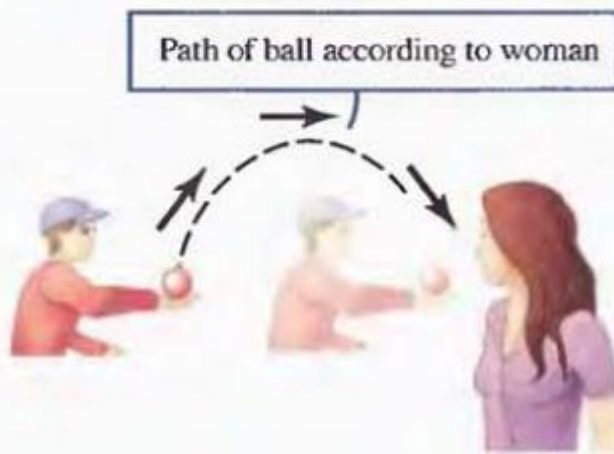
(b)  
Reference frame = Earth

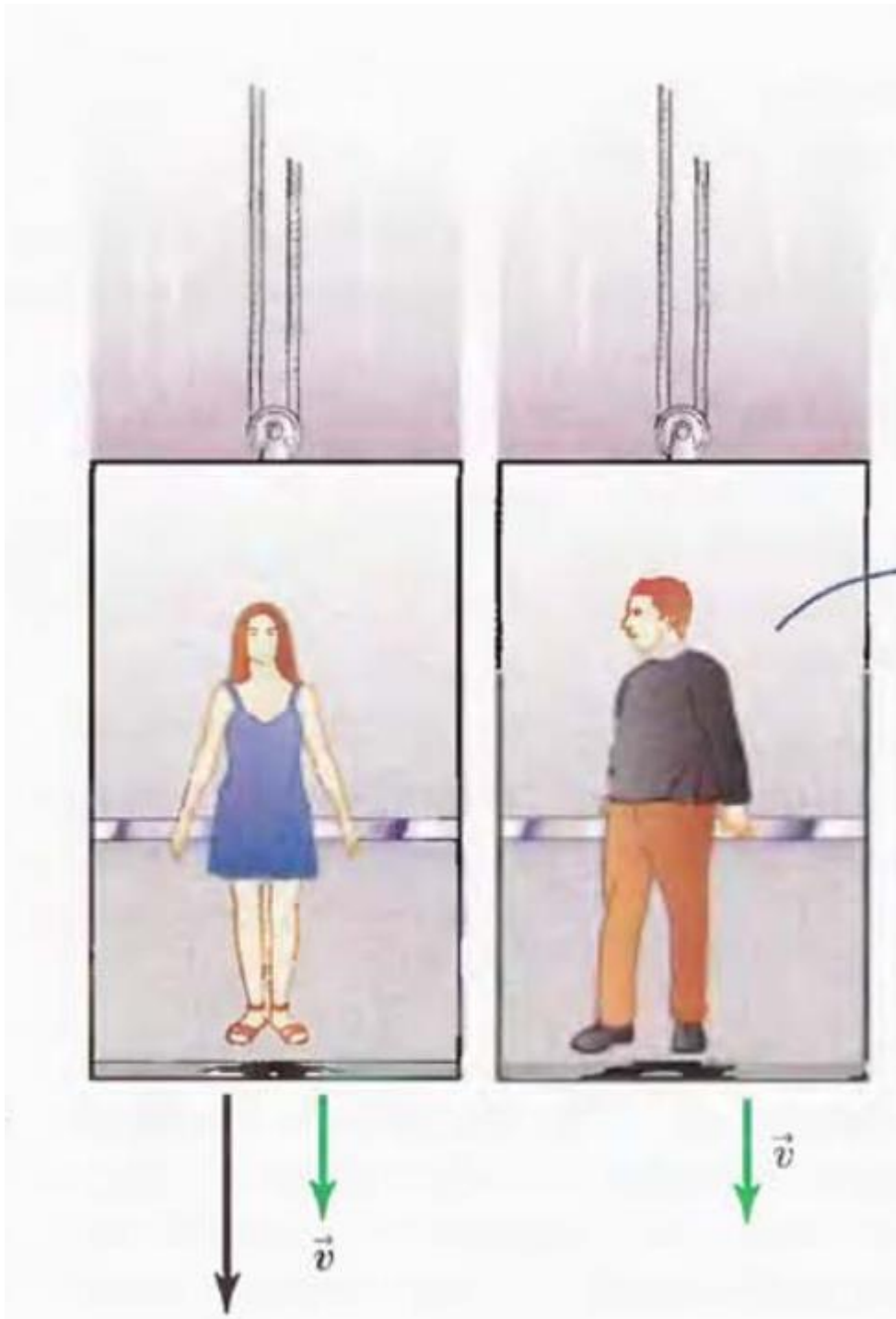


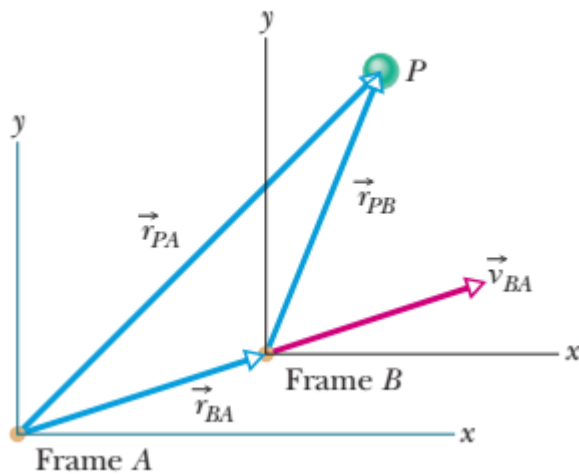
(a)



(b)





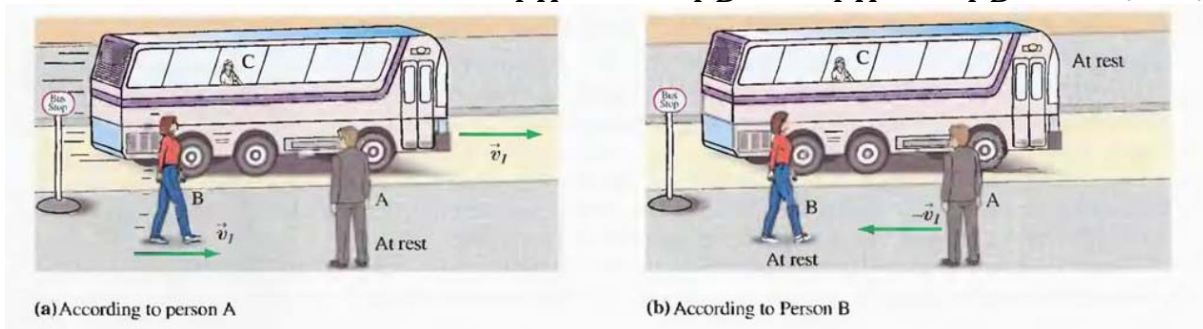


$$\begin{aligned} \vec{v}_{BA} &= \text{σταθερή} \\ \vec{r}_{PA} &= \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA} \\ \frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} &= \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} \rightarrow \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_{PA}}{dt} &= \frac{d\vec{v}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} \\ \vec{a}_{PA} &= \vec{a}_{PB} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Επομένως

$$m\vec{a}_{PA} = m\vec{a}_{PB} \rightarrow \vec{F}_{PA} = \vec{F}_{PB} \quad (9.4)$$



Ο Α βλέπει το C να κινείται με  $\vec{v}_1 = \text{σταθερή} \rightarrow \sum \vec{F} = 0$

Ο Α είναι αδρανειακός παρατηρητής

Ο Β βλέπει το C να κινείται με  $\vec{v}_1 = 0 \rightarrow \sum \vec{F} = 0$

Ο Β είναι αδρανειακός παρατηρητής

Ο 1<sup>ος</sup> νόμος δεν απαντά ποιος παρατηρητής είναι ακίνητος. Όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς είναι ισοδύναμα.

## Μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς

Εάν το σύστημα αναφοράς B κινείται με επιτάχυνση  $\vec{\alpha}_0$  που την λέμε **μετοχική επιτάχυνση** και ο παρατηρητής B προσδιορίζει την επιτάχυνση του σώματος P και την βρίσκει  $\vec{a}_{PB}$  που την λέμε **σχετική επιτάχυνση** τότε η **απόλυτη επιτάχυνση** του σώματος όπως θα την μετρούσε παρατηρητής A σε αδρανειακό σύστημα A δίνεται από την σχέση (9.5)

$$\frac{d\vec{v}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{PB}}{dt}$$

Απόλυτη επιτάχυνση=μετοχική + σχετική

$$\vec{a}_{PA} = \vec{\alpha}_0 + \vec{a}_{PB} \quad (9.5)$$

$$m\vec{a}_{PA} = m\vec{\alpha}_0 + m\vec{a}_{PB} \rightarrow$$

$$m\vec{a}_{PA} - m\vec{\alpha}_0 = m\vec{a}_{PB} \rightarrow$$

$$m\vec{a}_{PB} = m\vec{a}_{PA} - m\vec{\alpha}_0$$

$$\vec{F}_{PB} = \vec{F}_{PA} + \vec{F}_0 \quad (9.6)$$

Μη αδρανειακή δύναμη= Πραγματική Δύναμη+Ψευδοδύναμη

Όπου

$$\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0 \quad (9.7)$$

$$m\vec{a}_{PB} = m\vec{a}_{PA} - m\vec{a}_0$$

Η  $\vec{F}_0$  είναι υποθετική δύναμη (ψευδοδύναμη) που είναι αποτέλεσμα της επιταχυνόμενης κίνησης του συστήματος αναφοράς του παρατηρητή B. Ο μη αδρανειακός παρατηρητής B αντιλαμβάνεται και μία υποθετική δύναμη  $\vec{F}_0$ . Οι υποθετικές δυνάμεις εκφράζουν την επίδραση της επιτάχυνσης του συστήματος στις παρατηρήσεις που γίνονται μέσα από το επιταχυνόμενο σύστημα, αλλά δεν είναι δυνάμεις που πραγματικά ενεργούν πάνω στο σώμα όπως οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης.

Φυσικό μέγεθος στον Αδρανειακό παρατηρητή =  
 Φυσικό μέγεθος στον Μη αδρανειακό παρατηρητή +  
 επίδραση της μετοχικής επιτάχυνσης

**Αρχή του d' Alembert**



Ο Ζαν Μπατίστ λε Ροντ ντ' Αλαμπέρ ήταν Γάλλος μαθηματικός, μηχανικός, φυσικός, φιλόσοφος και θεωρητικός της μουσικής. Θεωρείται ένας από τους σημαντικότερους μαθηματικούς και φυσικούς του 18ου αιώνα. Επιπλέον βοήθησε τον Ντιντερό στη συγγραφή της περίφημης Εγκυκλοπαίδειας.

Γέννηση: 16 Νοεμβρίου 1717, [Παρίσι, Γαλλία](#)

Απεβίωσε: 29 Οκτωβρίου 1783, [Παρίσι, Γαλλία](#)

Πλήρες όνομα: Jean-Baptiste le Rond d'Alembert

Εκπαίδευση: [Κολλέγιο των Τεσσάρων Εθνών](#) (1735)

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (9.8)$$

$$\vec{F} - m\vec{a} = 0 \quad (9.9)$$

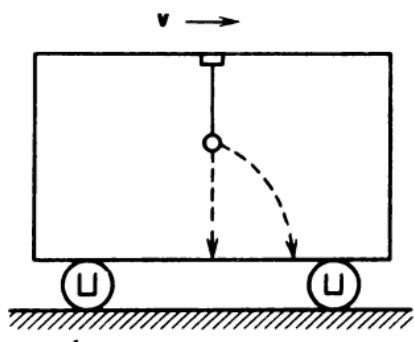
Αν θεωρήσουμε το  $-m\vec{a}$  να είναι μία υποθετική δύναμη αντίδρασης  $\vec{F}_0$  στην κίνηση του σώματος

$$\vec{F} + \vec{F}_0 = 0 \quad (9.10)$$

Με το τρόπο αυτό τα προβλήματα δυναμικής γίνονται προβλήματα ισορροπίας σύμφωνα με την **Αρχή του d' Alembert**



Αν θεωρήσουμε ότι πάνω σε ένα σώμα ασκείται εκτός από τις πραγματικές δυνάμεις και μία πρόσθετη δύναμη  $m\vec{a}$  ίση και αντίθετη προς την συνισταμένη των πραγματικών δυνάμεων τότε το άθροισμα όλων θα είναι μηδέν. Αυτή η φανταστική δύναμη επειδή εκφράζει την αντίδραση του σώματος ονομάζεται **δύναμη αδράνειας** ή **αδρανειακή δύναμη d' Alembert**. Τις δυνάμεις αυτές τις αντιλαμβάνεται μόνο ένας **μη αδρανειακός παρατηρητής** που κινείται μαζί με το σώμα προκειμένου να ερμηνεύσει την ισορροπία του σώματος ως προς το μη αδρανειακό σύστημα. Η «δύναμη D'Alembert» έχει κατεύθυνση αντίθετη της επιτάχυνσης του μη αδρανειακού παρατηρητή και τιμή ίση με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση, δηλαδή  $F_0 = -m \cdot a$ . Η δύναμη αυτή σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς εξαφανίζεται.

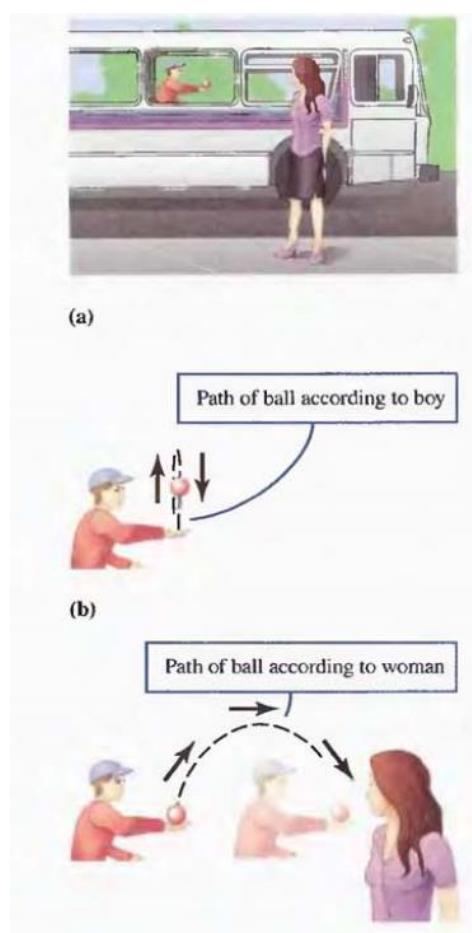


Παράδειγμα Αδρανειακός – Αδρανειακός

Για τον αδρανειακό παρατηρητή (Πάνω στο τρένο αν κόψουμε το νήμα το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση με επιτάχυνση  $g$

Για τον αδρανειακό παρατηρητή (πάνω στην Γη το σώμα εκτελεί παραβολική τροχιά, επειδή έχει στον άξονα  $x$  ταχύτητα  $v$ , ενώ στον άξονα  $y$  εκτελεί ελεύθερη πτώση με επιτάχυνση  $g$ .

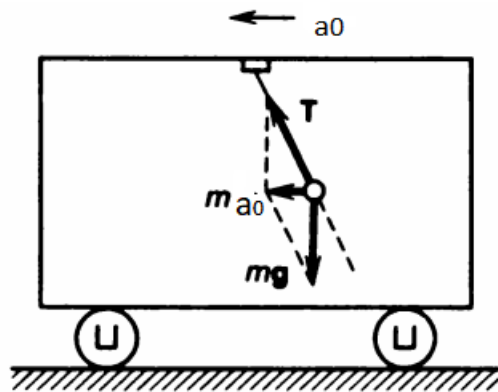
Και οι δύο βρίσκουν την ίδια επιτάχυνση  $g$



**Σταθερή ταχύτητα για την γυναίκα – Μηδενική ταχύτητα για το αγόρι**

Είδαμε ότι για συστήματα αναφοράς που κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα ισχύει

## Παράδειγμα Αδρανειακός – Μη Αδρανειακός



Η επιτάχυνση που μετράει ο αδρανειακός παρατηρητής στην Γη είναι  $\vec{\alpha}_Γ$ , ενώ  $\vec{\alpha}_w$  η τυχούσα επιτάχυνση της μπάλας ως προς το βαγόνι

Απόλυτη επιτάχυνση = μετοχική + σχετική

$$\vec{\alpha}_Γ = \vec{\alpha}_w + \vec{\alpha}_0$$

Επειδή  $\vec{\alpha}_w = 0$  (αφού η μπάλα δεν κινείται μέσα στο βαγόνι)

$$\vec{\alpha}_Γ = \vec{\alpha}_0$$

Μη αδρανειακή δύναμη = Πραγματική Δύναμη + Ψευδοδύναμη

Όπου

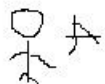
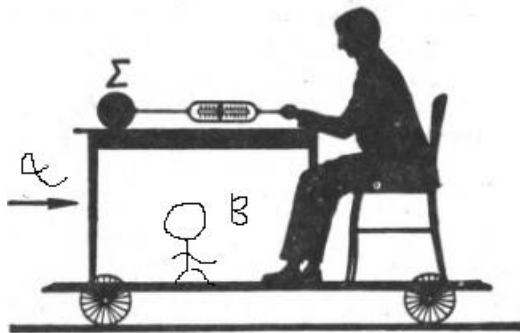
Για τον μη αδρανειακό παρατηρητή η μπάλα ισορροπεί οπότε πρέπει

Μη αδρανειακή δύναμη = Πραγματική Δύναμη + Ψευδοδύναμη ->

$$0 = \text{Πραγματική Δύναμη} + \text{Ψευδοδύναμη}$$

$$0 = m\vec{a}_F - m\vec{a}_0$$

### Παράδειγμα 3



#### Ακίνητος παρατηρητής (Αδρανειακός) A (επί της Γής)

Η σφαίρα επιταχύνεται με επιτάχυνση  $a$  λόγω της δύναμης  $F$  που ασκεί ο άνθρωπος μέσω του ελατηρίου στην σφαίρα  $F=ma$

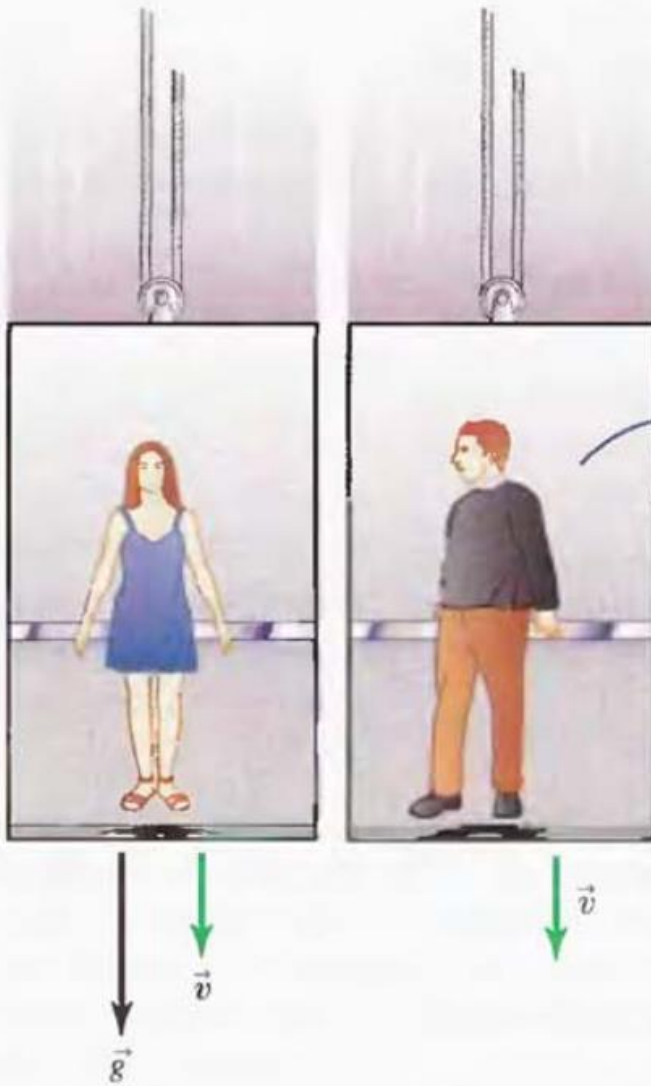
#### Κινούμενος παρατηρητής B (επί του αμαξιδίου)- Μη αδρανειακός

Η σφαίρα ισορροπεί Εκτός από την δύναμη από το χέρι πρέπει να ασκείται και μία αδρανειακή δύναμη ίση και αντίθετη έτσι ώστε

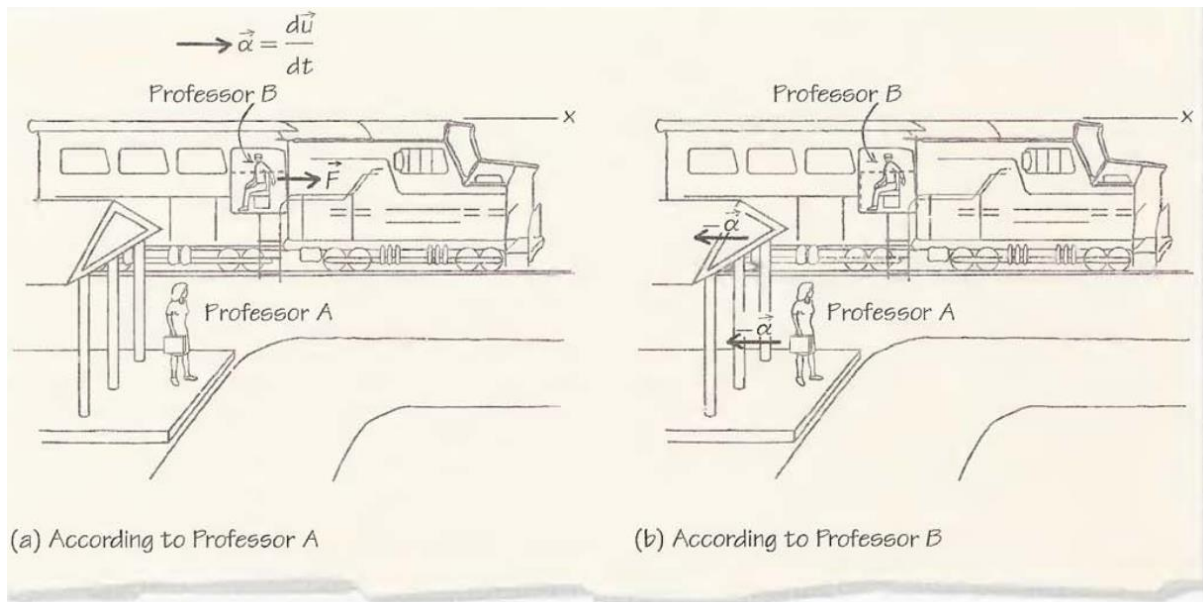
Μη αδρανειακή δύναμη= Πραγματική Δύναμη+Ψευδοδύναμη->

$0 = \text{Πραγματική Δύναμη} + \text{Ψευδοδύναμη}$

$0 = ma - F_0$ .



Man in falling elevator is trying to determine why the woman in the other falling elevator experiences no apparent force.



Σύστημα αναφοράς B

$$v_A = -u \rightarrow \frac{dv_A}{dt} = -\frac{du}{dt} \rightarrow -a$$

Μη αδρανειακή δύναμη= Πραγματική Δύναμη+Ψευδοδύναμη  
 $-ma=0+F$

## ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

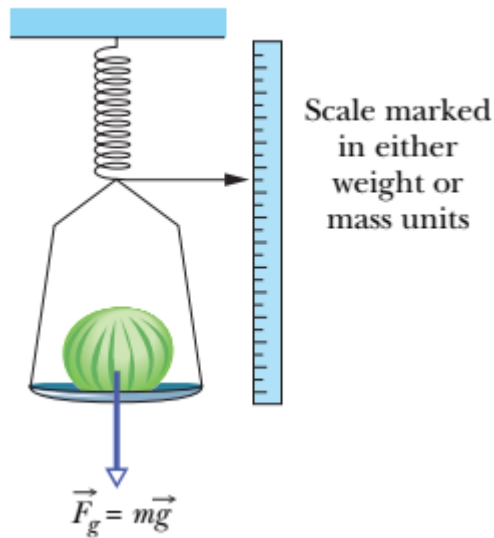
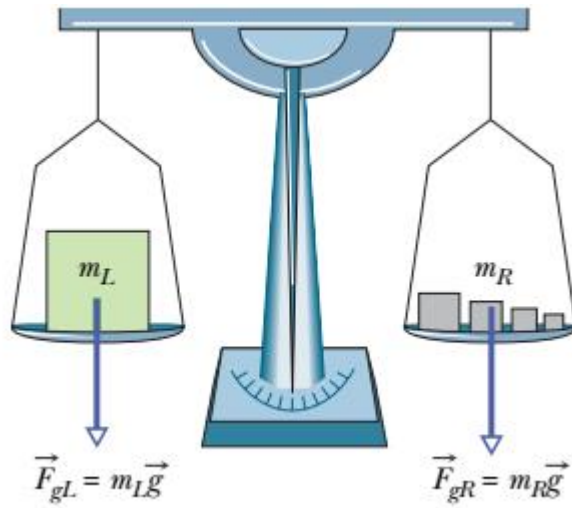
### i) ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

$$\vec{F}_g = -F_g \hat{j} = mg \hat{j} \quad (9.11)$$

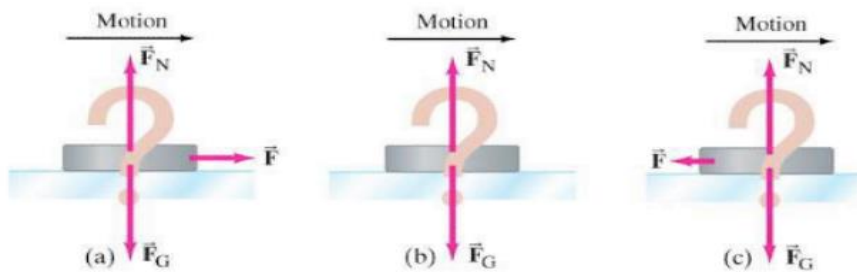
$$F_g = mg \quad (9.12)$$

Βάρος

$$W=mg \quad (9.13)$$

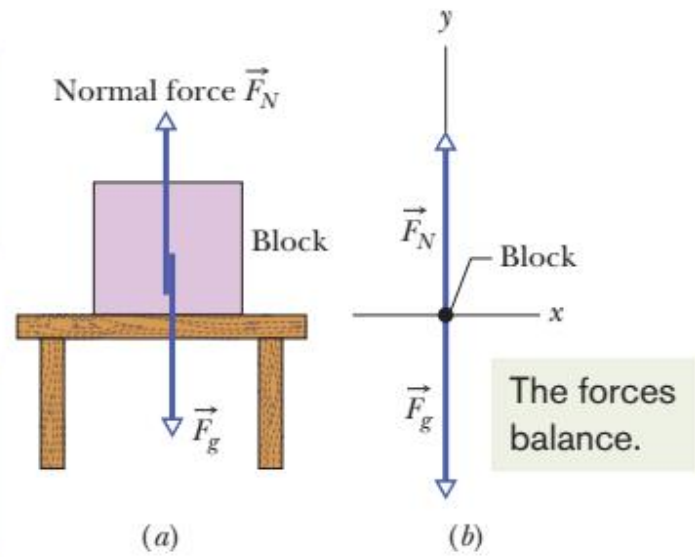


ii) **ΚΑΘΕΤΗ ΔΥΝΑΜΗ  $F_N$**   
**Διάγραμμα ελεύθερου σώματος**



The normal force is the force on the block from the supporting table.

The gravitational force on the block is due to Earth's downward pull.



The forces balance.

$$\sum \vec{F}_{net,y} = m \vec{a}_y \quad (9.14)$$

$$\vec{F}_N + \vec{F}_g = m \vec{a}_y \quad (9.15)$$

$$F_N \hat{j} - F_g \hat{j} = m \vec{a}_y \quad (9.16)$$

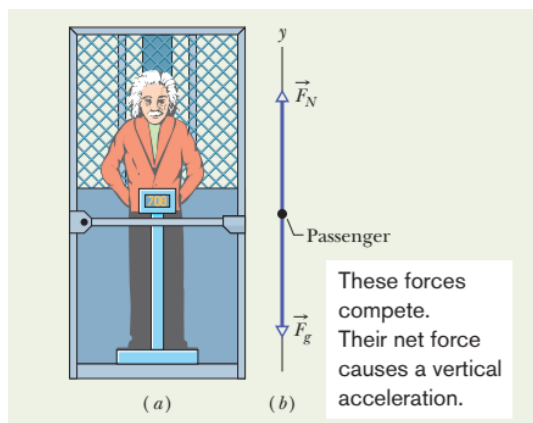
$$F_N \hat{j} - mg \hat{j} = m \vec{a}_y \quad (9.17)$$

$$F_N \hat{j} = mg \hat{j} + m \vec{a}_y \quad (9.17)$$

$$F_N \hat{j} = mg \hat{j} \quad (9.19)$$

$$F_N = mg \quad (9.20)$$

## Δυνάμεις σε ανελκυστήρα



These forces compete. Their net force causes a vertical acceleration.



### Αδρανειακό σύστημα Γής (Εδάφους)

$M=100\text{Kg}$ ,  $g=10\text{m/s}^2$ . Ο θάλαμος επιταχύνεται προς τα πάνω με σταθερή  $a_y=3\text{m/s}^2$

#### Άξονας y

$$\vec{a}_y = \frac{\sum \vec{F}_y}{m} \quad (9.21)$$

$$\vec{F}_{net} = \sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \rightarrow \vec{F}_N + \vec{F}_g = m\vec{a}_y \quad (9.22)$$

$$\vec{F}_{net} = F_N \hat{j} - F_g \hat{j} = ma_y \hat{j} \quad (9.23)$$

$$F_N \hat{j} = mg \hat{j} + ma_y \hat{j} = m(g + a_y) \hat{j} \quad (9.24)$$

$$F_N = m(g + a_y) \quad (9.25)$$

i)  $a_y=0$ ,  $F_N=mg=100\text{Kg} \cdot 10\text{ms}^{-2}=1000\text{N}$ ,  $F_N = F_g$

ii)  $a_y=3\text{ms}^{-2}$ ,  $F_N = 100\text{Kg} \cdot 13 \text{ms}^{-2} = 1300\text{N}$

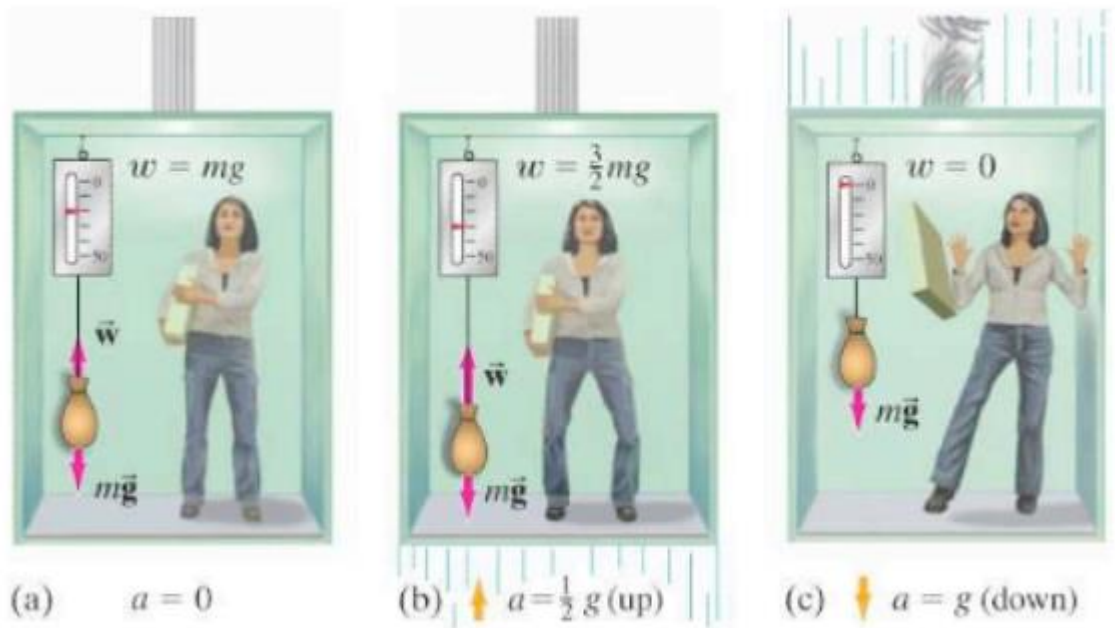
$$F_{net} = F_N - F_g = 1300\text{N} - 1000\text{N} \rightarrow F_{net} = 300\text{N}$$

### Μη Αδρανειακό σύστημα ανελκυστήρα, $a_y=0$ ως προς αυτό

Μη αδρανειακή δύναμη = Πραγματική Δύναμη + Ψευδοδύναμη

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_y + \vec{F}_0 &= 0 \rightarrow \vec{F}_N + \vec{F}_g + \vec{F}_0 = 0 \\ &\rightarrow F_N \hat{j} - mg \hat{j} - ma_y \hat{j} = 0 \rightarrow a_y = 0 \end{aligned}$$

Ως προς μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς η επιτάχυνση του θαλάμου είναι μηδέν δεν ισχύει δηλαδή ο 2 νόμος του Newton.



(a)

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a}_y \rightarrow \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{F}_g = m\vec{a}_y \rightarrow F_{\varepsilon\lambda}\hat{j} - mg\hat{j} = ma_y\hat{j} \quad (9.26)$$

Για  $a_y=0$ , ανελκυστήρας σε ηρεμία

$$F_{\varepsilon\lambda} = w = mg \quad (9.27)$$

b) για  $a = \frac{1}{2}g$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{F}_g &= m\vec{a}_y \rightarrow F_{\varepsilon\lambda}\hat{j} - mg\hat{j} = ma_y\hat{j} \rightarrow \\ F_{\varepsilon\lambda} &= mg + ma_y \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = m\left(g + \frac{1}{2}g\right) = m\frac{3}{2}g \end{aligned}$$

(c)

για  $a_y=g$  και ανελκυστήρα σε κάθοδο,

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a}_y \rightarrow \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{F}_g = m\vec{a}_y \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda}\hat{j} - mg\hat{j} = -ma_y\hat{j}$$

$$F_{\varepsilon\lambda}\hat{j} - mg\hat{j} = -mg\hat{j} \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = mg - mg = 0 \quad (9.28)$$

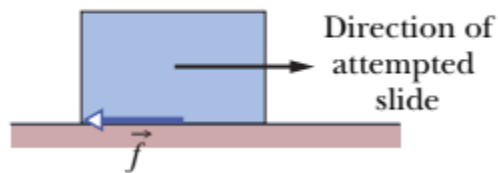
Ή

$$w = F_{\varepsilon\lambda} = 0 \quad (9.29)$$

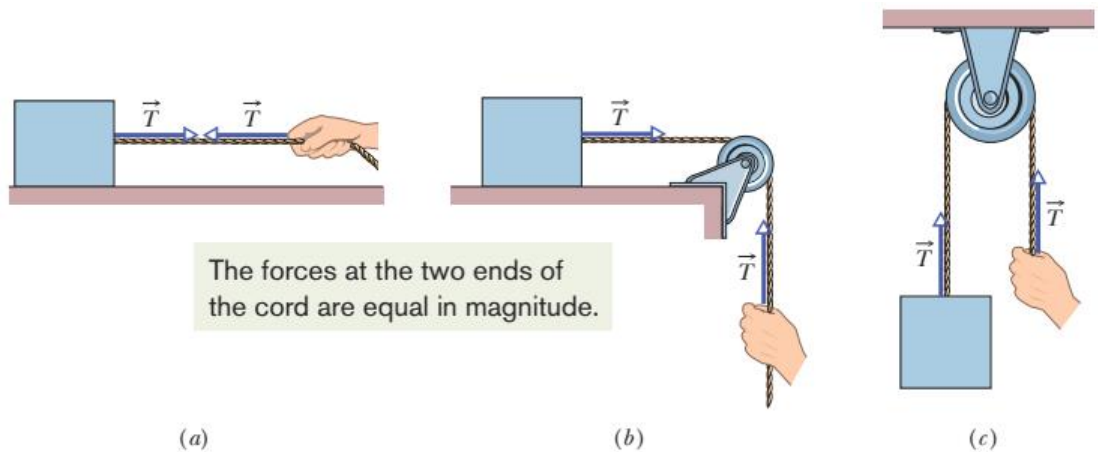
Αν αφήσει ένα αντικείμενο αυτό θα αιωρείται καθώς δάπεδο γυναίκα και μολύβι έχουν την ίδια επιτάχυνση

g. Το φαινόμενο ονομάζεται **φαινόμενη έλλειψη βαρύτητας** επειδή μέσα στο σύστημα αναφοράς της γυναίκας τα αντικείμενα εμφανίζονται να μην έχουν βάρος, παρόλο που η βαρύτητα συνεχίζει να δρά

### iii) ΤΡΙΒΗ



### iv) ΤΑΣΗ



### 3<sup>ος</sup> Νόμος (Δράση – Αντίδραση)

Όταν δύο σώματα αλληλοεπιδρούν, οι δυνάμεις που ασκούν τα σώματα το ένα στο άλλο είναι πάντα ίσες κατά μέτρο και αντίθετες σε κατεύθυνση.

Οι δυνάμεις δράσης – αντίδρασης είναι

A) Της ίδιας φύσης

B) Δρουν σε διαφορετικά σώματα

Γ) Ο φορέας δράσης τους είναι η ευθεία που ενώνει τα δύο σώματα (τα κέντρα μάζας τους)

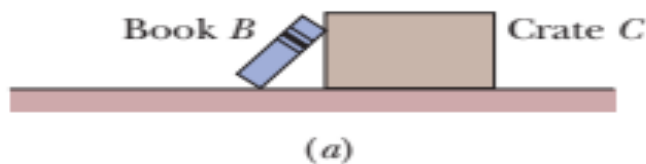
Σύμφωνα με τον 3<sup>ο</sup> νόμο οι δυνάμεις εμφανίζονται κατά ζεύγη.

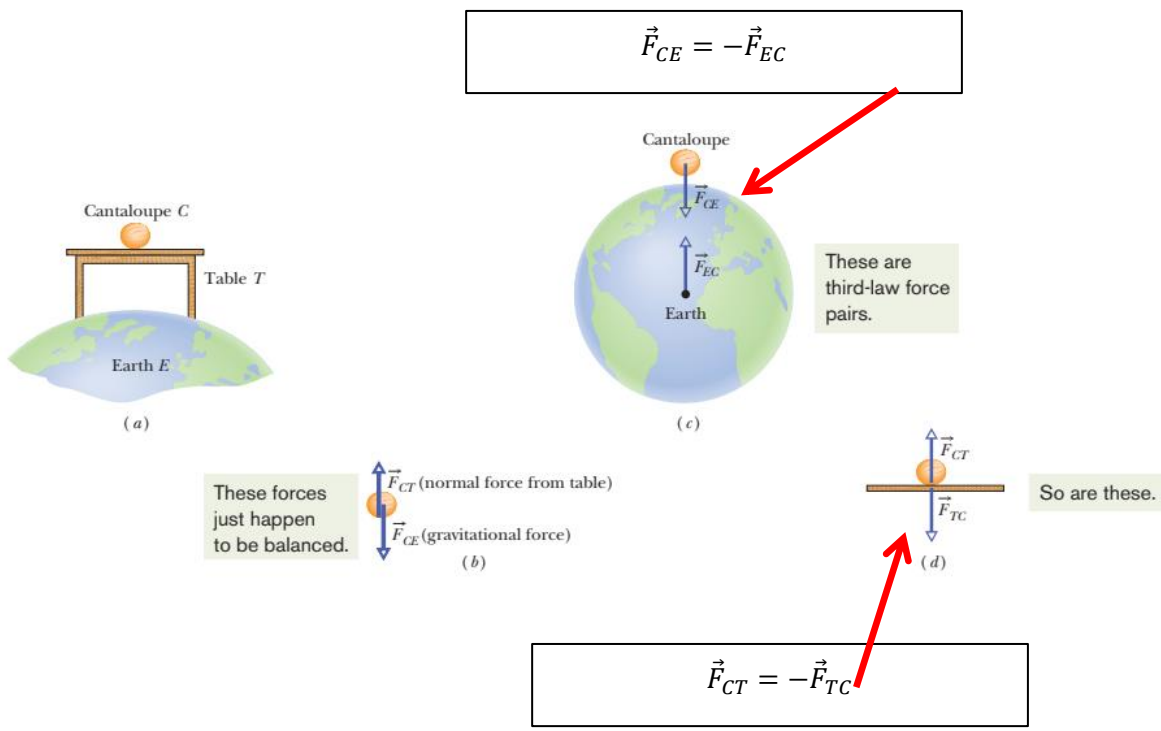
Αν τα σώματα κινούνται ο 3<sup>ο</sup> Νόμος φαίνεται να παραβιάζεται

(Παράδειγμα στον Ηλεκτρομαγνητισμό)

(Παράδειγμα στην σχετικιστική Μηχανική)

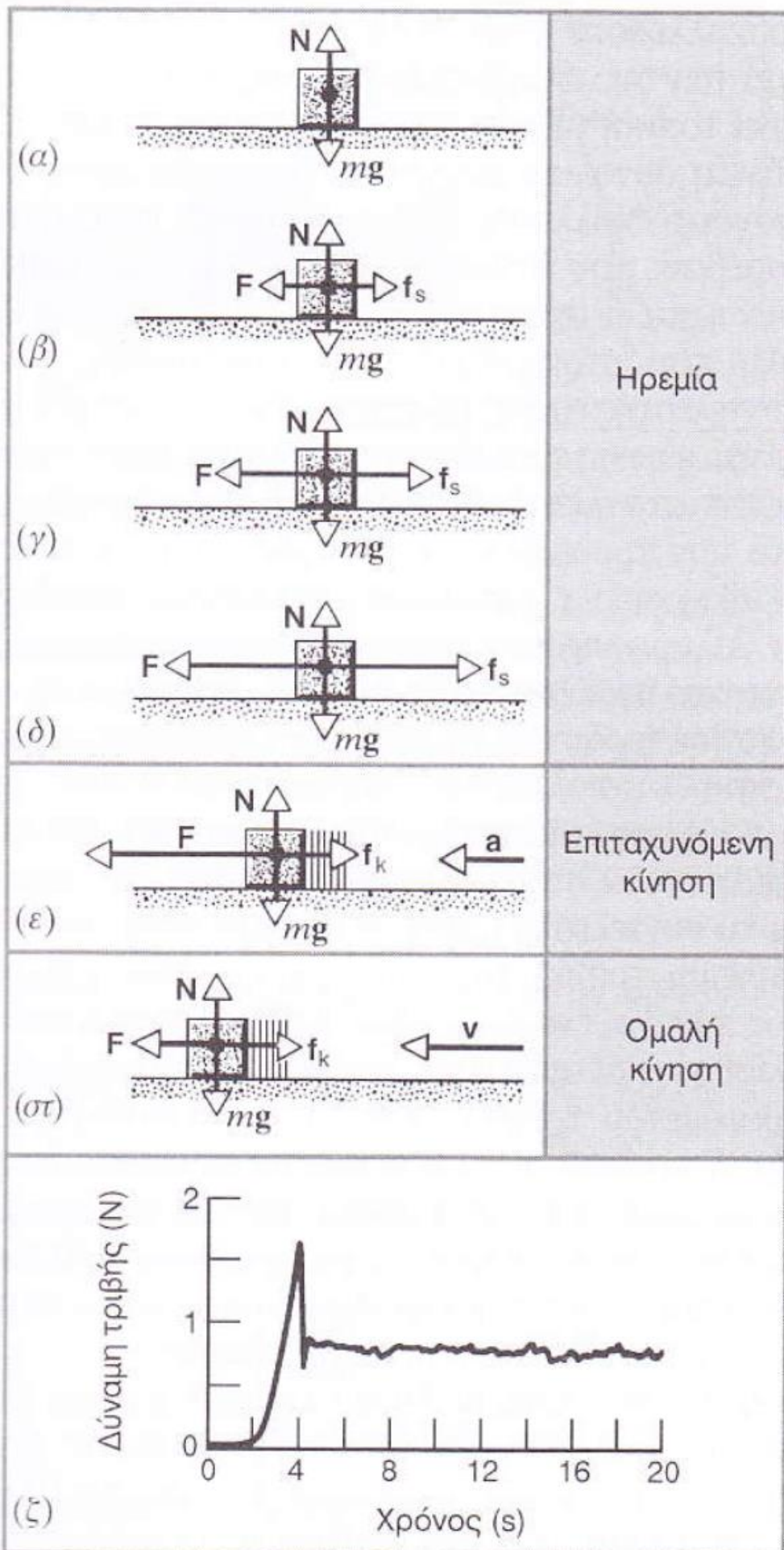
$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB}$$



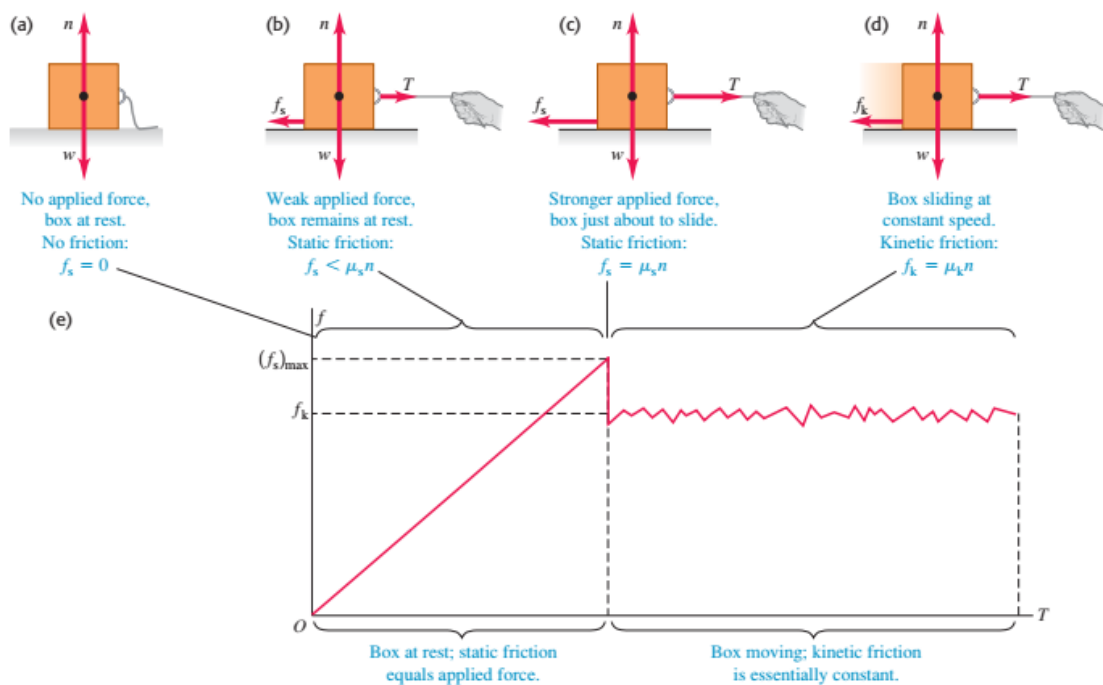




## **10. ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΚΙΝΗΣΗ**







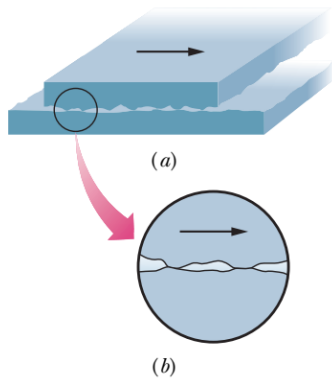
## $\vec{f}_s$ Στατική δύναμη Τριβής

$$f_{s,\max} = \mu_s F_N, \quad (10.1)$$

Ψυχρή συγκόλληση δεν επιτρέπει την κίνηση  
 $\vec{f}_k$  Κινητική δύναμη Τριβής ή Τριβή Ολίσθισης

$$f_k = \mu_k F_N, \quad (10.2)$$





## ΣΥΓΚΟΛΛΗΣΗ – ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΕΝΑΛΛΑΞΕ ΠΑΡΑΓΕΙ ΤΡΙΞΙΜΟ

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1** ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΡΙΒΗΣ<sup>a</sup>

Επιφάνειες	$\mu_s$	$\mu_k$
Ξύλο σε ξύλο	0,25–0,5	0,2
Γυαλί σε γυαλί	0,9–1,0	0,4
Χάλυβας καθαρές επιφάνειες	σε 0,6	χάλυβα, 0,6
Χάλυβας με λίπανση	σε 0,09	χάλυβα, 0,05
Καουτσούκ σε ξηρό μπετόν	1,0	0,8
Κηρωμένο σε ξηρό χιόνι	ξύλινο 0,04	σκι 0,04
Τεφλόν σε Τεφλόν	0,04	0,04

Οι νόμοι για την Τριβή πρωτοδιατυπώθηκαν από τον Leonardo Davinchi 2 αιώνες πριν ο Newton αναπτύξει την έννοια της δύναμης

Η μέγιστη δύναμη στατικής τριβής ανάμεσα σε οποιοδήποτε ζεύγος ξηρών, χωρίς λίπανση, επιφανειών ακολουθεί τους δυο επόμενους εμπειρικούς νόμους. (1) Είναι προσεγγιστικά ανεξάρτητη του εμβαδού επαφής μέσα σε πλατιά όρια και (2) είναι ανάλογη της κάθετης δύναμης\*.

Η δύναμη της κινητικής τριβής  $f_k$  μεταξύ ξηρών, χωρίς λίπανση, επιφανειών ακολουθεί τους ίδιους δυο νόμους με τη στατική τριβή. (1) Αυτή είναι κατά προσέγγιση ανεξάρτητη από το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής μέσα σε πλατιά όρια και (2) είναι ανάλογη της κάθετης δύναμης. Η δύναμη της κινητικής τριβής είναι επίσης λογικά ανεξάρτητη από τη σχετική ταχύτητα με την οποία οι επιφάνειες γλιστρούν μεταξύ τους.

- i) Τριβή **εξωτερική** είναι η τριβή ανάμεσα σε διαφορετικά σώματα
- ii) Τριβή **εσωτερική** είναι η τριβή ανάμεσα σε τμήματα του ίδιου συνεχούς μέσου
- iii) **Ιξώδης τριβή** είναι η τριβή ανάμεσα σε στερεό και ρευστό ή ανάμεσα σε ρευστά

## ΚΙΝΗΣΗ ΣΩΜΑΤΟΣ ΣΕ ΡΕΥΣΤΟ

Αναπτύσσεται δύναμη ΟΠΙΣΘΕΛΚΟΥΣΑΣ  $\vec{D}$  με κατεύθυνση την κατεύθυνση της κίνησης του ρευστού ως προς το σώμα. Όταν ισχύουν οι προϋποθέσεις

A) Ρευστό : αέρας

B) Σώμα : Αμβλύ

Γ) Μεγάλη σχετική ταχύτητα – Τυρβώδης ροή

$$D = \frac{1}{2} C \rho A v^2, \quad (10.3)$$

Όπου ,

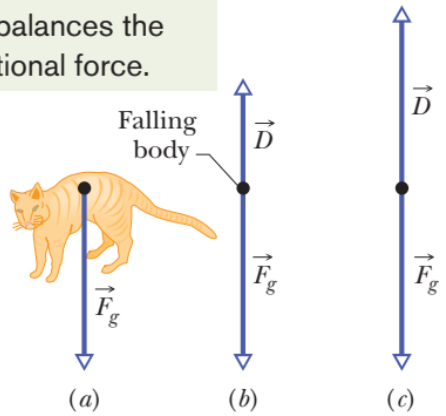
C συνελεστής οπισθέλκουσας από 0.4 – 1  
ρ είναι η πυκνότητα

A η ενεργός επιφάνεια διατομής του σώματος (Η κάθετη επιφάνεια στην ταχύτητα v)



**Fig. 6-5** This skier crouches in an “egg position” so as to minimize her effective cross-sectional area and thus minimize the air drag acting on her. (Karl-Josef Hildenbrand/dpa/Landov LLC)

As the cat's speed increases, the upward drag force increases until it balances the gravitational force.



Το σώμα μας είναι επιταχυνσιόμετρο

$$D - F_g = ma, \tag{10.4}$$

Για  $\alpha=0$

$$\frac{1}{2}C\rho Av_t^2 - F_g = 0, \quad (10.5)$$

$v_t$  η οριακή ταχύτητα

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho A}}$$



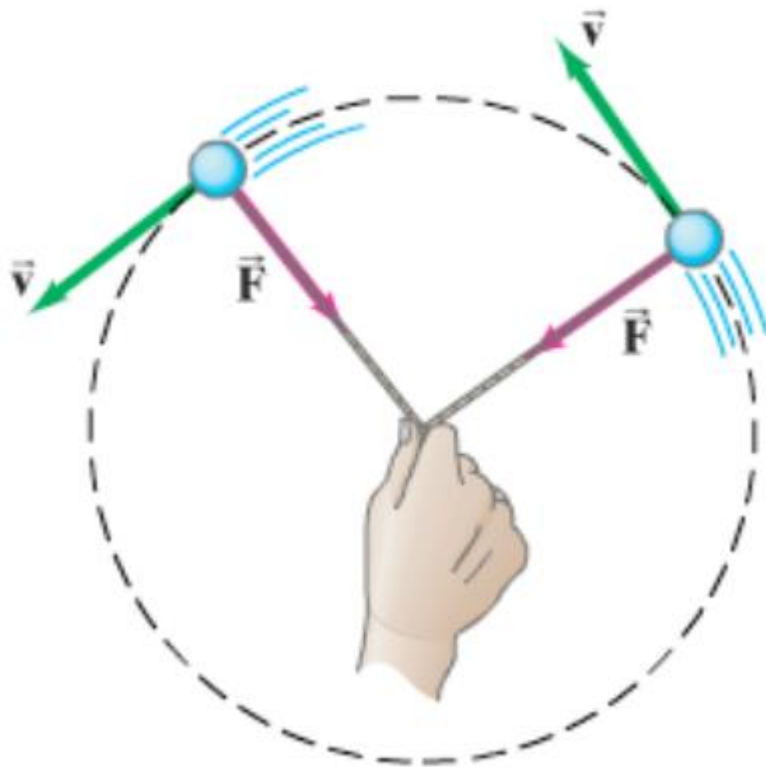
**Fig. 6-7** Sky divers in a horizontal “spread eagle” maximize air drag. (*Steve Fitchett/Taxi/Getty Images*)

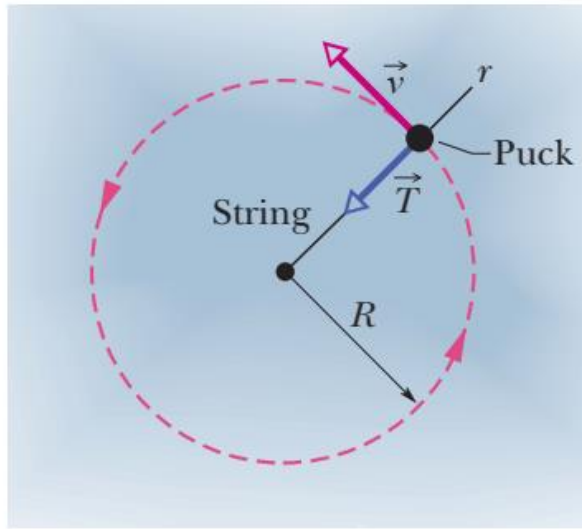
## ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

$$\text{Κεντρομόλος επιτάχυνση } a = \frac{v^2}{R} \quad (10.5)$$

$$\text{Κεντρομόλος Δύναμη } F = ma = \frac{mv^2}{R} \quad (10.6)$$

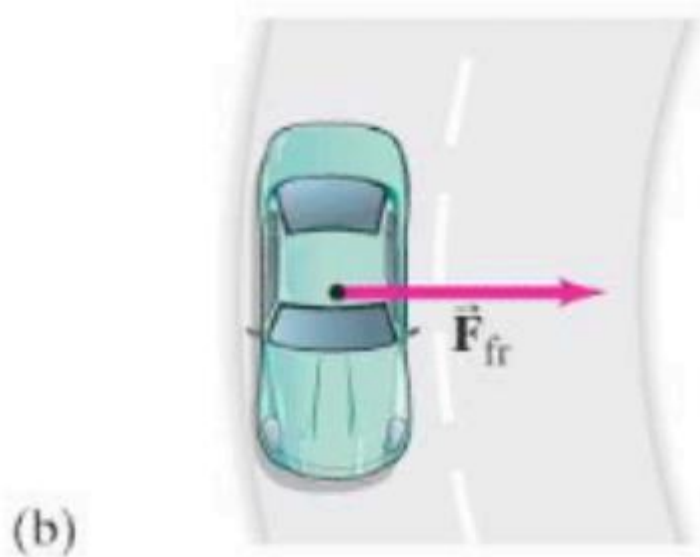
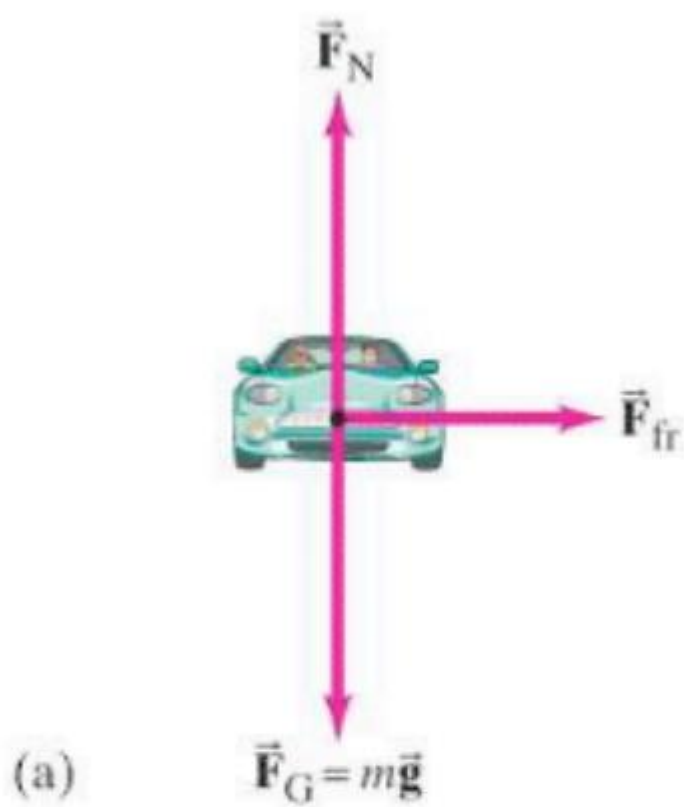
$$F = m\omega^2 R \quad (10.6.1)$$





The puck moves in uniform circular motion only because of a toward-the-center force.

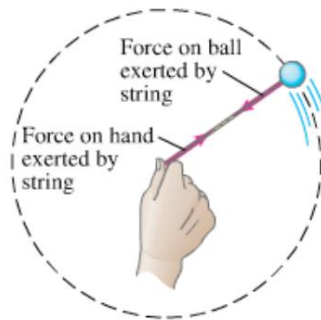
**FIGURE 5–13** Example 5–6. Forces on a car rounding a curve on a flat road. (a) Front view, (b) top view.





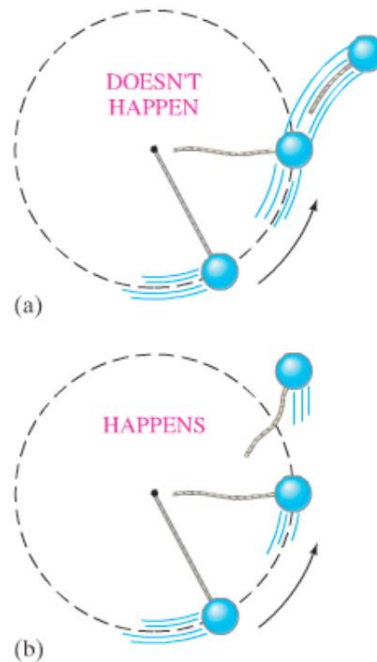
# ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΟΣ = ΛΑΘΟΣ!!!!

**CAUTION**  
*There is no real "centrifugal force"*



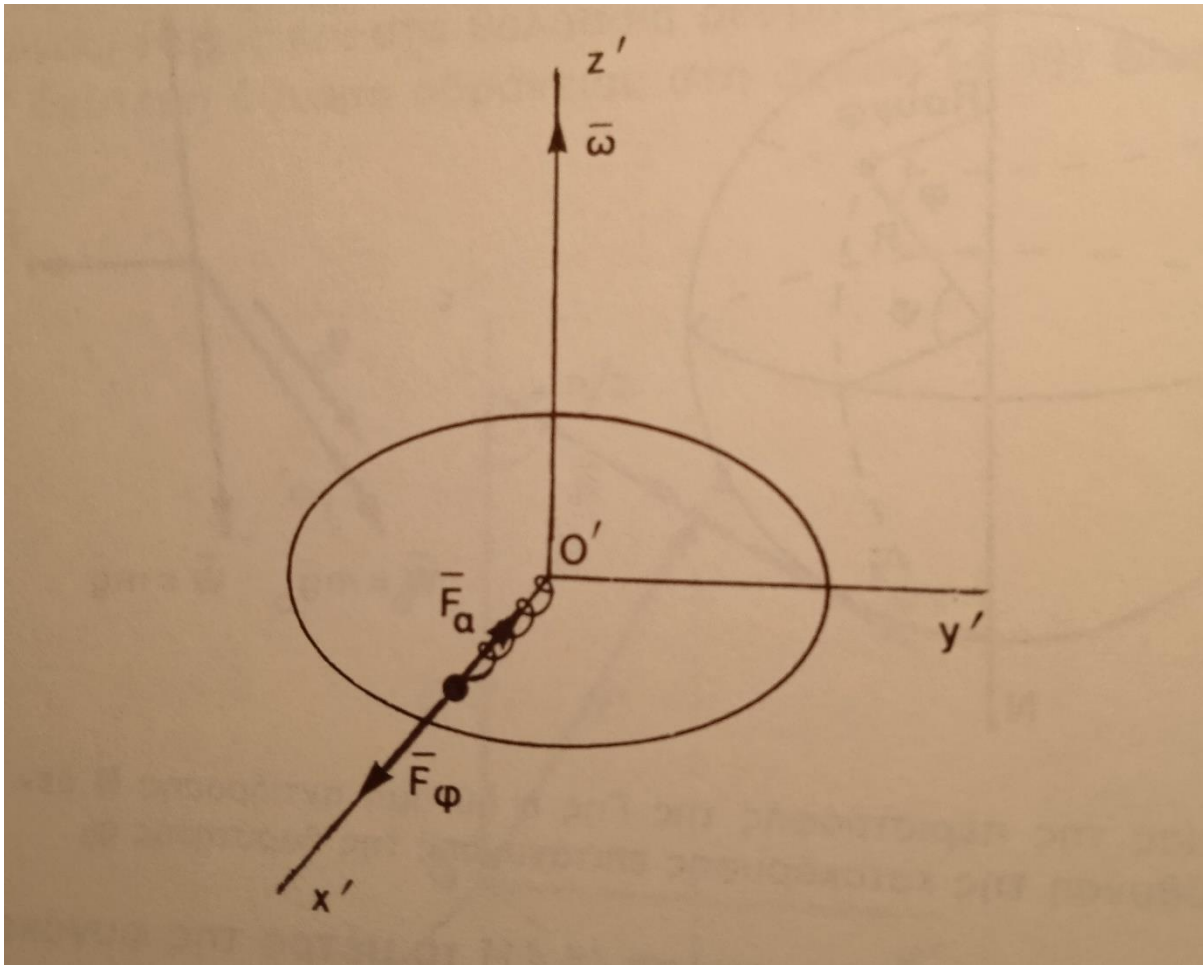
**FIGURE 5-5** Swinging a ball on the end of a string.

**FIGURE 5-6** If centrifugal force existed, the revolving ball would fly outward as in (a) when released. In fact, it flies off tangentially as in (b). For example, in (c) sparks fly in straight lines tangentially from the edge of a rotating grinding wheel.



Η φυγόκεντρος δύναμη είναι αδρανειακή δύναμη δηλαδή υποθετική. Υπάρχει μόνο για τον περιστρεφόμενο (μη αδρανειακό παρατηρητή)





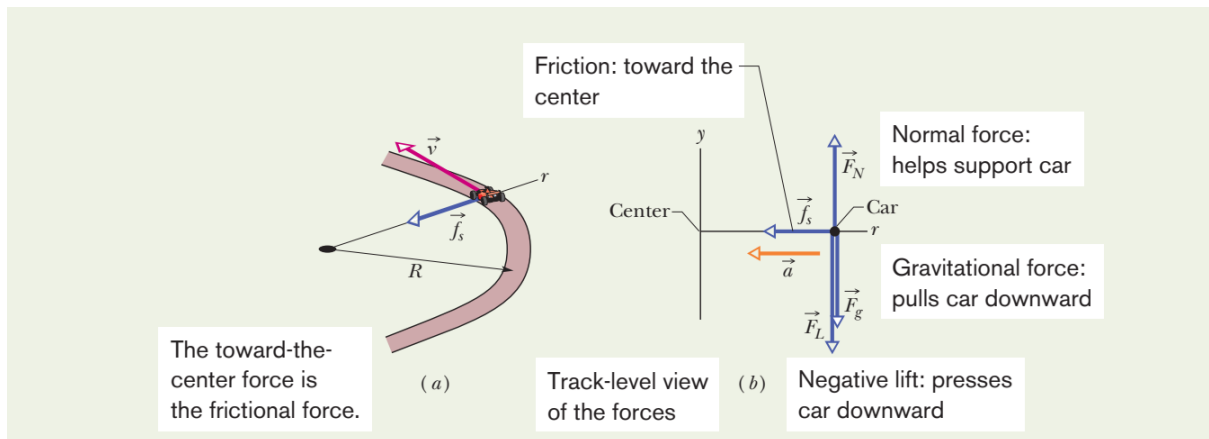
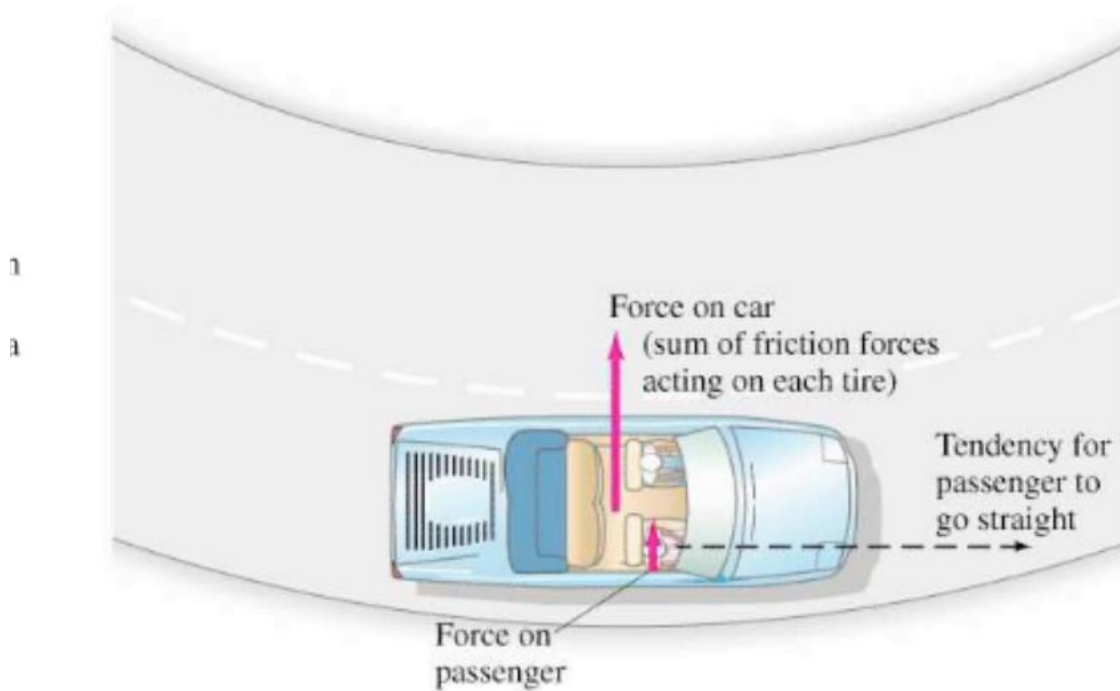
Περιστρεφόμενος παρατηρητής (μη αδρανειακός) στο κέντρο του δίσκου διαπιστώνει ισορροπία σφαίρας ως προς αυτόν. Το ερμηνεύει λέγοντας πως πάνω στη σφαίρα δεν ενεργεί καμία δύναμη. Λόγω της παραμόρφωσης του ελατηρίου ο μη αδρανειακός παρατηρητής οδηγείται στο συμπέρασμα ότι η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν. Εχουμε

Παρατήρηση στον αδρανειακό σύστημα= Παρατήρηση στο μη αδρανειακό+μετοχική επιτάχυνση

$$\begin{aligned} \vec{F}_a &= \vec{F}_{\mu\alpha} + m\vec{a}_\varphi \rightarrow \vec{F}_{\mu\alpha} = \vec{F}_a + \vec{F}_\varphi = 0 \rightarrow -F_a\hat{j} + \vec{F}_\varphi = 0 \\ &\rightarrow \vec{F}_\varphi = F_a\hat{j} \rightarrow \vec{F}_\varphi = m\omega^2 R \end{aligned}$$

$$F_\varphi = m\omega^2 R$$

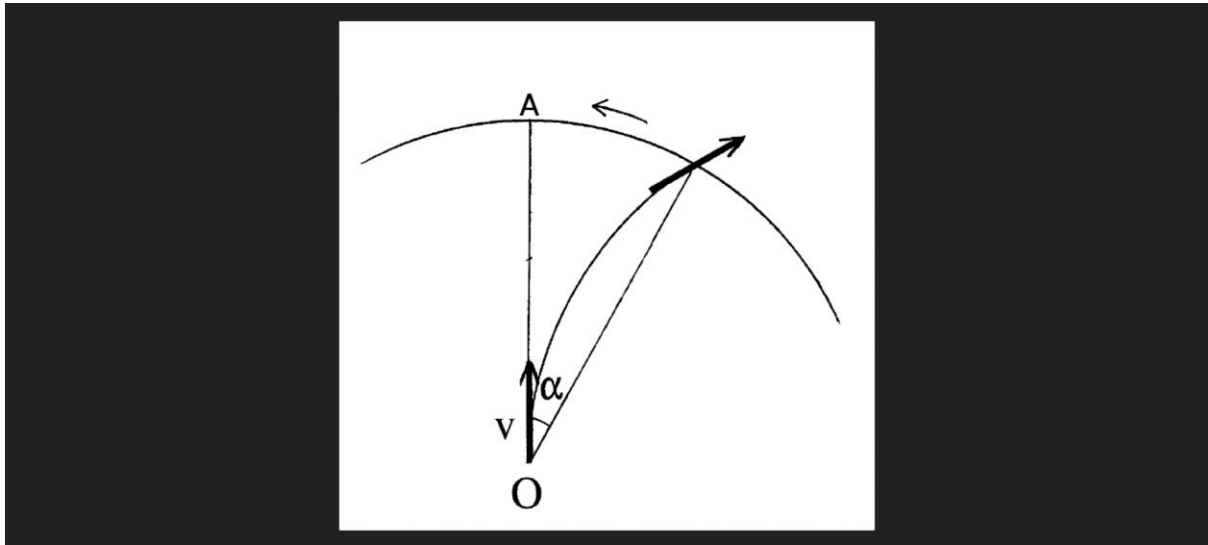
Υπάρχει κεντρομόλος για τον μη αδρανειακό παρατηρητή;



**Η φυγόκεντρος δύναμη είναι το αποτέλεσμα της αδράνειας**

## Η δύναμη Coriolis

Στα σώματα που κινούνται σε σχέση με περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς, εκτός της φυγοκέντρου δύναμης, εμφανίζεται και η **δύναμη Coriolis**



## 11. ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΕΡΓΟ

### ΕΝΕΡΓΕΙΑ????????????????????

$$\text{πλήθος παρατηρηθέντων κύβων} + \frac{\text{τωρινό βάρος κουτιού} - 500 \text{ γραμμάρια}}{70 \text{ γραμμάρια}} = \text{σταθ.}$$

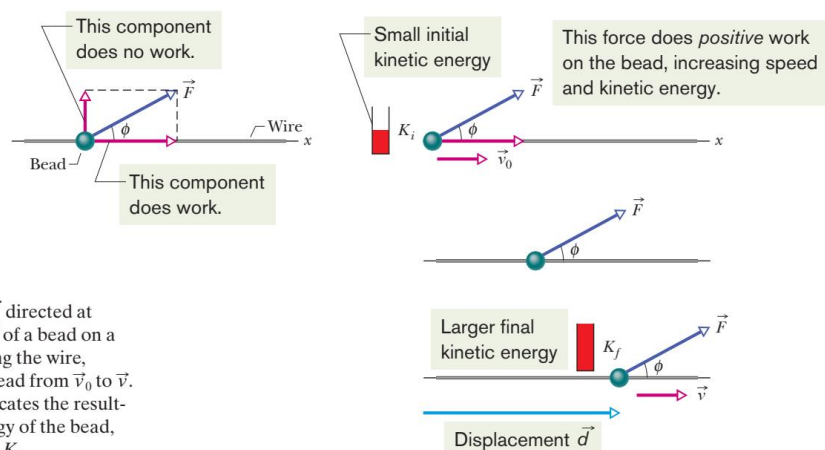
$$\begin{aligned}
 &\text{πλήθος παρατηρηθέντων κύβων} + \frac{\text{τωρινό βάρος κουτιού} - 500 \text{ γραμμάρια}}{70 \text{ γραμμάρια}} \\
 &+ \frac{\text{στάθμη νερού} - 20 \text{ εκατοστά}}{0.6 \text{ εκατοστά}} = \text{σταθ.}
 \end{aligned}$$

**Δεν υπάρχουν κυβάρια!!!**

**Υπάρχουν πολλές μορφές ενέργειας**

**Αλλά μόνο 2 είδη ενέργειας (Κινητική – Δυναμική)**

**Μεταφέρεται με πολλούς τρόπους (ένας από αυτούς είναι το έργο)**



**Fig. 7-2** A constant force  $\vec{F}$  directed at angle  $\phi$  to the displacement  $\vec{d}$  of a bead on a wire accelerates the bead along the wire, changing the velocity of the bead from  $\vec{v}_0$  to  $\vec{v}$ . A “kinetic energy gauge” indicates the resulting change in the kinetic energy of the bead, from the value  $K_i$  to the value  $K_f$ .

## Κινητική Ενέργεια

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{kinetic energy}).$$

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

Έργο  $W$  είναι η ενέργεια που μεταφέρεται από ή προς ένα σώμα μέσω της δύναμης που δρα στο σώμα. Όταν η ενέργεια μεταφέρεται στο σώμα το έργο είναι θετικό, και όταν η ενέργεια μεταφέρεται από το σώμα είναι αρνητικό έργο

$$F_x = ma_x, \quad (11.1)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d. \quad (11.2)$$

(11.3)

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x d. \quad (11.4)$$

$$W = F_x d. \quad (11.5)$$

$$W = Fd \cos \phi \quad (11.6)$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (11.7)$$

Μία δύναμη εκτελεί θετικό έργο όταν έχει διανυσματική συνιστώσα στην ίδια κατεύθυνση με την μετατόπιση, και εκτελεί αρνητικό έργο όταν έχει διανυσματική συνιστώσα στην αντίθετη διεύθυνση. Παράγει μηδενικό έργο όταν είναι κάθετη στην μετατόπιση

(11.8)

## ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΡΓΟΥ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$\Delta K = K_f - K_i = W, \quad (11.9)$$

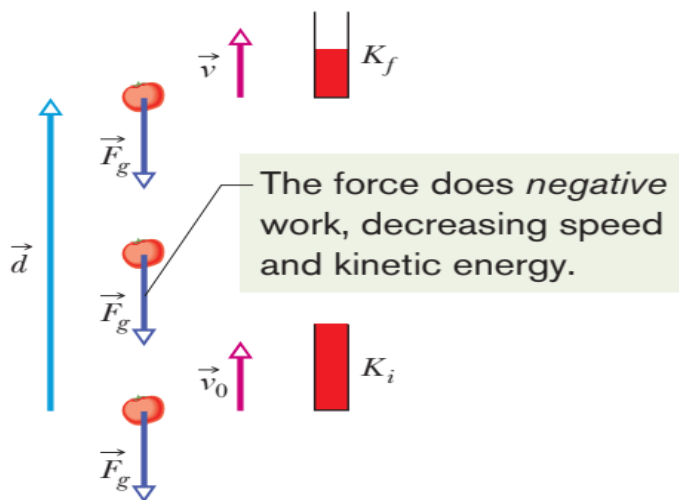
Μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σωματιδίου = ολικό έργο που εκτελείται στο σωματίδιο

$$K_f = K_i + W, \quad (11.10)$$

Κινητική Ενέργεια μετά την εκτέλεση του ολικού έργου = Κινητική ενέργεια πριν το ολικό έργο + το ολικό έργο που έχει εκτελεσθεί

Είναι το ίδιο το έργο και η Κινητική ενέργεια σε διάφορα συστήματα αναφοράς;

## Έργο Βαρυτικής Δύναμης



Κατά την άνοδο

$$W = \vec{F}_g \vec{d} = -F_g \hat{j} d \hat{j} = -F_g d = -mgd \quad (11.11)$$

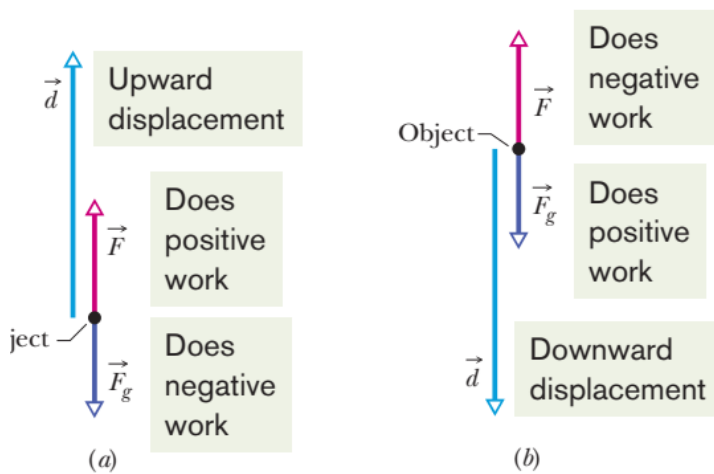
ἢ

$$W = \vec{F}_g \vec{d} = F_g d \cos \varphi = F_g d \cos(180^\circ) = -F_g d = -mgd \quad (11.12)$$

Κατά την πτώση

$$W = \vec{F}_g \vec{d} = F_g d \cos \varphi = F_g d \cos(0^\circ) = F_g d = mgd \quad (11.13)$$

## Έργο που εκτελείται κατά την ανύψωση και κάθοδο αντικειμένου



$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_g,$$

(11.14)

Για  $K_i = K_f = 0$  αλλά και όταν  $K_i = K_f$  ισχύει

$$W_a + W_g = 0$$

$$W_a = -W_g.$$

(11.15)

$$W_a = -mgd \cos \phi$$

(11.16)

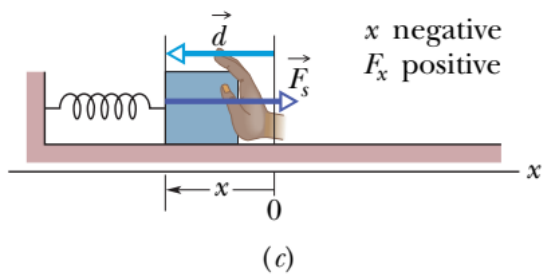
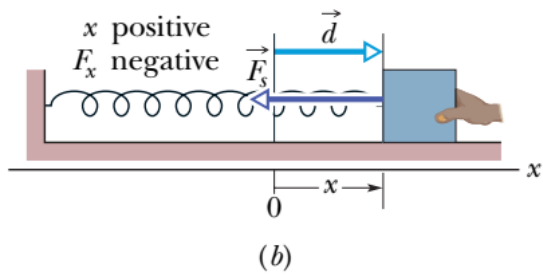
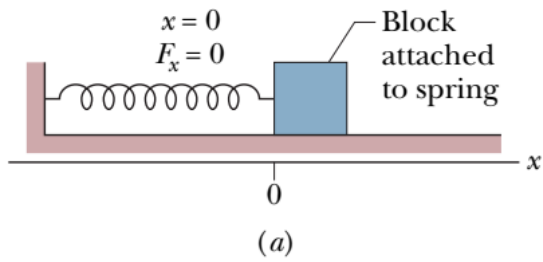
## Δύναμη Ελατηρίου – Νόμος του Hooke

$$\vec{d} = -\frac{\vec{F}}{k} \quad (11.17)$$

$$\vec{F} = -k\vec{d} \quad (11.18)$$

$$F_x = -kx \quad (\text{Hooke's law}),$$

(11.19)



**Έργο που εκτελείται από Δύναμη Ελατηρίου**

$$W_s = \sum -F_{xj} \Delta x, \quad (11.20)$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -F_x dx. \quad (11.21)$$

$$\begin{aligned} W_s &= \int_{x_i}^{x_f} -kx dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx \\ &= \left(-\frac{1}{2}k\right)[x^2]_{x_i}^{x_f} = \left(-\frac{1}{2}k\right)(x_f^2 - x_i^2). \end{aligned}$$

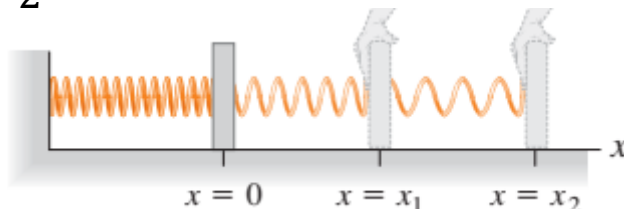


$$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

(11.22)

Εστω ότι  $x_i = x_1$  και  $x_f = x_2$

$$W_s = \frac{1}{2}k[(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)] \quad (11.23)$$



- i) Εάν  $x_1 > x_2$  δηλαδή το σώμα πλησιάζει την θέση ισοροπίας ( $x=0$ ), το  $W_s > 0$
- ii) Εάν  $x_1 < x_2$  δηλαδή το σώμα απομακρύνεται από την θέση ισοροπίας ( $x=0$ ), το  $W_s < 0$
- iii) Για  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = x$ ,

$$W_s = -\frac{1}{2}kx^2$$

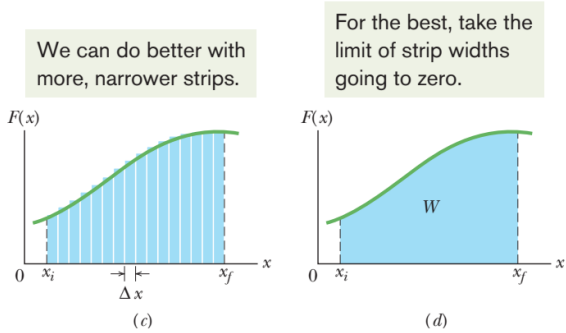
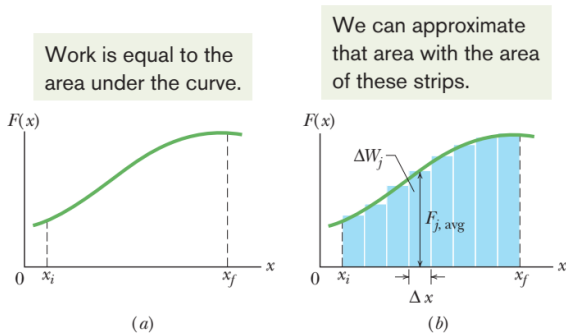
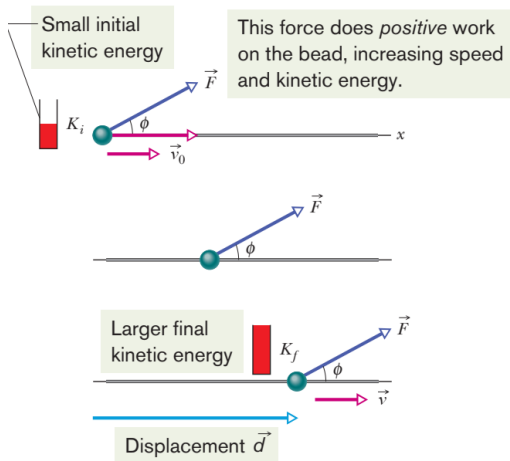
**Έργο που εκτελείται από Ασκούμενη Δύναμη,  $W_a$**

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_s, \quad (11.24)$$

Εάν πριν και μετά το σώμα είναι ακίνητο

$$W_a = -W_s. \quad (11.25)$$

# Έργο μεταβλητής Δύναμης



$$\Delta W_j = F_{j,\text{avg}} \Delta x. \quad (11.26)$$

$$W = \sum \Delta W_j = \sum F_{j,\text{avg}} \Delta x. \quad (11.27)$$

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum F_{j,\text{avg}} \Delta x. \quad (11.28)$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

(11.29)

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k},$$

(11.30)

$$d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}.$$

(11.31)

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

(11.32)

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz.$$

(11.33)

### Θεώρημα Κινητικής Ενέργειας – Έργου μεταβλητής Δύναμης

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} ma dx,$$

(11.34)

$$ma dx = m \frac{dv}{dt} dx.$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v,$$

$$ma dx = m \frac{dv}{dx} v dx = mv dv.$$

(11.35)

$$W = \int_{v_i}^{v_f} mv \, dv = m \int_{v_i}^{v_f} v \, dv \quad (11.36)$$

$$= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2.$$

$$W = K_f - K_i = \Delta K, \quad (11.37)$$

$$K_f = K_i - W$$

## 12. ΙΣΧΥΣ

Ένα σύστημα που παράγει έργο περιέχει ενέργεια που μπορεί να αποδώσει με τον χρόνο.

$$P_{\text{avg}} = \frac{W}{\Delta t} \quad (12.1)$$

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (12.2)$$

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 0.738 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

$$1 \text{ horsepower} = 1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 746 \text{ W}.$$

$$1 \text{ kilowatt-hour} = 1 \text{ kW} \cdot \text{h} = (10^3 \text{ W})(3600 \text{ s})$$

$$= 3.60 \times 10^6 \text{ J} = 3.60 \text{ MJ}.$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cos \phi dx}{dt} = F \cos \phi \left( \frac{dx}{dt} \right),$$

$$P = Fv \cos \phi.$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

(12.3)

### 13. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Τεχνικά η Δυναμική ενέργεια  $U$  είναι το είδος της ενέργειας που συνδέεται με την διαμόρφωση (διάταξη) ενός συστήματος σωμάτων τα οποία εξασκούν δυνάμεις το ένα στο άλλο.

Σαν **πεδίο δυνάμεων** ορίζουμε ένα χώρο που είναι προικισμένος με την ιδιότητα να ασκεί δυνάμεις σε σώματα. Αυτός ο χώρος λέγεται πεδίο δυνάμεων. Το πεδίο ονομάζεται στατικό όταν η μορφή του παραμένει αμετάβλητη με τον χρόνο διαφορετικά ονομάζεται μη στατικό. Οι ιδιότητες του πεδίου περιγράφονται από μία συνάρτηση του χώρου για στατικά πεδία και του χρόνου για μη στατικά πεδία που ονομάζεται **δυναμικό**.

Όταν ένα σώμα βρεθεί σε πεδίο δυνάμεων τότε μπορεί να δεχθεί δυνάμεις και λέμε ότι έχει Δυναμική ενέργεια



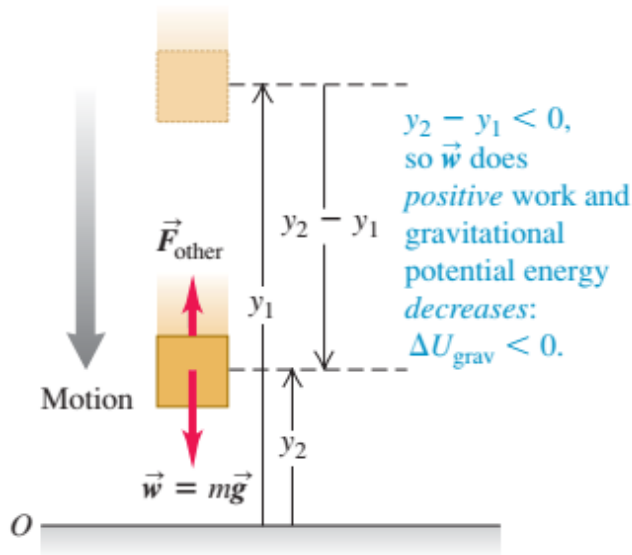
$$\Delta U = U_f - U_i = -W \rightarrow$$

$$U_f = U_i - W \quad (13.1)$$

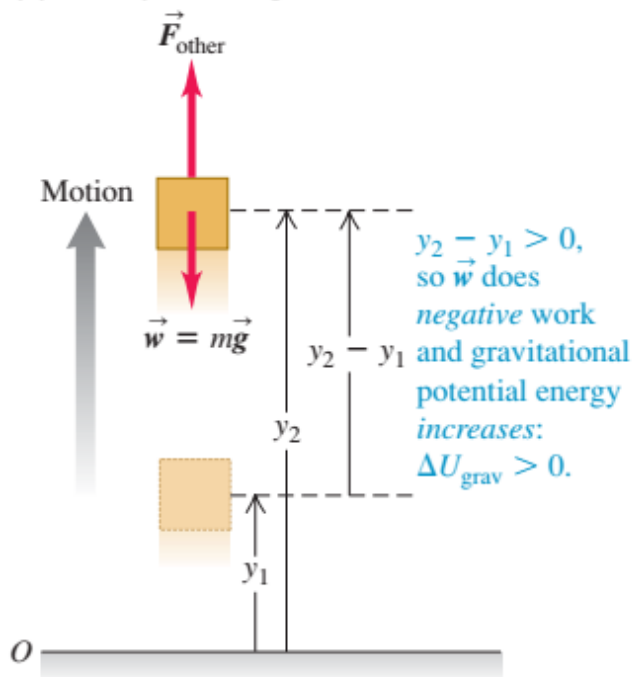
Εάν το έργο της δύναμης είναι θετικό  $W > 0$   
Τότε η δυναμική ενέργεια ελαττώνεται

Εάν το έργο της δύναμης είναι αρνητικό  
 $W < 0$  τότε η δυναμική ενέργεια αυξάνεται

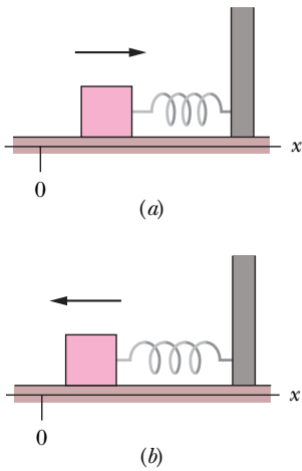
$$\Delta U = -W = -[\vec{w}\Delta\vec{y}] = -[-mg\hat{j}(\vec{y}_2 - \vec{y}_1)] \rightarrow \Delta U = -[-mg\hat{j}(y_2 - y_1)] = mg(y_2 - y_1) < 0$$



(b) A body moves upward



$$\Delta U = -W.$$



## Συντηρητικές και μη Συντηρητικές δυνάμεις

- Το σύστημα αποτελείται από δύο ή περισσότερα σώματα
- Μία δύναμη δρα ανάμεσα στο σώμα και στο υπόλοιπο σύστημα
- Όταν η διάταξη του συστήματος μεταβάλλεται η δύναμη εκτελεί έργο  $W_1$  πάνω στο αντικείμενο (σωματίδιο), μεταφέροντας ποσά ενέργειας ανάμεσα στην κινητική ενέργεια  $K$  του αντικειμένου και σε κάποιο άλλο είδος ενέργειας του συστήματος.
- Όταν η διάταξη του συστήματος αντιστρέφεται, η κατεύθυνση της ενέργειας μεταφοράς, επίσης αντιστρέφεται, εκτελώντας κατά την διάρκεια της διαδικασίας αυτής έργο  $W_2$ .
- Όταν  $W_1 = -W_2$  το άλλο είδος ενέργειας που συμμετέχει στις μεταβολές είναι η Δυναμική ενέργεια και λέμε ότι η δύναμη είναι Συντηρητική
- Η βαρυτική δύναμη και η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητικές δυνάμεις



## Όλες

- οι κεντρικές δυνάμεις είναι συντηρητικές
- Το συνολικό έργο που εκτελείται από μία συντηρητική δύναμη σε ένα σωματίδιο κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι μηδέν
- Το έργο που εκτελείται από μία συντηρητική δύναμη σε ένα σωματίδιο που κινείται σε δύο σημεία δεν εξαρτάται από την τροχιά που ακολουθεί το σωματίδιο
- Το έργο που παράγεται από μία συντηρητική δύναμη είναι ανακτήσιμο δηλαδή εάν προσδίδεται θετικό έργο από ένα σώμα σε κάποιο άλλο σώμα σε ένα τμήμα μια κλειστής διαδρομής, μία ίση ποσότητα αρνητικού έργου αποδίδεται από το σώμα στην επιστροφή
- Οι συντηρητικές δυνάμεις προέρχονται από μία κατηγορία πεδίων τα συντηρητικά πεδία

## Μη συντηρητικές Δυνάμεις

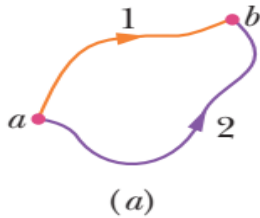
### Τριβή

### Οπισθέλκουσα

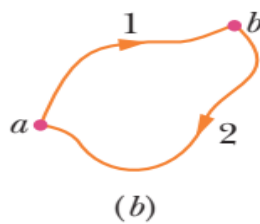
Κινητική ---→ Θερμική----?????? Κινητική

Θερμική ενέργεια ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ Δυναμική ενέργεια

Έστω ότι η δύναμη είναι συντηρητική



The force is conservative.  
Any choice of path between  
the points gives the same  
amount of work.



And a round trip gives  
a total work of zero.

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}, \quad (13.2)$$

Απόδειξη

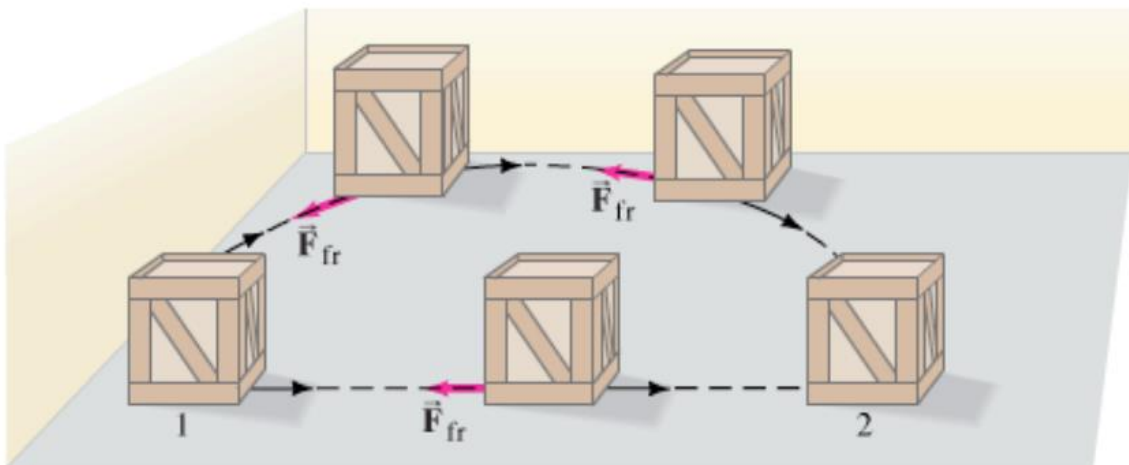
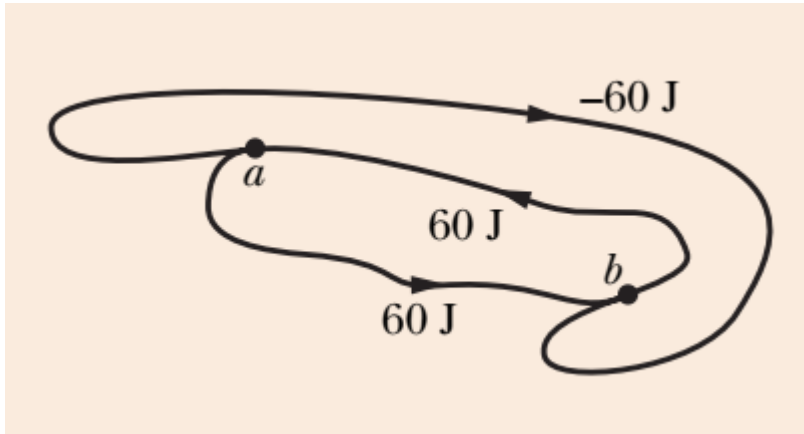
$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0,$$

$$W_{ab,1} = -W_{ba,2}. \quad (13.3)$$

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2}. \quad (13.4)$$

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}, \quad (13.5)$$

**Ερώτημα** Είναι συντηρητικές οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ;



$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx.$$

(13.6)

$$\Delta U = - \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx.$$

(13.7)

## ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

$$\Delta U = - \int_{y_i}^{y_f} (-mg) dy = mg \int_{y_i}^{y_f} dy = mg \left[ y \right]_{y_i}^{y_f},$$

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg \Delta y.$$

$$U - U_i = mg(y - y_i). \quad (13.8)$$

$$U(y) = mgy \quad (13.9)$$

## ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

$$\Delta U = - \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = k \int_{x_i}^{x_f} x dx = \frac{1}{2}k \left[ x^2 \right]_{x_i}^{x_f},$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2. \quad (13.10)$$

Εάν για  $x_i=0$ ,  $U_i=0$  και  $U_f=U$  τότε

$$U - 0 = \frac{1}{2}kx^2 - 0,$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

(13.11)

## 14.ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Για συντηρητικές δυνάμεις και για απομονωμένο σύστημα ισχύει

$$E_{\text{mec}} = K + U$$

(14.1)

$$\Delta K = W$$

(14.2)

$$\Delta U = -W.$$

(14.3)

$$\Delta K = -\Delta U.$$

(14.4)

**Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας**

$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U = 0.$$

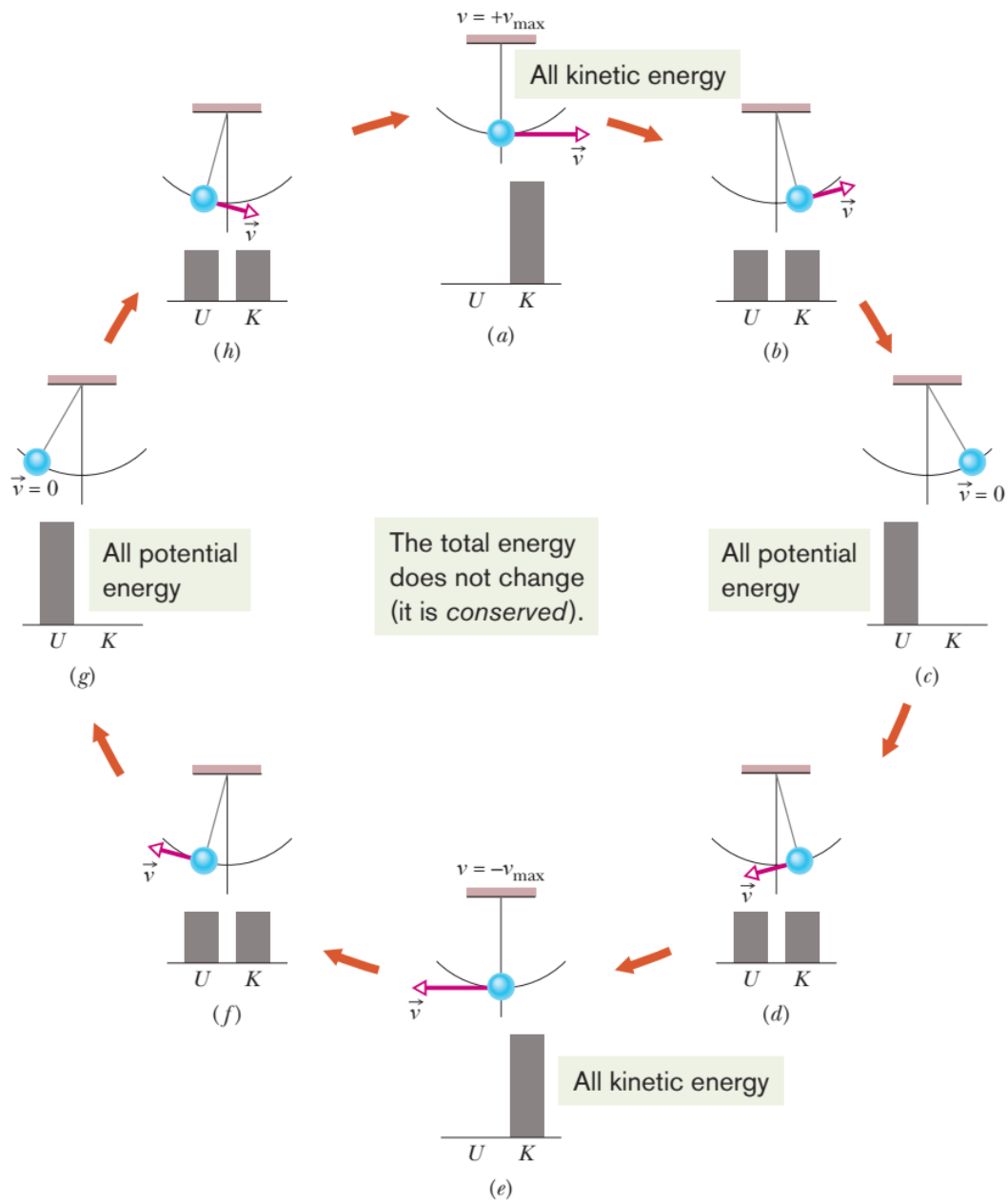
(14.5)

Αν παράγουν έργο μόνο οι συντηρητικές δυνάμεις τότε η μηχανική ενέργεια ενός συστήματος διατηρείται

$$K_2 - K_1 = -(U_2 - U_1),$$

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1$$

(14.6)



## 14. Καμπύλη Δυναμικής Ενέργειας

$$\Delta U(x) = -W = -F(x) \Delta x. \quad (15.1)$$

ή

$$\Delta U(x) = -F \Delta x \rightarrow F = -\frac{\Delta U(x)}{\Delta x}$$

Και για απειροστές μεταβολές

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (15.2)$$

$$F = -\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} kx^2 \right) = -\frac{1}{2} 2kx = -kx \text{ (Νόμος του Hooke)}$$

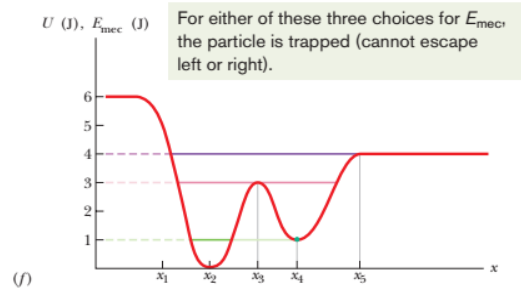
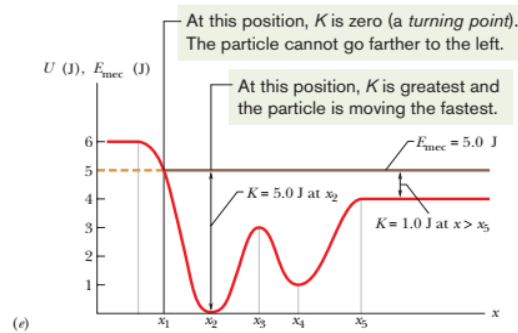
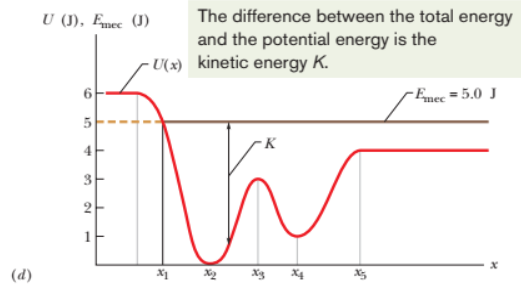
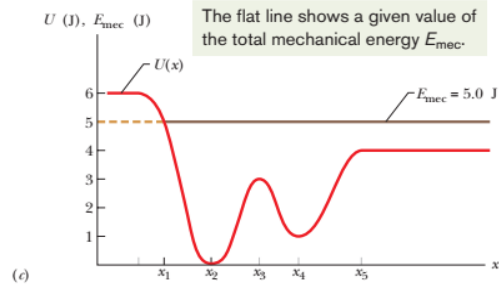
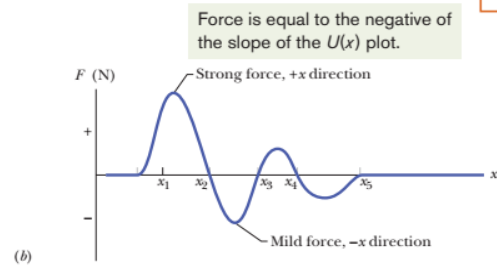
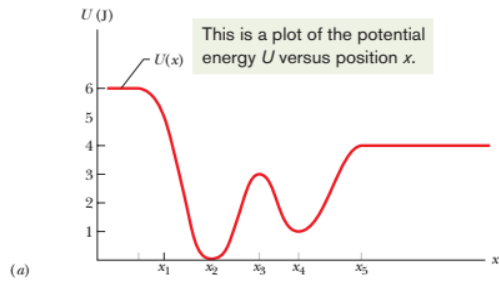
**Καμπύλες – Διαγράμματα Μηχανικής ενέργειας  $E=E(x)$**

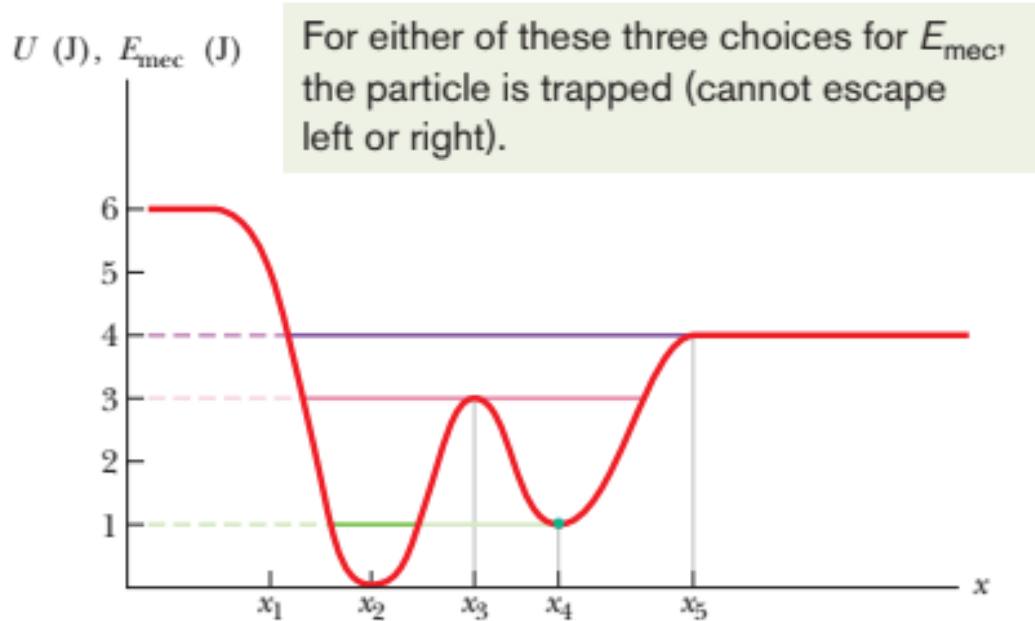
$$U(x) + K(x) = E_{\text{mec}}.$$

$$K(x) = E_{\text{mec}} - U(x). \quad (15.3)$$

**Ελέγγω αν η 15.3 παίρνει αρνητικές τιμές.**







A)  $E_{mec}=4J$  **Σημεία Αναστροφής**  $K=0$ ,  $U=E$ ,  $dU/dx < 0$  κίνηση στα δεξιά

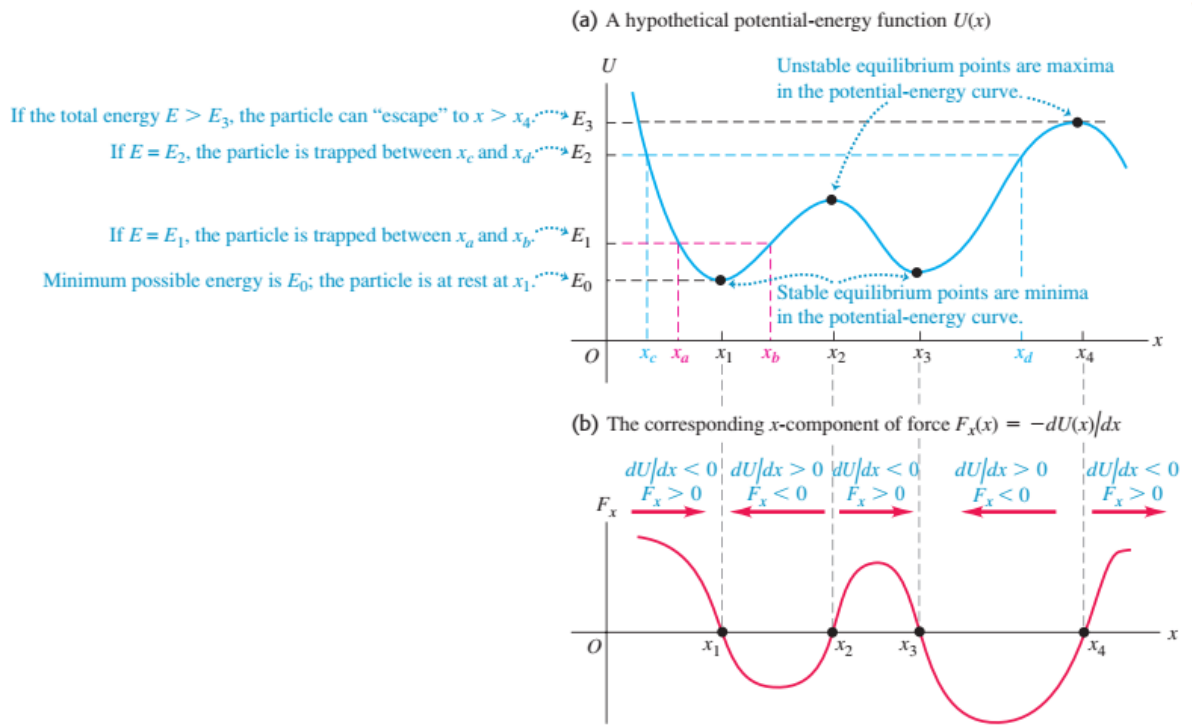
$E_{mec}=3J$  **Σημεία Αναστροφής**  $K=0$ ,  $U=E$ ,  $dU/dx < 0$  κίνηση στα δεξιά ή  $dU/dx > 0$  κίνηση στα αριστερά

B)  $E_{mec}=4J$  **Κατάσταση αδιάφορης ισορροπίας**,  $K=0$ ,  $U=E$ ,  $dU/dx=0$  δεξιά και αριστερά (Ισορροπεί)

Γ)  $E_{mec}=3J$  **Κατάσταση ασταθούς ισορροπίας**  $K=0$ ,  $U=E$ ,  $dU/dx > 0$  αριστερά και  $dU/dx < 0$  δεξιά ή  $U'(x_3)=0$  και  $U''(x_3) < 0$

Δ)  $E_{mec}=1J$  **Κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας**  $U=0$ ,  $dU/dx < 0$  αριστερά και  $dU/dx > 0$  δεξιά ή  $U'(x_2)=0$  και  $U''(x_2) > 0$

Εάν  $E_{mec}=3J$  η περιοχή  $x_2 < x < x_4$  θεωρείται ως ένα **φράγμα δυναμικού** ενώ η περιοχή  $x_3 < x < x_5$  ως ένα **φρέαρ (πηγάδι δυναμικού)**



15.

Έργο που εκτελείται από

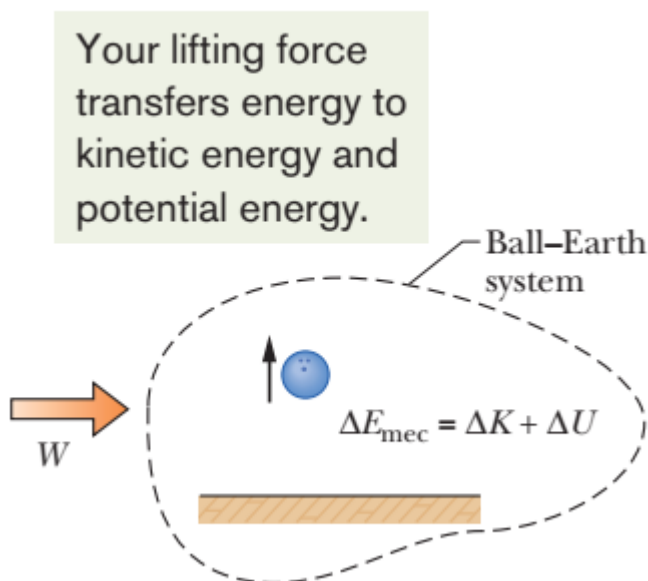
## εξωτερική δύναμη σε σύστημα

- i) Η εξωτερική δύναμη μεταβάλλει μόνο την κινητική ενέργεια σε ένα σώμα ( $\Delta K = W$ )
- ii) Η εξωτερική δύναμη μπορεί να μεταβάλει και την δυναμική ενέργεια σε ένα σύστημα σωμάτων

### Χωρίς Τριβή

$$W = \Delta K + \Delta U, \quad (16.1)$$

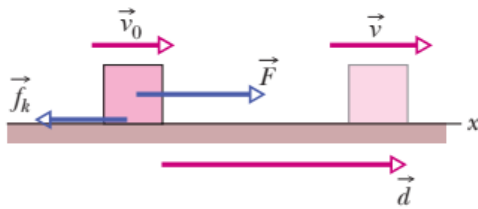
$$W = \Delta E_{\text{mec}} \quad (\text{work done on system, no friction involved}), \quad (16.2)$$



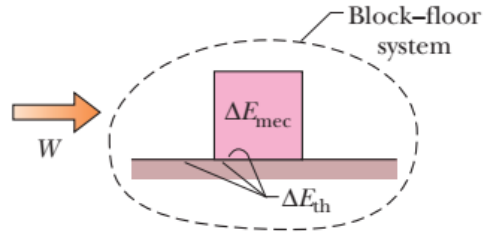
## Με Τριβή

The applied force supplies energy. The frictional force transfers some of it to thermal energy.

So, the work done by the applied force goes into kinetic energy and also thermal energy.



(a)



(b)

$$F - f_k = ma. \quad (16.3)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ad. \quad (16.4)$$

$$Fd = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + f_k d \quad (16.5)$$

$$Fd = \Delta K + f_k d. \quad (16.6)$$

$$Fd = \Delta E_{\text{mec}} + f_k d. \quad (16.7)$$

$$\Delta E_{\text{th}} = f_k d \quad (\text{increase in thermal energy by sliding}). \quad (16.8)$$

$$Fd = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}}. \quad (16.9)$$

$$W = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} \quad (16.10)$$

## 16. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$W = \Delta E = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}}, \quad (17.1)$$

Απομονωμένο σύστημα

$$\Delta E = 0 \quad (17.2)$$

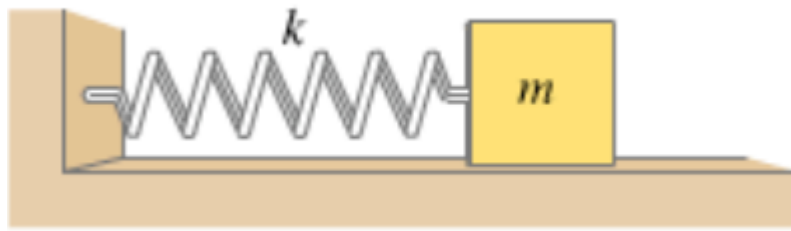
$$\Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}} = 0 \quad (17.3)$$

$$\Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{other}} = 0 \quad (17.4)$$

- Όταν δεν δρουν μη συντηρητικές δυνάμεις ανάμεσα στα σώματα ενός απομονωμένου συστήματος τότε  $\Delta E_{\text{th}} = 0$  και  $\Delta E_{\text{int}} = 0$   
Και η  $\Delta E_{\text{mec}} = 0$

**Θεώρημα Κινητικής Ενέργειας – έργου vs Αρχής διατήρησης της Ενέργειας**

- Αν επιλέξουμε ως σύστημα ένα σώμα στο οποίο ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις τότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα Κινητικής Ενέργειας – έργου**
- Αν επιλέξουμε ένα σύστημα στο οποίο δεν παράγεται έργο από εξωτερικές δυνάμεις τότε πρέπει να εφαρμόσουμε την Αρχή διατήρησης της Ενέργειας**



- i) Αν θεωρήσουμε το σώμα μόνο τότε το έργο που παράγει το ελατήριο πάνω στο σώμα ισούται με την μεταβολή της κινητικής του ενέργειας
- ii) Αν θεωρήσουμε το σύστημα Ελατήριο – Σώμα τότε  $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$  , E=σταθερή

Γενικά όταν οι δυνάμεις δεν είναι σταθερές τότε τα προβλήματα γίνονται απλούστερα με το θεώρημα Κινητικής Ενέργειας – Έργου ή την αρχή διατήρησης της ενέργειας

## 17. ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ ΚΑΙ ΟΡΜΗ

**Μηχανικό σύστημα** είναι ένα σύνολο σωμάτων ή υλικών σημείων τα οποία περιέχονται στον χώρο και περιβάλλονται με μία πραγματική ή νοητή επιφάνεια. Μέσα στον χώρο αυτό τα σώματα αλληλεπιδρούν και η θέση ή η κίνηση κάθε σωματιδίου εξαρτάται από την θέση και κίνηση των υπολοίπων. Η αλληλεπίδραση εκφράζεται με τις λεγόμενες **εσωτερικές δυνάμεις**.

Ένα σύστημα σωμάτων θα ονομάζεται **κλειστό** όταν δεν ανταλλάσσει ύλη με το περιβάλλον

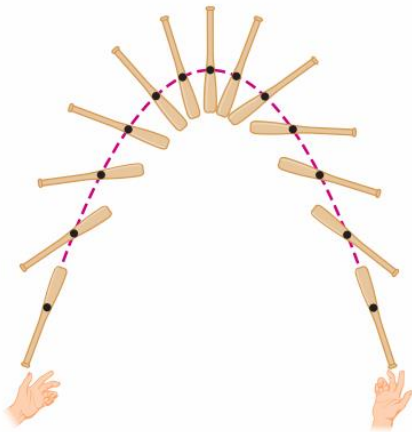
Την επίδραση του περιβάλλοντος πάνω στο σύστημα την περιγράφουμε με τις **εξωτερικές δυνάμεις**

**Απομονωμένο** είναι ένα κλειστό σύστημα στο οποίο δεν ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις



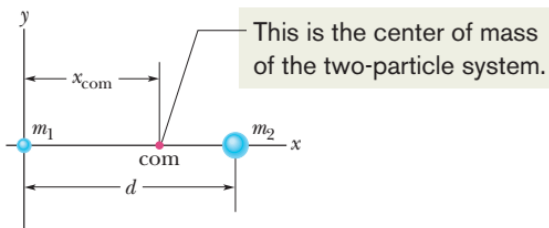


(a)

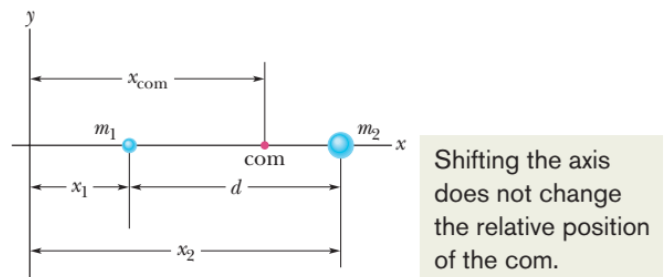


(b)

Το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωματιδίων είναι ένα σημείο το οποίο κινείται ως υλικό σημείο και όλες οι εξωτερικές δυνάμεις να ασκούνται σε αυτό



(a)



(b)

Θέση του κέντρου μάζας  $x_{com}$

$$x_{\text{com}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \quad x_{\text{com}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

$$x_{\text{com}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{M}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i. \quad (18.1)$$

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i.$$

(18.2)

$$\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}. \quad (18.3)$$

$$\vec{r}_{\text{com}} = x_{\text{com}} \hat{i} + y_{\text{com}} \hat{j} + z_{\text{com}} \hat{k}. \quad (18.4)$$

$$\vec{r}_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (18.5)$$

### Στερεά σώματα

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i. \quad (18.6)$$

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int x \, dm, \quad y_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int y \, dm, \quad z_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int z \, dm, \quad (18.7)$$

Θεωρούμε ΟΜΟΓΕΝΗ σώματα δηλαδή σώματα στα οποία

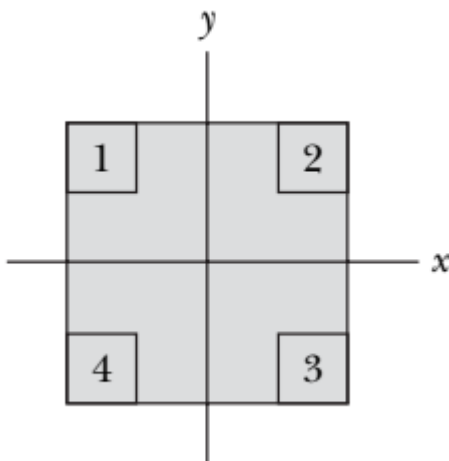
Η πυκνότητα  $\rho$ =σταθερή

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}, \quad (18.8)$$

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{V} \int x dV, \quad y_{\text{com}} = \frac{1}{V} \int y dV, \quad z_{\text{com}} = \frac{1}{V} \int z dV. \quad (18.9)$$

- Βοηθάει η συμμετρία. Συνήθως το κέντρο μάζας είναι το σημείο συμμετρίας η βρίσκεται πάνω σε άξονα συμμετρίας

**Ερώτημα** Να βρεθεί η θέση του κέντρου μάζας σε κάθε περίπτωση α), Αφαιρώ 1,β)1,2,γ)1,3,δ)1,2,3,4



## 2<sup>ος</sup> Νόμος του Newton για σύστημα σωματιδίων

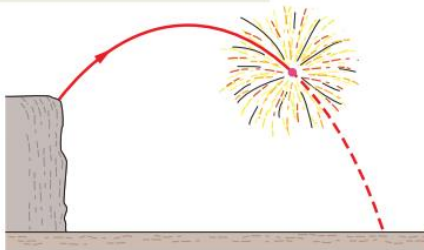
$$\vec{F}_{\text{net}} = M\vec{a}_{\text{com}} \quad (\text{system of particles}). \quad (18.10)$$

- $\vec{F}_{\text{net}}$  είναι η συνισταμένη μόνο των ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ και ΟΧΙ των ΕΣΩΤΕΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ (δηλαδή των δυνάμεων που ασκούνται ανάμεσα στα σωματίδια)
- Το σύστημα είναι κλειστό. Η μάζα  $M$  είναι σταθερή

Δεν έχουμε καμία πληροφορία για την επιτάχυνση των σωματιδίων.

$$F_{\text{net},x} = Ma_{\text{com},x} \quad F_{\text{net},y} = Ma_{\text{com},y} \quad F_{\text{net},z} = Ma_{\text{com},z}$$

The internal forces of the explosion cannot change the path of the com.





Απόδειξη της

$$\vec{F}_{\text{net}} = M\vec{a}_{\text{com}} \quad (\text{system of particles}). \quad (18.10)$$

Από

$$\vec{r}_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (18.5)$$

Προκύπτει

$$M\vec{r}_{\text{com}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots + m_n\vec{r}_n,$$

Με παραγωγή ως προς  $t$

$$M\vec{v}_{\text{com}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n.$$

Και πάλι με παραγωγή ως προς  $t$

$$M\vec{a}_{\text{com}} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots + m_n\vec{a}_n.$$

Όμως

$$M\vec{a}_{\text{com}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n.$$

Το διανυσματικό άθροισμα

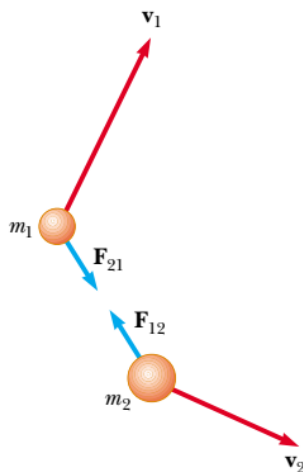
$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$  περιέχει εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις αλλά οι εσωτερικές δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται.



# Ορμή (Γραμμική Ορμή)

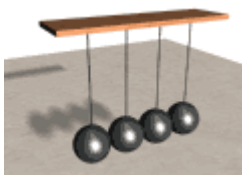
Απομονωμένο σύστημα 2 σωμάτων

$$\text{Δράση- Αντίδραση } \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \rightarrow \\ \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$



$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0 \rightarrow m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d(m_1 \vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2 \vec{v}_2)}{dt} = 0 \\ \rightarrow \frac{d(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)}{dt} = 0 \rightarrow (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = \text{σταθ}$$

Ένα σωρό ερευνητές πριν από τον Νεύτωνα είχαν στοχαστεί πάνω στο πρόβλημα του «vis motrix» - «κινητήριας δύναμης» - που έχει ένα κινούμενο αντικείμενο όταν είναι ικανό να θέσει σε κίνηση ένα άλλο.



Στη Γαλλία ο Καρτέσιος είχε προτείνει ως «vis motrix» να θεωρείται το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την ταχύτητά του

Ο Νεύτων υιοθέτησε την πρόταση του Καρτέσιου και το γινόμενο «μάζα επί ταχύτητα»

το ονόμασε Quantitas Motus

Η άποψή του κυριάρχησε.

Οι Γάλλοι έδωσαν στην καινούρια έννοια το όνομα Quantité de mouvement,

οι Γερμανοί την είπαν Impuls, οι Σουηδοί επίσης Impuls,

οι Ιταλοί Quantita di moto, οι Πορτογάλοι Quantidade de movimento,

οι Σέρβοι kolicine kretanja, οι Έλληνες ΟΡΜΗ.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{linear momentum of a particle}), \quad (18.11)$$

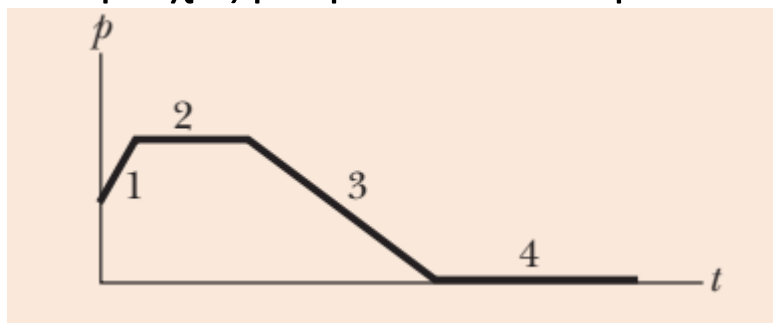
## 2<sup>ος</sup> Νόμος του Newton

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (18.12)$$

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

(18.13)

**Ερώτημα** Κατατάξτε ως προς το μέτρο της Δύναμης της 4 περιοχές με φθίνουσα σειρά.



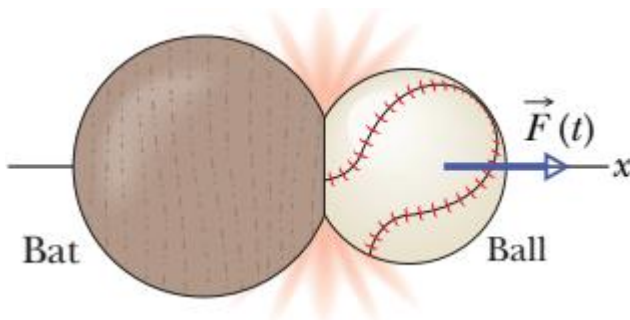


$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n \\ &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n.\end{aligned}$$

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{com}} \quad (18.14)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{\text{com}}}{dt} = M\vec{a}_{\text{com}}.$$

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (\text{system of particles}), \quad (18.15)$$



$$d\vec{p} = \vec{F}(t) dt.$$

$$\int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt.$$

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}.$$

# ΩΣΗ - ΩΘΗΣΗ $\vec{J}$

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt \quad (\text{impulse defined}).$$

(18.16)

$$\int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt.$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{J} \quad (\text{linear momentum-impulse theorem}).$$

(18.17)

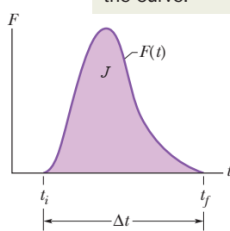
$$\vec{F}_{avg} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

$$W_{avg} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_f} F dx$$

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \vec{F}_{avg} \Delta t$$

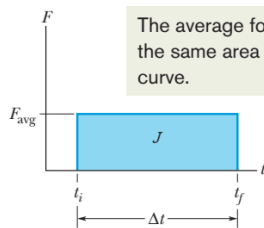
(18.8)

The impulse in the collision is equal to the area under the curve.



(a)

The average force gives the same area under the curve.



(b)

# Αρχή διατήρησης της ορμής

Σε ένα κλειστό απομονωμένο σύστημα  
( $\vec{F}_{net} = 0, \vec{J} = 0$ )

$$\vec{P} = \text{constant} \quad (\text{closed, isolated system}).$$

(18.19)

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad (\text{closed, isolated system}).$$

(18.20)

Ολική ορμή σε μια αρχική χρονική στιγμή  $t_i =$   
Ολική ορμή σε μεταγενέστερη χρονική στιγμή  $t_f$

η ΟΡΜΗ, όπως και η ΕΝΕΡΓΕΙΑ,  
είναι « κάτι » που μεταβιβάζεται,  
Βέβαια, στην περίπτωση της ΟΡΜΗΣ «αυτό»  
που μεταβιβάζεται

- λόγω χάρη από ένα σώμα σε ένα άλλο ακί-  
νητο - είναι ένα διάνυσμα

Σε μία ελαστική κρούση ένα κινούμενο αντικεί-  
μενο με ορμή 10 μονάδων μπορεί να μεταβιβά-  
σει - σε ένα ακίνητο - ορμή 16 μονάδων  
και το ίδιο να διατηρήσει ορμή 6 μονάδων αλλά  
με αντίθετη κατεύθυνση

Αυτό αποδεικνύεται με βάση τους νόμους διατήρησης και σημαίνει ότι το σώμα μεταβίβασε ορμή περισσότερη από όση είχε

## Σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας

*Η ορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του είναι μηδέν*

## Ορμή και κινητική ενέργεια στις κρούσεις

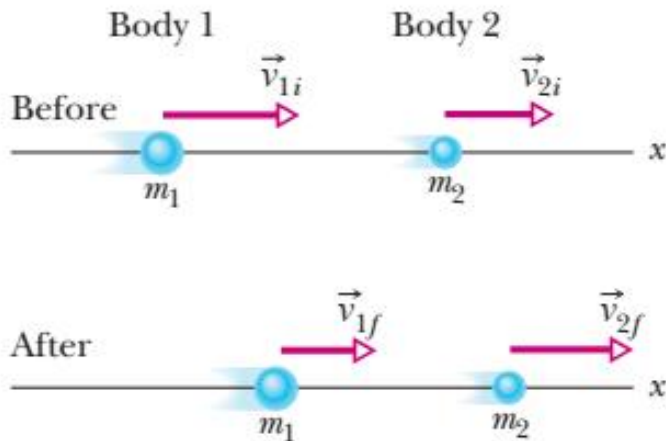
A) Ελαστική Κρούση ,  $\Delta K=0$ .

B) Ανελαστική Κρούση ,  $\Delta K \neq 0$

Γ) Τέλεια ανελαστική (Πλαστική), Συσσωμάτωμα,  $\Delta K = \max$

## Μονοδιάστατη Ανελαστική Κρούση

Here is the generic setup for an inelastic collision.

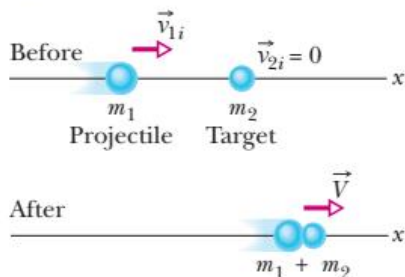


$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

## Μονοδιάστατη Πλαστική Κρούση

In a completely inelastic collision, the bodies stick together.



$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) V$$

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

## Ταχύτητα του κέντρου μάζας

$$\vec{P} = M \vec{v}_{\text{com}} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{\text{com}}$$

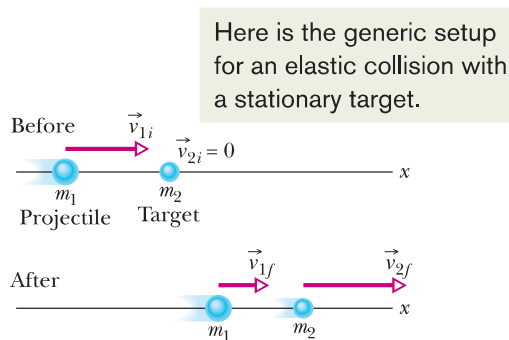
$$\vec{P} = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}.$$

$$\vec{v}_{\text{com}} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}}{m_1 + m_2}. \quad (18.21)$$

## Ελαστικές Κρούσεις σε μία διάσταση (Εκκεντρή κρούση)

Θεωρούμε προσεγγιστικά ότι  $\Delta K=0$

### A) Ακίνητος στόχος



$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}.$$

**(18.22)**

i) **Ίσες μάζες,  $m_1 = m_2$**

$$v_{1f} = 0 \quad \text{and} \quad v_{2f} = v_{1i},$$

ii)  **$m_2 \gg m_1$**

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{and} \quad v_{2f} \approx \left( \frac{2m_1}{m_2} \right) v_{1i}.$$

iii)  **$m_1 \gg m_2$**

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{and} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i}.$$

**B) Κινούμενος στόχος**

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f},$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2.$$

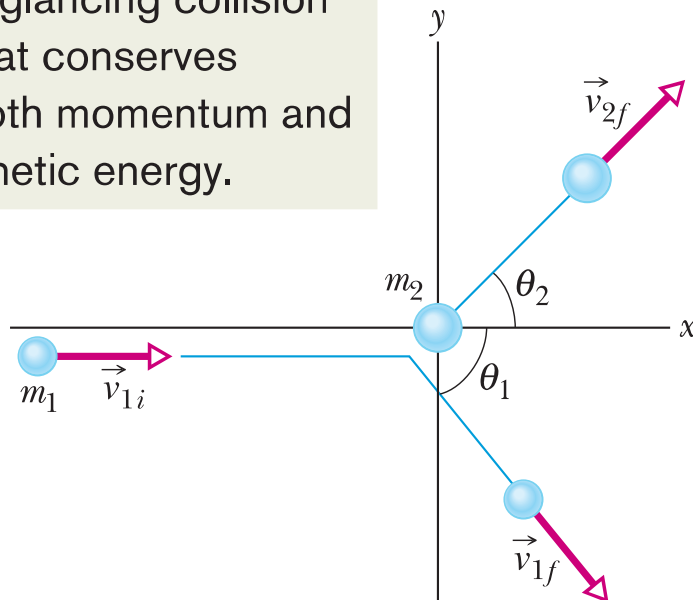
$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

(18.23)

## Ελαστικές Κρούσεις σε δύο διάστασεις

A glancing collision that conserves both momentum and kinetic energy.



$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}$$

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

Άξονας x

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2,$$



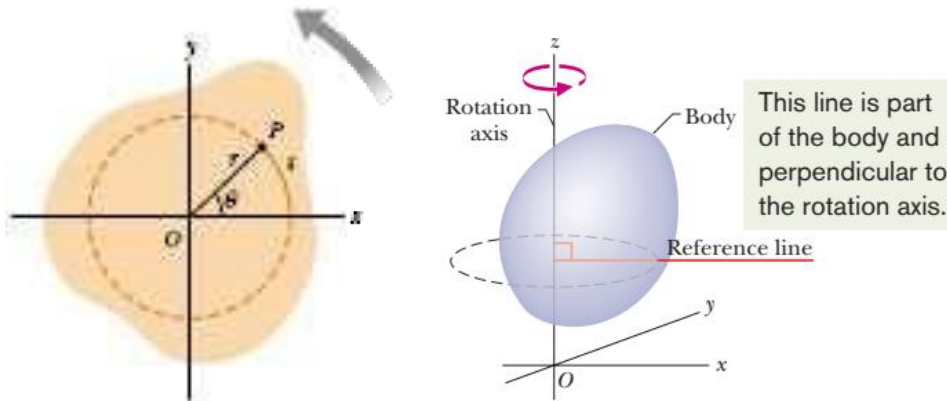
Άξονας y

$$0 = -m_1 v_{1f} \sin \theta_1 + m_2 v_{2f} \sin \theta_2.$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \quad (\text{kinetic energy}).$$

## 18. ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

Περιστροφική κίνηση εκτελεί ένα σώμα όταν κάθε σωματίο του σώματος διαγράφει κύκλο, τα κέντρα δε όλων των κύκλων βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία που λέγεται άξονας της περιστροφής, Ο άξονας περιστροφής στο σχήμα είναι ο z.



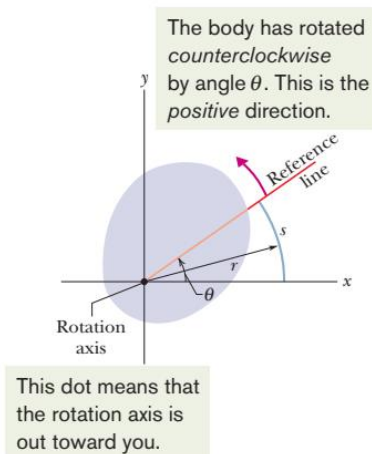
Η γωνία που διαγράφει το διάνυσμα θέσης  $\vec{r}$  ενός σημείου του σώματος είναι  $\theta$ . Εάν μετράμε την  $\theta$  σε ακτίνια (rad) τότε εξ ορισμού :

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (19.1)$$

$$1 \text{ rev} = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad},$$

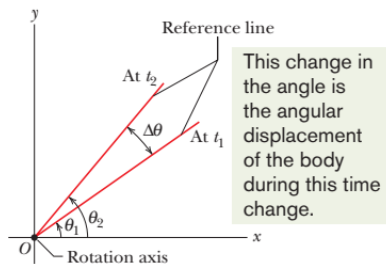
$$1 \text{ rad} = 57.3^\circ = 0.159 \text{ rev}.$$

Εάν σε χρόνο  $\Delta t$  η γωνία μεταβάλλεται κατά  $\Delta\theta$  η **μέση γωνιακή ταχύτητα**  $\omega_{\text{avg}}$  του σώματος στο χρονικό διάστημα  $\Delta t$  ορίζεται σαν



$$\omega_{\text{avg}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

(19.2)



## ΤΑ ΡΟΛΟΓΙΑ ΕΙΝΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΑ

Και η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα θα είναι το όριο της σχέσης 2.2 για απειροστή μεταβολή του χρόνου.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$

(19.3)

Εάν σε χρόνο  $\Delta t$  η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται κατά  $\Delta\omega$  η μέση γωνιακή επιτάχυνση  $\alpha$  του σώματος στο χρονικό διάστημα  $\Delta t$  ορίζεται σαν

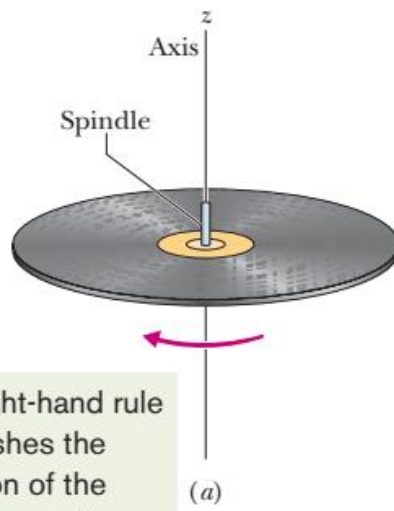
$$\alpha_{\text{avg}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

(19.4)

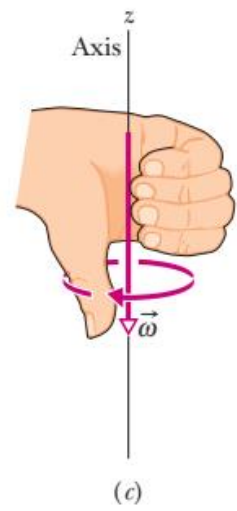
Και η **στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση**  $\alpha$  θα είναι το όριο της σχέσης 19.4 για απειροστή μεταβολή του χρόνου.

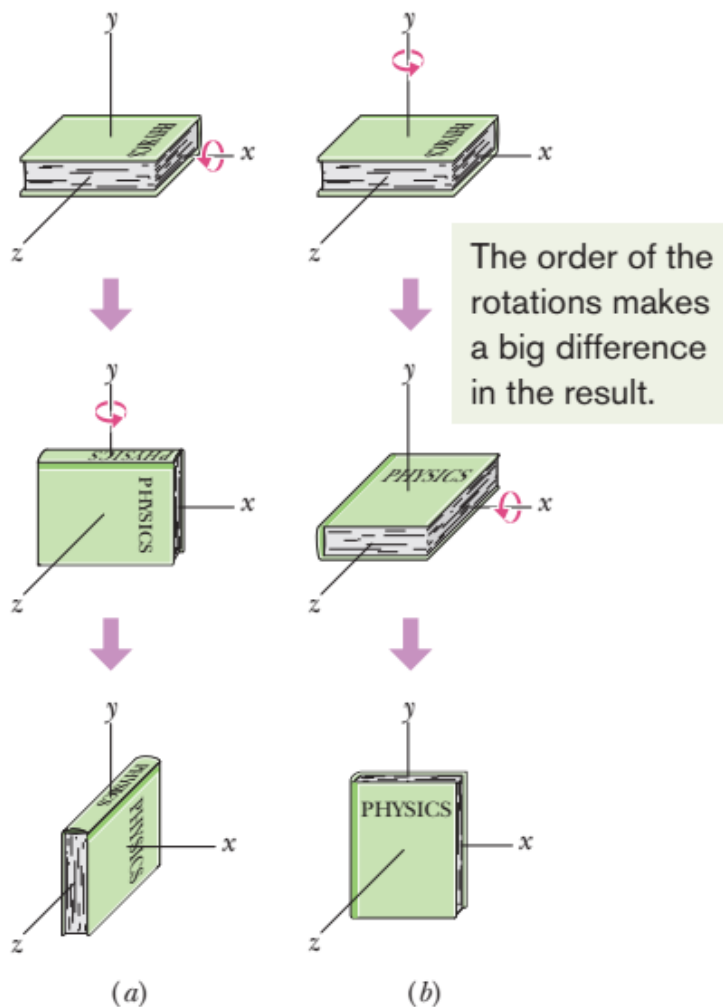
$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

(19.5)



This right-hand rule establishes the direction of the angular velocity vector.





**Equations of Motion for Constant Linear Acceleration and for Constant Angular Acceleration**

Equation Number	Linear Equation	Missing Variable		Angular Equation
(2-11)	$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
(2-15)	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$v$	$\omega$	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
(2-16)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$t$	$t$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
(2-17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	$a$	$\alpha$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$
(2-18)	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	$v_0$	$\omega_0$	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$

Από τη σχέση (19.1) παίρνουμε  $s=r\theta$  (19.6)  
 Παραγωγίζοντας την σχέση (19.6) ως προς τον χρόνο

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

Επειδή η γραμμική ταχύτητα  $v$  είναι

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (19.17)$$

με βάση και τη σχέση (19.3) παίρνουμε,

$$v = \omega r \quad (19.8),$$

και σε διανυσματική μορφή

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

(19.9),

Παραγωγίζοντας την σχέση (19.9) ως προς τον χρόνο

$$\begin{aligned} \vec{a}_{lin} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = a \hat{k} \times r \hat{i} + \omega \hat{k} \times v \hat{j} \\ &= ar(\hat{k} \times \hat{i}) + \omega v(\hat{k} \times \hat{j}) = ar\hat{j} + \omega v(-\hat{i}) \end{aligned}$$

(19.20)

Ισχύει

$$\alpha_{tan} = ar\hat{j} \quad (19.21),$$

όπου  $\alpha_{tan}$

είναι η εφαπτομενική ή επιτρόχιος συνιστώσα της επιτάχυνσης του σωματιδίου με διάνυσμα θέσης  $\mathbf{r}$ , οπότε

$$\alpha_{tan} = a r \quad (19.22).$$

και

$$\alpha_{rad} = v\omega(-\hat{i}) \quad (19.23)$$

είναι η ακτινική ή κεντρομόλος επιτάχυνση επειδή το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση.

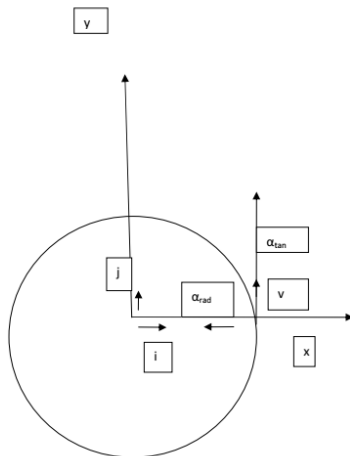
Για την ακτινική ή κεντρομόλο συνιστώσα της επιτάχυνσης ισχύει

$$\alpha_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (19.24).$$

Η φυσική της σημασία είναι ότι περιγράφει τη μεταβολή μόνο της διεύθυνσης της ταχύτητας.

Από (19.10), (19.11), (19.13) παίρνουμε

$$\vec{a}_{lin} = \vec{a}_{tan} + \vec{a}_{rad} \quad (19.25)$$



**Η ακτινική ή κεντρομόλος επιτάχυνση** οφείλεται στις ενδοατομικές δυνάμεις συνοχής οι οποίες είναι υπεύθυνες για την σχετική θέση των ατόμων στο στερεό σώμα, ενώ η **εφαπτομενική ή επιτρόχιος επιτάχυνση** προκαλείται από μία εξωτερική δύναμη

## ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \dots \\ &= \sum \frac{1}{2}m_iv_i^2, \end{aligned}$$

$$K = \sum \frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left( \sum m_i r_i^2 \right) \omega^2,$$

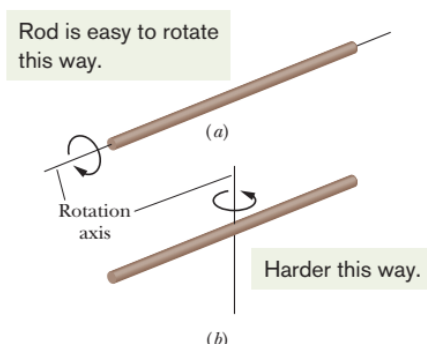
### Ροπή αδράνειας I

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (\text{rotational inertia})$$

(19.26)

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (\text{radian measure})$$

(19.27)



$$I = \int r^2 dm \quad (\text{rotational inertia, continuous body}).$$

(19.28)

Ο όρος I που ορίζεται μέσω της σχέσης (19.28) ονομάζεται **ροπή αδράνειας** του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής. Μονάδα της ροπής αδράνειας είναι το  $1\text{Kg}\text{m}^2$ , όπως προκύπτει από τον ορισμό της. Η ροπή αδράνειας είναι το αντίστοιχο μέγεθος της μάζας στην περιστροφική κίνηση. Εκφράζει την δυσκολία να θέσουμε ένα σώμα σε περιστροφική κίνηση ή με άλλα λόγια την τάση του σώματος να ανθίσταται σε μεταβολή της γωνιακής του ταχύτητας.

## Θεώρημα των παράλληλων αξόνων

$$I = I_{\text{com}} + Mh^2 \quad (\text{parallel-axis theorem}).$$

(19.29)

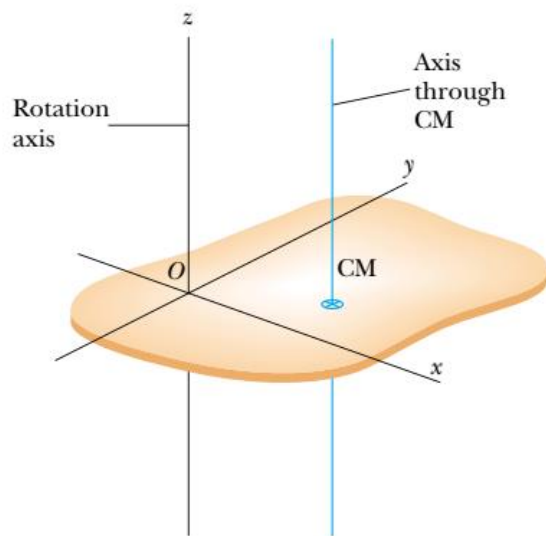


Table 10-2

### Some Rotational Inertias

<p>Hoop about central axis</p> <p><math>I = MR^2</math></p> <p>(a)</p>	<p>Annular cylinder (or ring) about central axis</p> <p><math>I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)</math></p> <p>(b)</p>	<p>Solid cylinder (or disk) about central axis</p> <p><math>I = \frac{1}{2}MR^2</math></p> <p>(c)</p>
<p>Solid cylinder (or disk) about central diameter</p> <p><math>I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2</math></p> <p>(d)</p>	<p>Thin rod about axis through center perpendicular to length</p> <p><math>I = \frac{1}{12}ML^2</math></p> <p>(e)</p>	<p>Solid sphere about any diameter</p> <p><math>I = \frac{2}{5}MR^2</math></p> <p>(f)</p>
<p>Thin spherical shell about any diameter</p> <p><math>I = \frac{2}{3}MR^2</math></p> <p>(g)</p>	<p>Hoop about any diameter</p> <p><math>I = \frac{1}{2}MR^2</math></p> <p>(h)</p>	<p>Slab about perpendicular axis through center</p> <p><math>I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)</math></p> <p>(i)</p>



## Η έννοια της Ροπής – Μηχανική ροπή

Η ροπή ενός φυσικού διανυσματικού μεγέθους  $\vec{A}$  το οποίο προσδιορίζεται με διάνυσμα θέσης  $\vec{r}$ ,

$$\overrightarrow{\text{Ροπή } A} = \vec{r} \times \vec{A} \quad (19.30)$$

Στην περίπτωση που το διάνυσμα  $\vec{A}$  παριστάνει δύναμη έχουμε την **μηχανική ροπή**  $\vec{\tau}$  που ορίζεται σαν

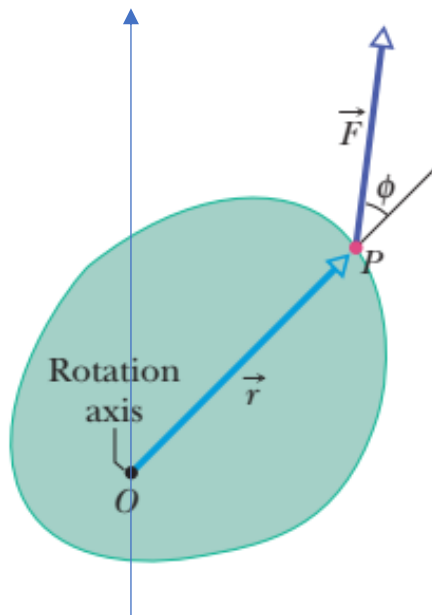
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (19.31)$$

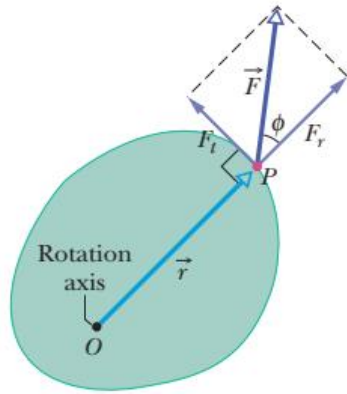
με μέτρο

$$\tau = rF \sin \phi \quad (19.32)$$

και μονάδα το 1Nm (Προσοχή όχι σε Joule)

Στο σχήμα φαίνεται η εφαρμογή δύναμης  $F$  και η αντίστοιχη μηχανική ροπή ως προς άξονα  $O$ .



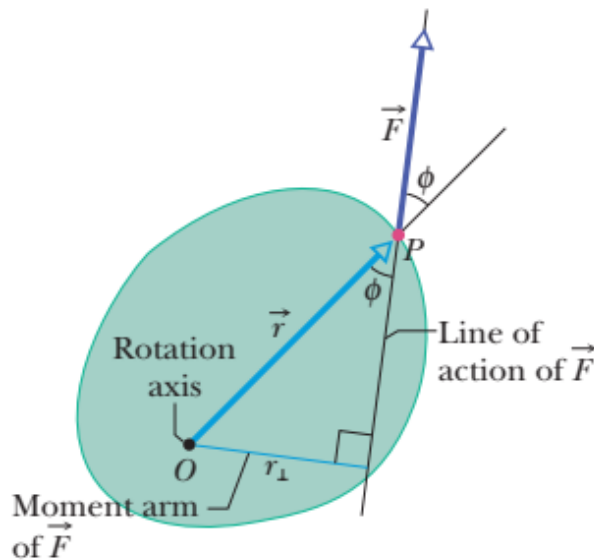


But actually only the *tangential* component of the force causes the rotation.

$$\tau = (r)(F \sin \phi) = rF_t$$

(19.33)

Επειδή η ποσότητα  $r \sin \phi$  ισούται με την απόσταση του φορέα της δύναμης από το σημείο  $O$ , δηλαδή τον άξονα περιστροφής  $d = r \sin \phi$  το μέτρο της ροπής γράφεται σαν



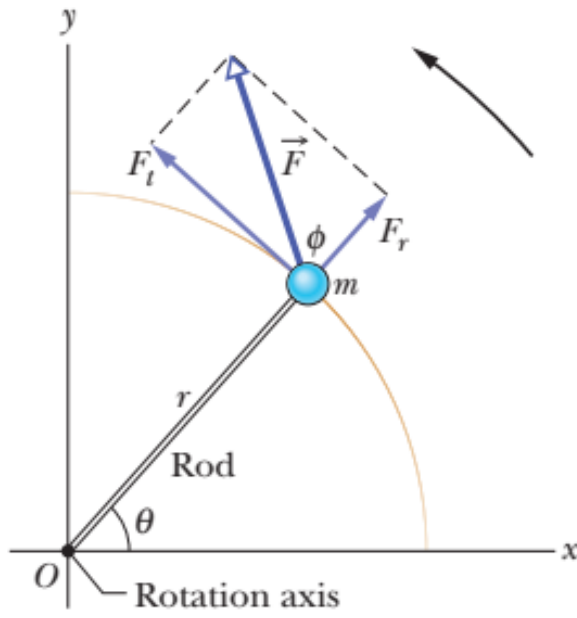
$$\tau = (r \sin \phi)(F) = r_{\perp} F,$$

(19.34)

Η ποσότητα  $r_{\perp}$  ονομάζεται **μοχλοβραχίονας**. Για την μηχανική ροπή ισχύει η αρχή της επαλληλίας

$$\vec{\tau}_{net} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i \quad (19.35)$$

Επίσης εάν σε ένα σώμα ασκηθεί μηχανική ροπή θα αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση .



$$\tau_{\text{net}} = I\alpha \quad (\text{Newton's second law for rotation}).$$

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = I\vec{\alpha}$$

(19.36)  
Απόδειξη

$$F_t = ma_t.$$

$$\tau = F_t r = ma_t r.$$

$(a_t = \alpha r)$

$$\tau = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha.$$

I η ροπή αδράνειας του σωματιδίου (Ενός σωματιδίου)

$$\tau = I\alpha$$

## ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = W \quad (\text{work-kinetic energy theorem}).$$

(19.37)

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \quad (\text{work, rotation about fixed axis}),$$

(19.38)

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \quad (\text{work, constant torque}).$$

(19.39)

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \quad (\text{power, rotation about fixed axis}).$$

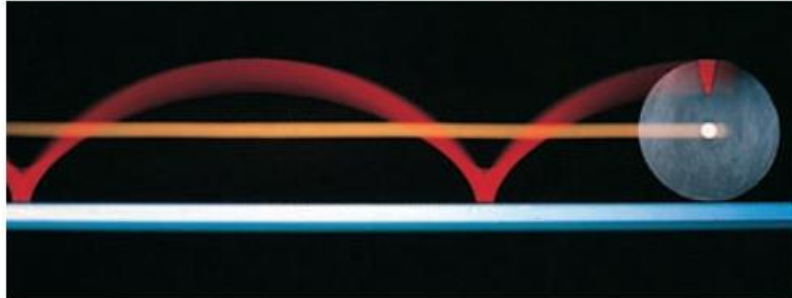
(19.40)

### Some Corresponding Relations for Translational and Rotational Motion

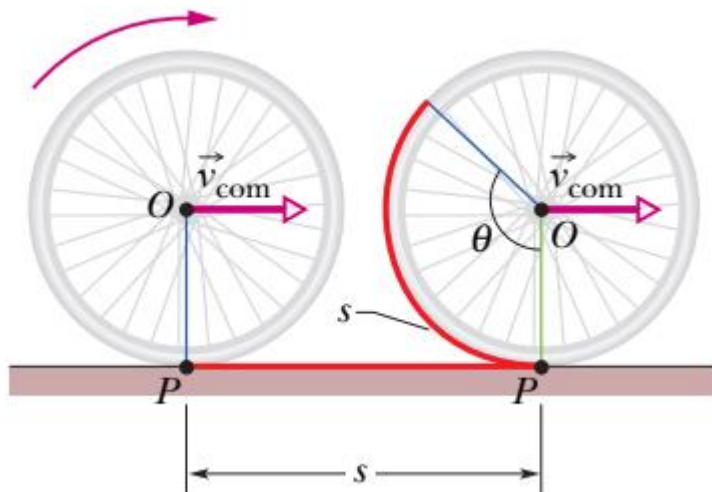
Pure Translation (Fixed Direction)		Pure Rotation (Fixed Axis)	
Position	$x$	Angular position	$\theta$
Velocity	$v = dx/dt$	Angular velocity	$\omega = d\theta/dt$
Acceleration	$a = dv/dt$	Angular acceleration	$\alpha = d\omega/dt$
Mass	$m$	Rotational inertia	$I$
Newton's second law	$F_{\text{net}} = ma$	Newton's second law	$\tau_{\text{net}} = I\alpha$
Work	$W = \int F dx$	Work	$W = \int \tau d\theta$
Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Power (constant force)	$P = Fv$	Power (constant torque)	$P = \tau\omega$
Work-kinetic energy theorem	$W = \Delta K$	Work-kinetic energy theorem	$W = \Delta K$

# 19. ΚΥΛΙΣΗ

Ομαλή κίνηση = χωρίς ολίσθηση ή αναπήδηση.



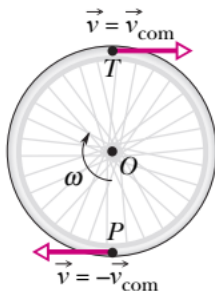
Κύλιση = Μεταφορά του κέντρου μάζας + περιστροφή αντικείμενου γύρω από το κέντρο μάζας



$$\text{Από } \theta = \frac{s}{R} \longrightarrow s = \theta R$$

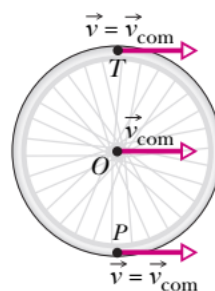
(20.1)

(a) Pure rotation



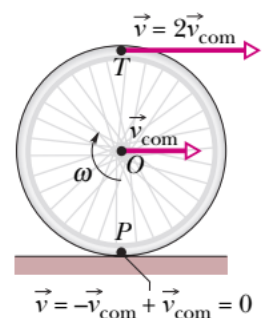
+

(b) Pure translation



=

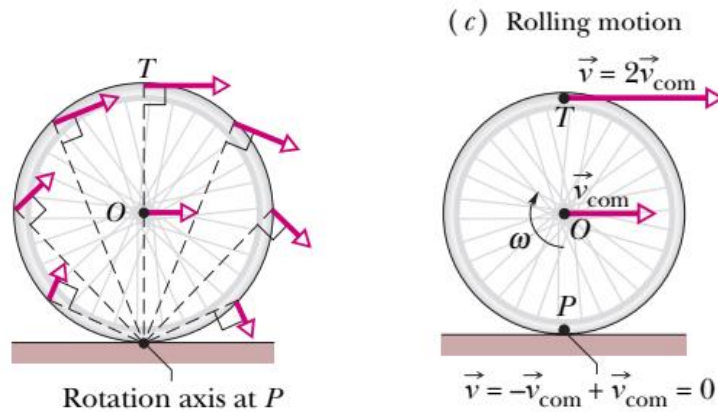
(c) Rolling motion



$$v_{\text{com}} = \omega R$$

(20.2)

## Η κύλιση σαν αμιγής περιστροφή



Από  $v = \omega r$  έχουμε

$$v_{\text{top}} = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_{\text{com}},$$

(20.3)

## Η Κινητική ενέργεια της κύλισης

### Αμιγής περιστροφή

$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2,$$

(20.4)

$$I_P = I_{\text{com}} + MR^2,$$

(20.5)

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{com}}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2,$$

(20.6)

Επειδή ισχύει

$$v_{\text{com}} = \omega R$$

Προκύπτει

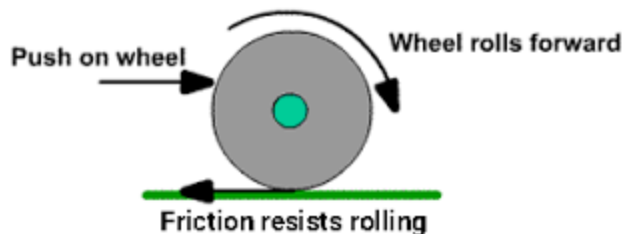
$$K = \frac{1}{2}I_{\text{com}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{com}}^2.$$

(20.7)

## Δυνάμεις κατά την κύλιση

i) Ο τροχός δεν ολισθαίνει-Στατική τριβή

Η στατική τριβή πρέπει να έχει τέτοια κατεύθυνση και μέτρο έτσι ώστε το σημείο επαφής με το έδαφος να έχει μηδενική επιτάχυνση



Από την σχέση

$$v_{com} = \omega R$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο

$$\frac{dv_{com}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \quad (20.8)$$

Δηλαδή

$$\alpha_{com} = aR \quad (20.9)$$

Προσοχή στην σχέση (20.9) περιλαμβάνει τις αλγεβρικές τιμές των  $\alpha_{cm}$  και  $a$

ii) Ο τροχός ολισθαίνει-Κινητική τριβή

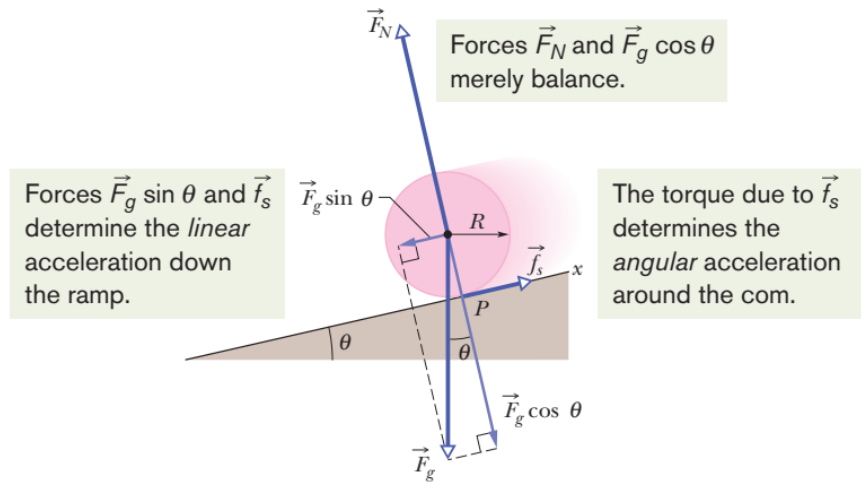
ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ Η

$$\alpha_{com} = aR \quad (20.9)$$

Εφαρμογή :Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο  
χωρίς ολίσθηση

Αναζητάμε την γραμμική επιτάχυνση  
 $\alpha_{com,x}$





Άξονας x

$$\begin{aligned} \vec{F}_{net,x} &= M\vec{a}_{cm,x} \rightarrow \vec{F}_{g,x} + \vec{f}_s = M\vec{a}_{cm,x} \\ &\rightarrow -Mg\sin\theta\hat{i} + f_s\hat{i} = Ma_{com,x}\hat{i} \end{aligned}$$

Οπότε

$$-Mg\sin\theta + f_s = Ma_{com,x} \quad (20.10)$$

Από την (19.36)

$$\vec{\tau}_{net} = I\vec{a}$$

$$\vec{R} \times \vec{f}_s = I\vec{a} \rightarrow R(-\hat{j}) \times f_s\hat{i} = I\vec{a} \rightarrow Rf_s\hat{k} = I\vec{a}$$

$$\text{Άρα } Rf_s = I\alpha \quad (20.11)$$

Ισχύει

$$-\alpha_{com} = aR \quad (20.12)$$

Από τις (20.10), (20.11), (20.12), προκύπτει

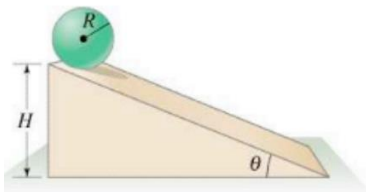
$$a_{com,x} = -\frac{g \sin \theta}{1 + I_{com}/MR^2}$$

Μικρός παρονομαστής μεγάλη η  $a_{com}$

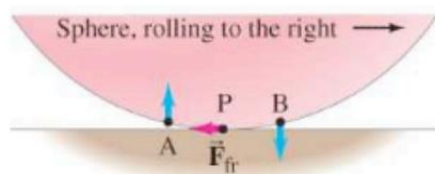
$$\frac{I_{com}}{MR^2} \rightarrow \text{Μικρή } I_{com}$$

Μεγάλη η  $\theta$  μεγάλη η  $a_{com}$

### Εύρεση ταχύτητας στο τέλος του κεκλιμένου επιπέδου.



Υπάρχει μόνο στατική τριβή καθώς το σώμα δεν ολισθαίνει. Επειδή η δύναμη της στατικής τριβής δεν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της δεν παράγει έργο



Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

$$\Delta E_{mec} = 0 \rightarrow E_{mec i} = E_{mec f} \rightarrow$$

$$MgH = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I_{com} \omega^2$$

Για την σφαίρα ισχύει

$$I_{com} = \frac{2}{5} MR^2$$

$$v = \omega R$$

Οπότε

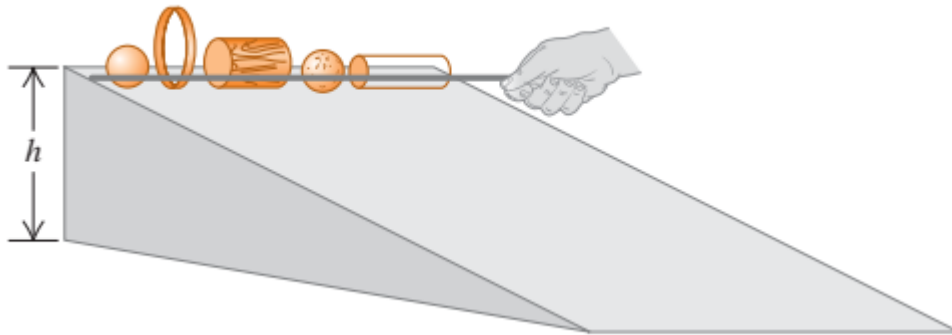
$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gH}$$

Εάν είχαμε μόνο ολίσθηση

$$v = \sqrt{2gH}$$

Πότε η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη;

**10.16** Which body rolls down the incline fastest, and why?



Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0 \rightarrow E_{\text{mec}i} = E_{\text{mec}f} \rightarrow$$

$$MgH = \frac{1}{2} M v_{\text{com}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{com}} \omega^2 \rightarrow$$

$$MgH = \frac{1}{2} M v_{\text{com}}^2 + \frac{1}{2} c M R^2 \omega^2 \rightarrow$$

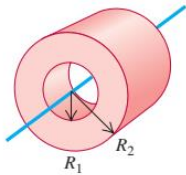
$$MgH = \frac{1}{2} g M v_{\text{com}}^2 + \frac{1}{2} c M R^2 \left(\frac{v_{\text{com}}}{R}\right)^2 \rightarrow$$

$$MgH = \frac{1}{2} (1 + c) M v_{\text{com}}^2 \rightarrow$$

$$v_{com} = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$$

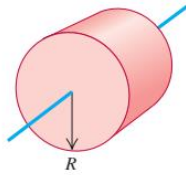
(e) Hollow cylinder

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$



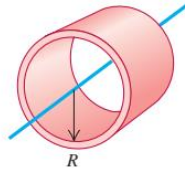
(f) Solid cylinder

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



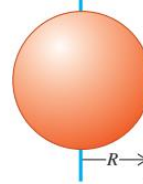
(g) Thin-walled hollow cylinder

$$I = MR^2$$



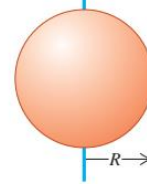
(h) Solid sphere

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

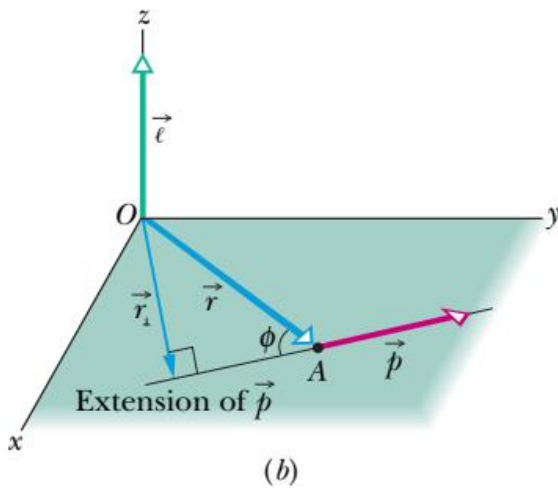
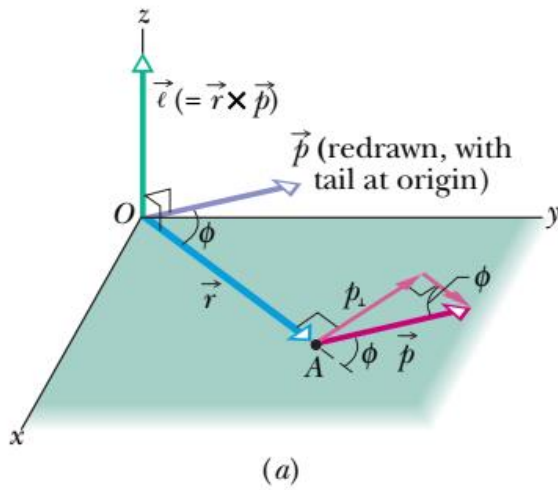


(i) Thin-walled hollow sphere

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$



## 20. (Τροχιακή) ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ή ΓΩΝΙΑΚΗ ΟΡΜΗ



$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

(21.1)

$$\ell = rmv \sin \phi, \quad (21.2)$$

·ή

$$\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp}, \quad (21.3)$$

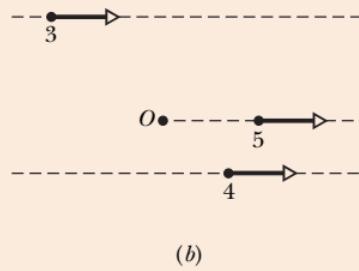
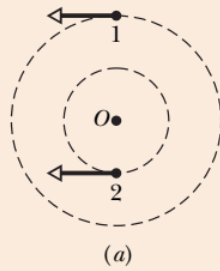
·ή

$$\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv, \quad (21.4)$$

**Μονάδα της στροφορμής είναι  $1\text{Kg m}^2\text{s}^{-1}$ .**

### CHECKPOINT 4

In part *a* of the figure, particles 1 and 2 move around point *O* in circles with radii 2 m and 4 m. In part *b*, particles 3 and 4 travel along straight lines at perpendicular distances of 4 m and 2 m from point *O*. Particle 5 moves directly away from *O*.



All five particles have the same mass and the same constant speed. (a) Rank the particles according to the magnitudes of their angular momentum about point *O*, greatest first. (b) Which particles have negative angular momentum about point *O*?

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{single particle})$$

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \quad (\text{single particle}).$$

(21.5)

Απόδειξη της (21.5)

Από

$$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v}),$$

Παραγωγίζοντας

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} \right).$$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v}).$$

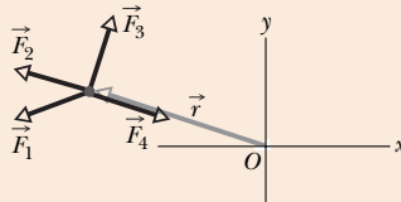
$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a}.$$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{net}} = \sum(\vec{r} \times \vec{F}).$$

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}.$$

### CHECKPOINT 5

The figure shows the position vector  $\vec{r}$  of a particle at a certain instant, and four choices for the direction of a force that is to accelerate the particle. All four choices lie in the  $xy$  plane. (a) Rank the choices according to the magnitude of the time rate of change ( $d\vec{\ell}/dt$ ) they produce in the angular momentum of the particle about point  $O$ , greatest first. (b) Which choice results in a negative rate of change about  $O$ ?



## Στροφορμή συστήματος σωματιδίων

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\ell}_i. \quad (21.6)$$

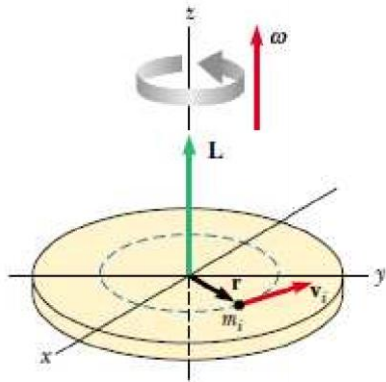
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{\ell}_i}{dt}. \quad (21.7)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_{\text{net},i}. \quad (21.8)$$

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{system of particles}), \quad (21.9)$$

## Γωνιακή ορμή στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα

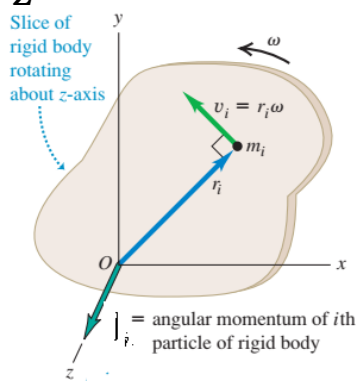
Όταν ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από ένα σταθερό άξονα που είναι **άξονας συμμετρίας** τότε τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας  $\vec{\omega}$  της στροφορμής  $\vec{L}$  καθώς και της μηχανικής ροπής  $\vec{\tau}$  είναι παράλληλα και οι διευθύνσεις τους συμπίπτουν με τον άξονα περιστροφής .



Εάν το σώμα είναι ομογενές και συμμετρικό ως προς άξονα περιστροφής π.χ. ως προς τον άξονα z τότε  $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{k}}$ . Σε κάθε άλλη περίπτωση ενώ  $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{k}}$ , το διάνυσμα της στροφορμής  $\vec{L}$  δεν έχει την κατεύθυνση του μοναδιαίου  $\hat{\mathbf{k}}$ .

Στην περίπτωση αυτή με σκοπό να υπολογίσουμε την γωνιακή επιτάχυνση **βρίσκουμε την προβολή  $L_z$  του  $\mathbf{L}$  στον άξονα z** οπότε

$$L_z = \vec{L}\hat{\mathbf{k}} \quad (21.10)$$



$$l_i = r_i p_i \sin(90^\circ) = r_i m_i v_i = r_i m_i \omega r_i = m_i r_i^2 \omega \quad (21.11)$$



Όμως

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (21.12)$$

Και τελικά

$$L_z = I\omega \quad (21.13)$$

Όπου η  $L_z$  και η  $I$  υπολογίζονται ως προς τον άξονα περιστροφής  $z$ . Στην περίπτωση που το σώμα είναι συμμετρικό και ομογενές ως προς τον άξονα περιστροφής έστω τον άξονα  $z$  τότε

$$\vec{L} = L\hat{k} \text{ ή } L=L_z \text{ και } \vec{L} = I\vec{\omega} \quad (21.14)$$

Η μηχανική ροπή θα είναι

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{a} \quad (21.15)$$

**Αν  $\vec{\tau} = 0$  τότε η στροφορμή παραμένει σταθερή  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$  και η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή.** Αυτό σημαίνει ότι όταν απομακρύνουμε τις δυνάμεις που ενεργούν πάνω στο στερεό ο άξονας περιστροφής θα διατηρεί σταθερή την διεύθυνση στο χώρο αφού η  $\vec{\omega}$  είναι σταθερή. Ένας άξονας του οποίου η διεύθυνση στο χώρο παραμένει σταθερή όταν ένα σώμα περιστρέφεται γύρω από αυτόν απουσία εξωτερικών δυνάμεων ονομάζεται **ελεύθερος άξονας** του σώματος. Αποδεικνύεται ότι σε κάθε στερεό σώμα οποιουδήποτε σχήματος και με οποιαδήποτε κατανομή μάζας υπάρχουν 3 τουλάχιστον άξονες που ανά δύο είναι κάθετοι μεταξύ τους που περνάνε από το κέντρο μάζας οι οποίοι είναι ελεύθεροι άξονες. Αυτοί ονομάζονται **κύριοι άξονες αδράνειας** **Εφ' όσον το στερεό έχει άξονες**

συμμετρίας οι κύριοι άξονες αδράνειας συμπίπτουν με τους ελευθερούς. Οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας ως προς τους κύριους άξονες αδράνειας λέγονται κύριες ροπές αδράνειας. Οι κύριες ροπές αδράνειας γενικά διαφέρουν μεταξύ τους  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ . Σε κεντροσυμμετρικά σώματα ισχύει  $I_1 = I_2 = I_3$ . Τα σώματα αυτά λέγονται σφαιρικοί στρόμβοι π.χ. ομογενής σφαίρα ή ομογενής κύβος.

## 21. ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Η ολική στροφορμή ενός συστήματος είναι σταθερή τόσο στο μέτρο όσο και στην κατεύθυνση της εάν η συνολική εξωτερική ροπή που δρά πάνω στο σύστημα είναι ίση με μηδέν. Αυτή η πρόταση αποτελεί την αρχή διατήρησης της στροφορμής και φαρμαλιστικά περιγράφεται από την σχέση

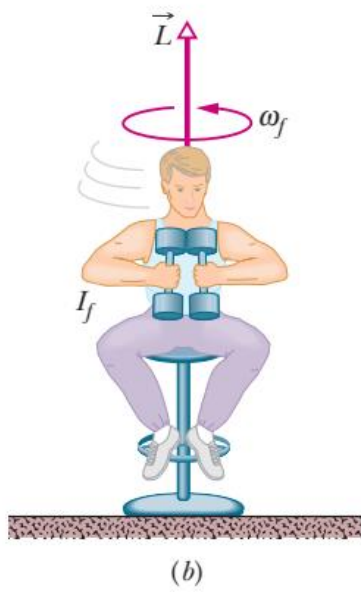
$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (22.1)$$

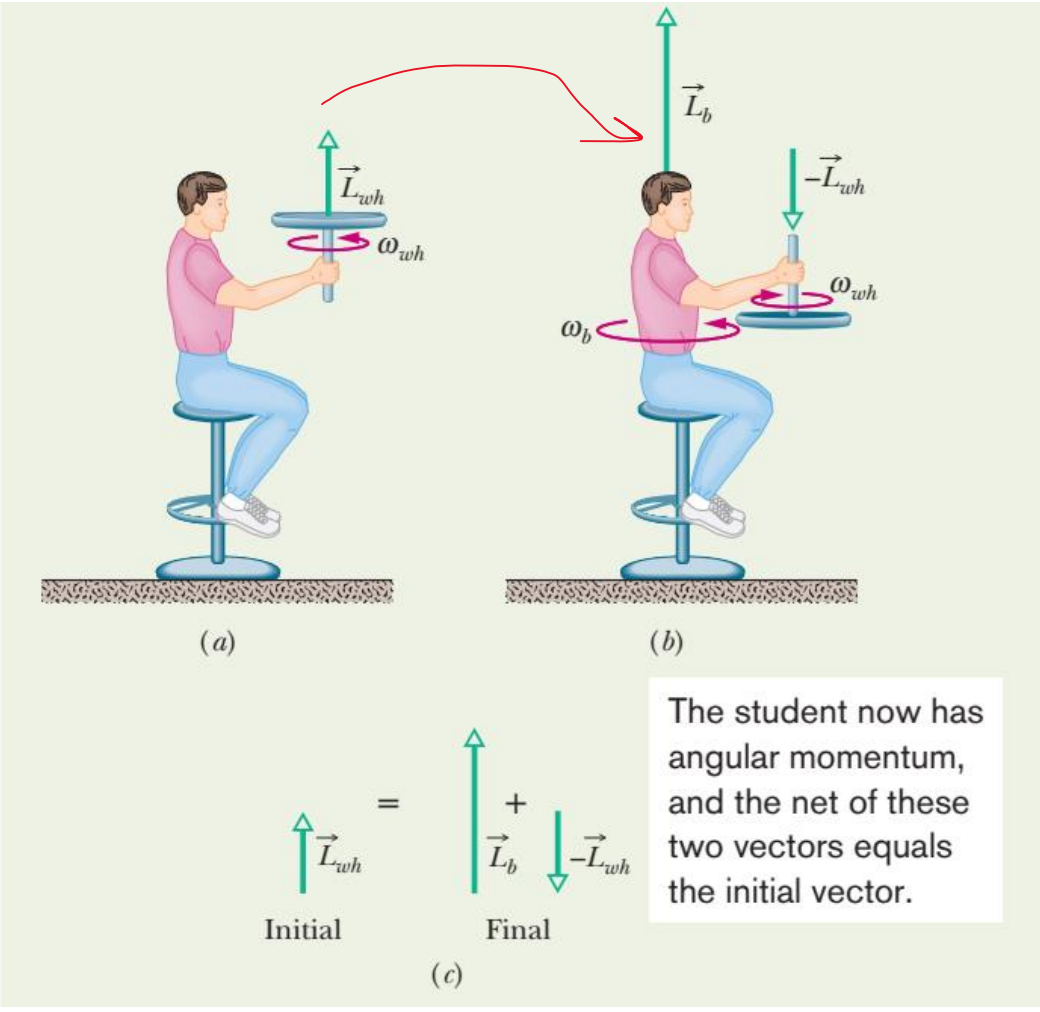
Από την (22.1) προκύπτει

$$\vec{L} = \text{a constant} \quad (\text{isolated system}). \quad (22.2)$$

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad (\text{isolated system}). \quad (22.3)$$

Στην περίπτωση που η  $I$  μεταβάλλεται μέσω μεταβολής της  $r$ , χωρίς όμως η μεταβολή να είναι αποτέλεσμα εξωτερικής ροπής η διατήρηση της στροφορμής επιβάλλει να μεταβληθεί η  $\omega$ . Τότε πρέπει αναγκαστικά να υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση που όμως δεν δικαιολογείται χωρίς την ύπαρξη δύναμης Coriolis

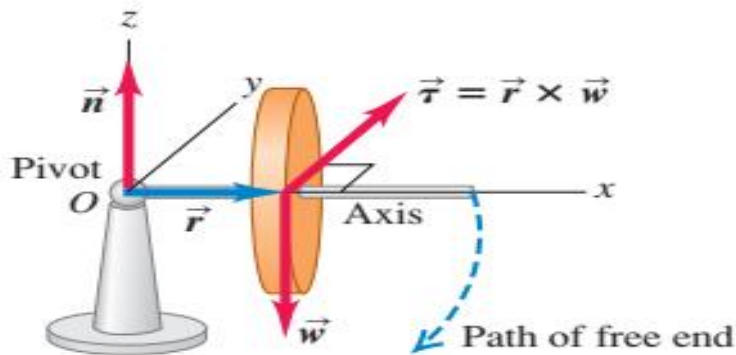




# ΓΥΡΟΣΚΟΠΙΟ

a) Χωρίς περιστροφή,  $L_i=0$

(a) Nonrotating flywheel falls



When the flywheel is not rotating, its weight creates a torque around the pivot, causing it to fall along a circular path until its axis rests on the table surface.

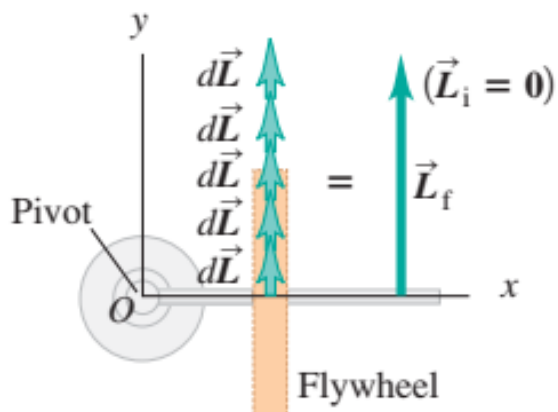
Το βάρος  $\vec{w}$  δημιουργεί ροπή  $\vec{\tau}$

Η οποία προκαλεί μεταβολή της Στροφορμής

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \longrightarrow d\vec{L} = \vec{\tau} dt$$

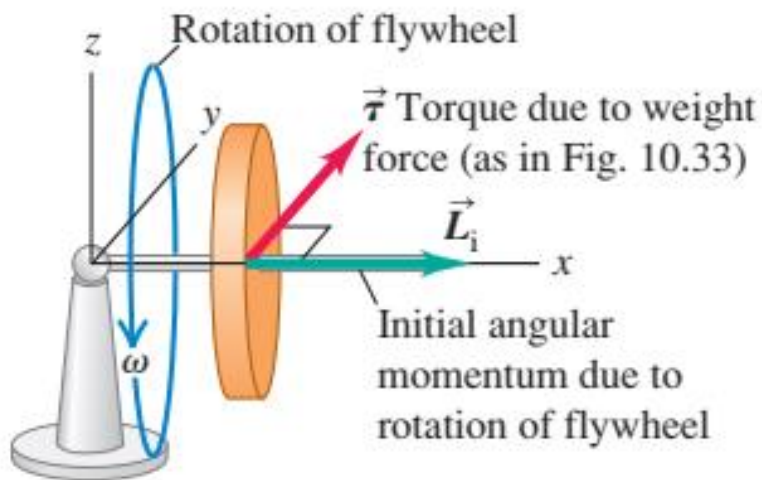
(22.4)

(b) View from above as flywheel falls



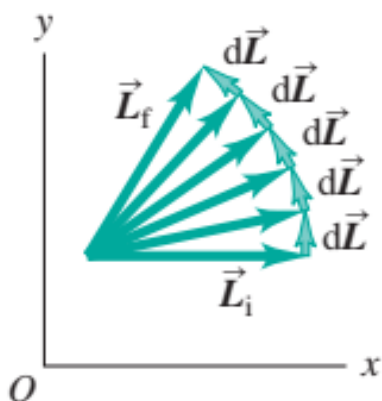
$$\int_0^L dL = \int_0^t \tau dt$$

b) Με περιστροφή,  $L_i$



(b) View from above

Now the effect of the torque is to cause the angular momentum to precess around the pivot. The gyroscope circles around its pivot without falling.

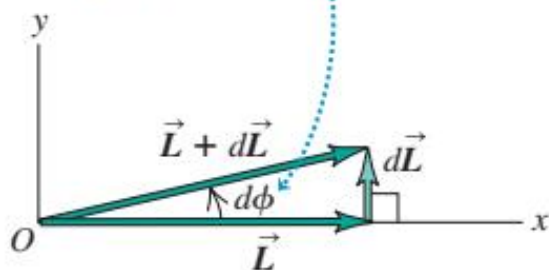


Η βαρυτική δύναμη προκαλεί ροπή όπως και πριν. Επειδή το μέτρο της  $L_i$  εξαρτάται μόνο από το  $\omega$ ,

$L = I\omega$  η ροπή του βάρους . Το γυροσκόπιο κινείται οριζόντια. Η κίνηση αυτή ονομάζεται **μετάπτωση**. Η γωνία  $\phi$  είναι η **γωνία μετάπτωσης**

**10.35** Detailed view of part of Fig. 10.34b.

In a time  $dt$ , the angular momentum vector and the flywheel axis (to which it is parallel) precess together through an angle  $d\phi$ .



$$\tan(d\phi) \cong d\phi = \frac{|d\vec{L}|}{|\vec{L}|} \quad (22.5)$$

Και  $\Omega$  είναι η **γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης**

$$\Omega = \frac{d\phi}{\delta t} = \frac{\frac{|d\vec{L}|}{|\vec{L}|}}{dt} = \frac{\tau_z}{L_z} = \frac{r\omega}{I\omega} \quad (22.6)$$

Η τριβή αυξάνει την  $\Omega$  !!!!!



$$\text{Για την Γη } \Omega = \frac{1 \text{ rev}}{26000 \text{ y}}$$

## 22. ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΒΑΡΥΤΗΤΑ

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{Newton's law of gravitation}).$$

(23.1)

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}. \quad (23.2)$$

ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΣΤΑΘΕΡΑ

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \\ = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2.$$

ΔΕΝ ΘΩΡΑΚΙΖΕΤΑΙ Η ΒΑΡΥΤΗΤΑ

ΜΗΛΟ ΠΡΟΣ ΤΗ ΓΗ  $g=9.81\text{ms}^{-2}$

ΓΗ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΛΟ  $g_r=1 \times 10^{-25}\text{ms}^{-2}$

$$\vec{F}_{1,\text{net}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \dots + \vec{F}_{1n}.$$

$$\vec{F}_{1,\text{net}} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{1i}. \quad (23.3)$$

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}, \quad (23.4)$$

$$F = G \frac{Mm}{r^2}.$$

$$F = ma_g.$$

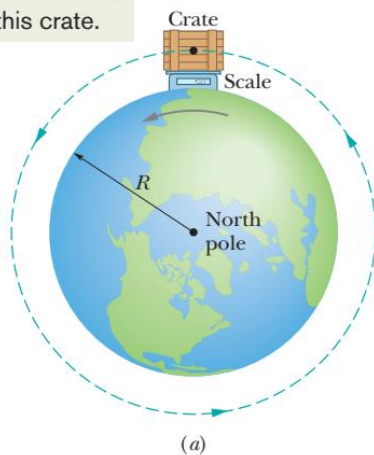
$$a_g = \frac{GM}{r^2}. \quad (23.5)$$

**Table 13-1**

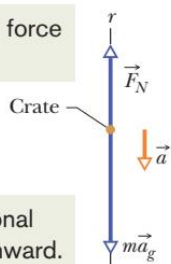
Variation of  $a_g$  with Altitude

Altitude (km)	$a_g$ (m/s <sup>2</sup> )	Altitude Example
0	9.83	Mean Earth surface
8.8	9.80	Mt. Everest
36.6	9.71	Highest crewed balloon
400	8.70	Space shuttle orbit
35 700	0.225	Communications satellite

Two forces act on this crate.



The normal force is upward.



The gravitational force is downward.

The net force is toward the center. So, the crate's acceleration is too.

Άξονας r

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_c \rightarrow \vec{F}_N + \vec{F}_g = \vec{F}_c \rightarrow F_N - ma_g = -ma_r \rightarrow F_N - ma_g = -m\omega^2 R \quad (23.6)$$

Οπότε

$$mg - ma_g = -m\omega^2 R \rightarrow g = a_g - \omega^2 R \quad (23.7)$$

$$\omega^2 R = 0.034 \text{ms}^{-2} \quad (23.8)$$

## Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

Μία μάζα  $m$  δέχεται βαρυτική δύναμη από μία άλλη μάζα  $M$  και κινείται από την θέση  $A$  με διάνυσμα θέσης  $\vec{r}_A$  στην θέση  $B$  με διάνυσμα θέσης  $\vec{r}_B$ .

Τότε

$$F = -\frac{dU}{dr} \rightarrow dU = -Fdr$$

Ολοκληρώνοντας

$$\int_A^B dU = -\int_A^B Fdr \rightarrow \Delta U = -\int_A^B G \frac{mM}{r^2} dr \rightarrow U_B - U_A = -GmM \int_A^B \frac{dr}{r^2} \rightarrow$$

$$U_B - U_A = -GmM \left[ -\frac{1}{r} \right]_A^B \rightarrow U_B - U_A = -GmM \left[ -\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} \right] \rightarrow U_B - U_A =$$

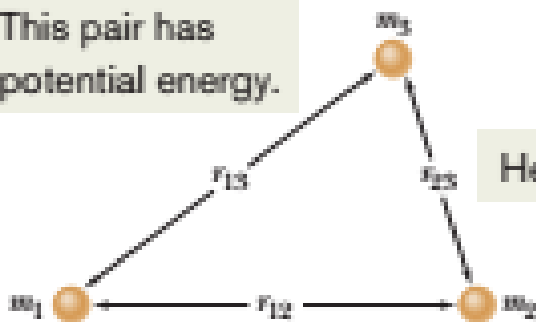
$$GmM \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \quad (23.9)$$

Εάν  $r_A \rightarrow \infty, U_A = 0$

$$U_B = -GmM \frac{1}{r_B} \quad (23.10)$$

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad (23.11)$$

This pair has potential energy.



Here too.

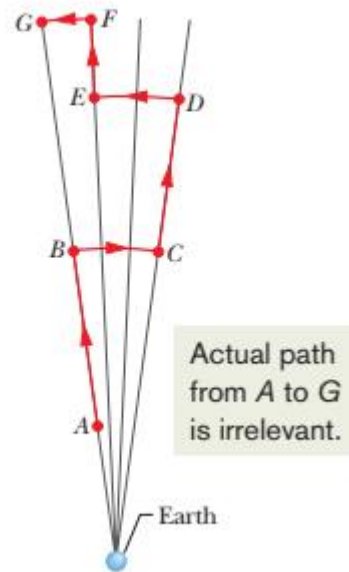
Here too.

$$U = - \left( \frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} \right)$$

Η ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

$$F = - \frac{dU}{dr} = - \frac{d}{dr} \left( - \frac{GMm}{r} \right)$$

$$= - \frac{GMm}{r^2}$$



## ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΔΙΑΦΥΓΗΣ

Ταχύτητα διαφυγής χαρακτηρίζεται η ελάχιστη αρχική ταχύτητα που θα πρέπει να αναπτύξει ένα σώμα (π.χ. ένας πύραυλος) προκειμένου να υπερικήσει τη βαρυτική έλξη που υφίσταται αυτό στην επιφάνεια ενός ουρανίου σώματος. Όταν φθάσει στο «άπειρο» η συνολική του ενέργεια να είναι μηδέν (αφού στο άπειρο η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν και η έννοια της ταχύτητας διαφυγής έχει να κάνει με το γεγονός ότι στο άπειρο η κινητική του ενέργεια του αντικειμένου είναι μηδέν). Οι παραπάνω συνθήκες ορίζουν την αρχική αυτή ταχύτητα ως ταχύτητα διαφυγής.

### Some Escape Speeds

Body	Mass (kg)	Radius (m)	Escape Speed (km/s)
Ceres <sup>a</sup>	$1.17 \times 10^{21}$	$3.8 \times 10^5$	0.64
Earth's moon <sup>a</sup>	$7.36 \times 10^{22}$	$1.74 \times 10^6$	2.38
Earth	$5.98 \times 10^{24}$	$6.37 \times 10^6$	11.2
Jupiter	$1.90 \times 10^{27}$	$7.15 \times 10^7$	59.5
Sun	$1.99 \times 10^{30}$	$6.96 \times 10^8$	618
Sirius B <sup>b</sup>	$2 \times 10^{30}$	$1 \times 10^7$	5200
Neutron star <sup>c</sup>	$2 \times 10^{30}$	$1 \times 10^4$	$2 \times 10^5$

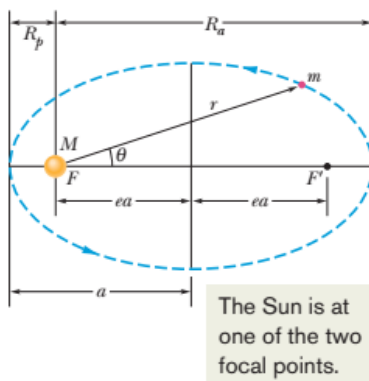
$$K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \left( -\frac{GMm}{R} \right) = 0.$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

### NOMOI KEPLER

#### 1. ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΤΡΟΧΙΩΝ

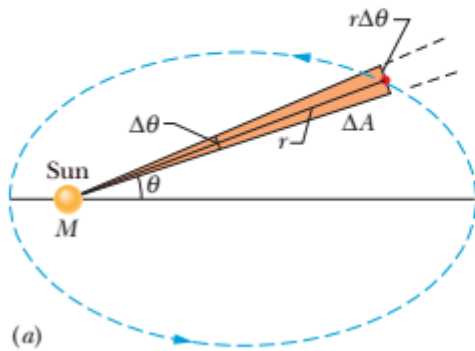
Όλοι οι πλανήτες κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές έχοντας τον Ηλιο σε μία εστία



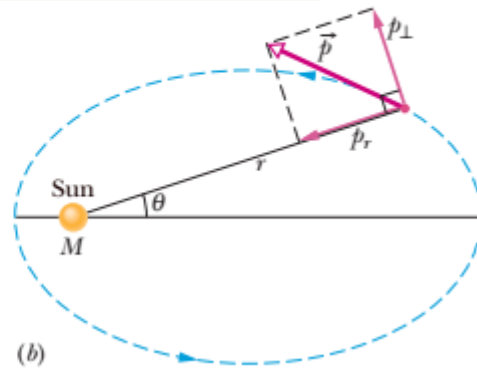
#### 2. Νόμος των Εμβαδών

Μία γραμμή που ενώνει τον πλανήτη με τον Ηλιο σαρώνει ίσα εμβαδά σε ίσα χρονικά διαστήματα στο επίπεδο της τροχιάς

The planet sweeps out this area.



These are the two momentum components.



$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

### 3. Νόμος των Περιόδων

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3 \quad (\text{law of periods}).$$

**Table 13-3**

**Kepler's Law of Periods for the Solar System**

Planet	Semimajor Axis $a$ ( $10^{10}$ m)	Period $T$ (y)	$T^2/a^3$ ( $10^{-34}$ $\text{y}^2/\text{m}^3$ )
Mercury	5.79	0.241	2.99
Venus	10.8	0.615	3.00
Earth	15.0	1.00	2.96
Mars	22.8	1.88	2.98
Jupiter	77.8	11.9	3.01
Saturn	143	29.5	2.98
Uranus	287	84.0	2.98
Neptune	450	165	2.99
Pluto	590	248	2.99

## 23. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

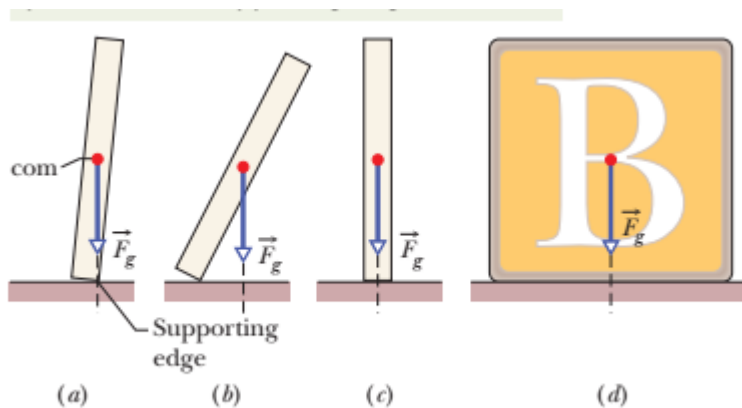
### ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

$$\vec{P} = \text{σταθερά και } \vec{L} = \text{σταθερά}$$

Η ορμή αναφέρεται ως προς το κέντρο μάζας και η Στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας ή ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο

### ΣΤΑΤΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

$$\vec{P} = 0 \text{ και } \vec{L} = 0$$



$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

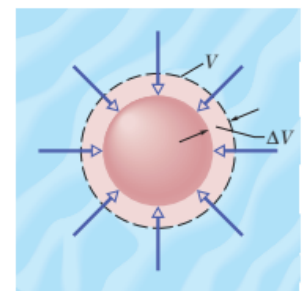
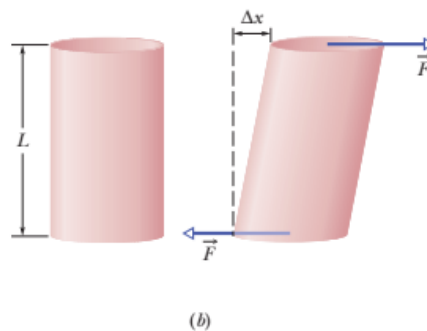
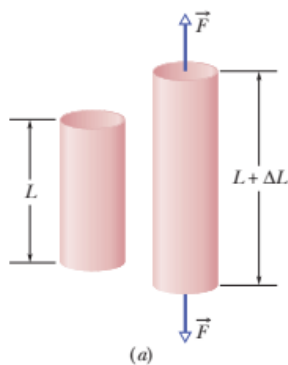
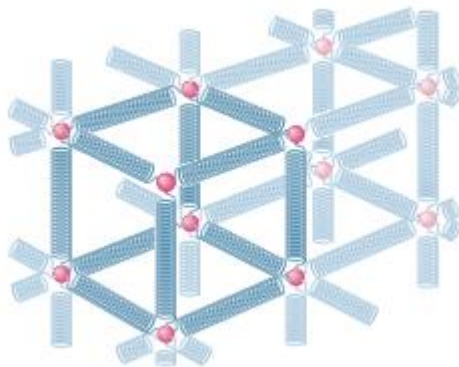
$$\vec{F}_{\text{net}} = 0 \quad (\text{balance of forces}).$$

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = 0 \quad (\text{balance of torques}).$$

## Κέντρο Βάρους

### Ελαστικότητα

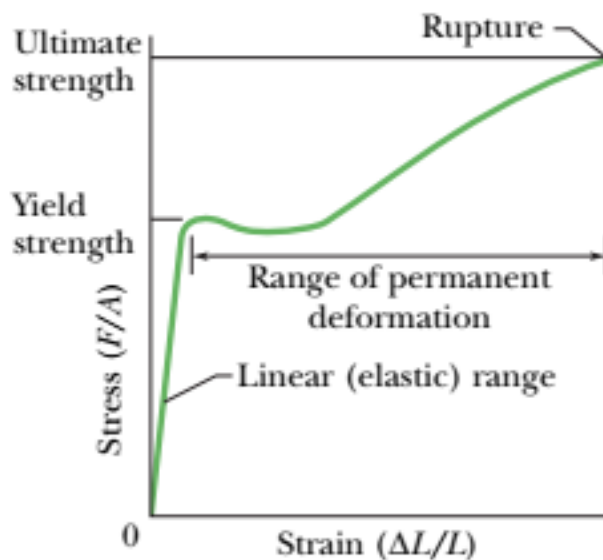


## Τάση - Εφελκυσμού - διατμητική – υδροστατική

**Διάτμηση** ονομάζεται η καταπόνηση που εμφανίζεται σε ένα σώμα όταν δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις ενεργούν κάθετα στον άξονα του.



Τάση = μέτρο ελαστικότητας x παραμόρφωση



Τάση = μέτρο ελαστικότητας x παραμόρφωση

Τάση εφέλκυσμού

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$

E , μέτρο ελαστικότητας του Young

Διάτμηση

$$\frac{F}{A} = G \frac{\Delta x}{L}$$

G , μέτρο Διάτμησης

Υδροστατική τάση

$$p = B \frac{\Delta V}{V}$$

Some Elastic Properties of Selected Materials of Engineering Interest

Material	Density $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Young's Modulus $E$ (10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup> )	Ultimate Strength $S_u$ (10 <sup>6</sup> N/m <sup>2</sup> )	Yield Strength $S_y$ (10 <sup>6</sup> N/m <sup>2</sup> )
Steel <sup>a</sup>	7860	200	400	250
Aluminum	2710	70	110	95
Glass	2190	65	50 <sup>b</sup>	—
Concrete <sup>c</sup>	2320	30	40 <sup>b</sup>	—
Wood <sup>d</sup>	525	13	50 <sup>b</sup>	—
Bone	1900	9 <sup>b</sup>	170 <sup>b</sup>	—
Polystyrene	1050	3	48	—

<sup>a</sup>Structural steel (ASTM-A36).

<sup>b</sup>In compression.

<sup>c</sup>High strength

<sup>d</sup>Douglas fir.

## 24. ΡΕΥΣΤΑ

Σαν ρευστό χαρακτηρίζουμε εκείνη την κατάσταση της ύλης η οποία έχει καθορισμένο όγκο αλλά όχι καθορισμένο σχήμα (παίρνει το ρευστό το σχήμα του δοχείου το οποίο βρίσκεται) σε αντίθεση με την στερεά κατάσταση όπου η ύλη έχει καθορισμένο όγκο και καθορισμένο σχήμα και την αέρια

κατάσταση όπου η ύλη ευρισκόμενη στην κατάσταση αυτή δεν έχει ούτε καθορισμένο όγκο ούτε καθορισμένο σχήμα. Αυτός ο διαχωρισμός είναι τεχνητός και τα όρια ανάμεσα στη ρευστή και στερεά κατάσταση είναι ασαφής. Για παράδειγμα η άσφαλτος και το πλαστικό θεωρούνται σαν στερεά αλλά μετά από μια μακρά χρονική περίοδο αρχίζουν να ρέουν όπως τα υγρά. **Στην πραγματικότητα εάν μία ουσία χαρακτηρίζετε σαν στερεή υγρή ή αέρια εξαρτάται από την θερμοκρασία και πίεση στην οποία βρίσκεται. Γενικά ο χρόνος που απαιτείται ώστε μία ουσία να αλλάξει σχήμα υπό την επίδραση μίας εξωτερικής δύναμής είναι εκείνος χαρακτηρίζει την ουσία σαν στερεή , υγρή η αέρια.** Η μηχανική των ρευστών σε ισορροπία ονομάζεται **υδροστατική** ενώ η μηχανική των ρευστών που βρίσκονται σε κίνηση σαν **υδροδυναμική**.

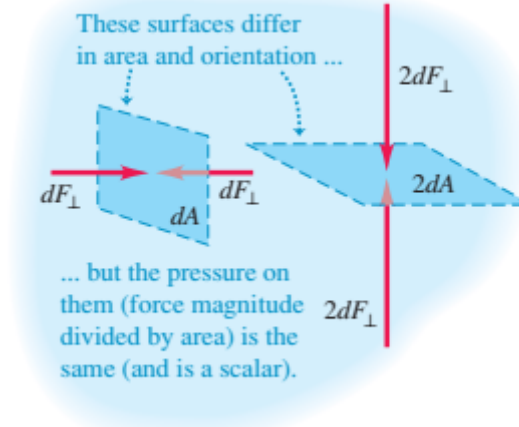
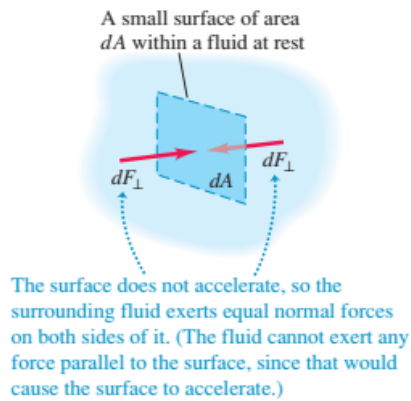
Στερεά  $m$ ----- $F$

Ρευστά  $\rho$ ----- $p$

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad \rho = \frac{m}{V} \quad (\text{uniform density}), \quad (25.1)$$

$$p = \frac{dF_{\perp}}{dA} \quad (\text{definition of pressure})$$

$$p = \frac{F_{\perp}}{A} \quad (25.2)$$



$$1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ torr} = 14.7 \text{ lb/in.}^2.$$

#### Some Pressures

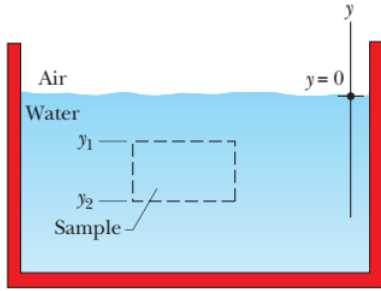
	Pressure (Pa)		Pressure (Pa)
Center of the Sun	$2 \times 10^{16}$	Automobile tire <sup>a</sup>	$2 \times 10^5$
Center of Earth	$4 \times 10^{11}$	Atmosphere at sea level	$1.0 \times 10^5$
Highest sustained laboratory pressure	$1.5 \times 10^{10}$	Normal blood systolic pressure <sup>a,b</sup>	$1.6 \times 10^4$
Deepest ocean trench (bottom)	$1.1 \times 10^8$	Best laboratory vacuum	$10^{-12}$
Spike heels on a dance floor	$10^6$		

## ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2).$$

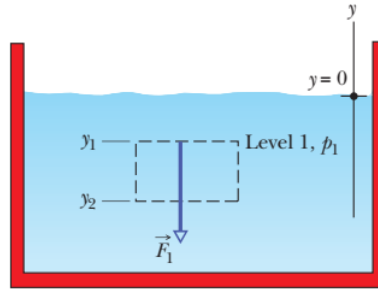
(25.3)

Three forces act on this sample of water.



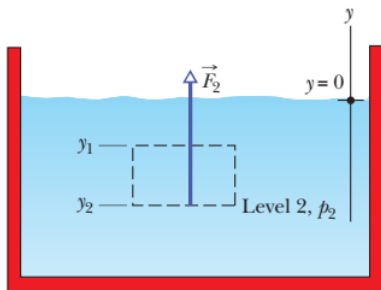
(a)

This downward force is due to the water pressure pushing on the *top* surface.



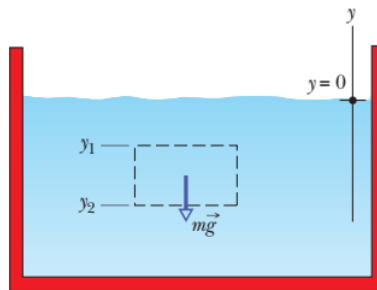
(b)

This upward force is due to the water pressure pushing on the *bottom* surface.

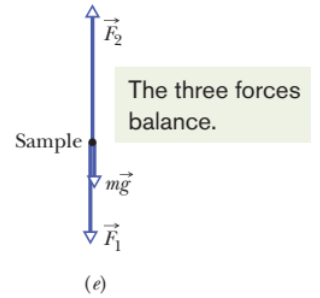


(c)

Gravity pulls downward on the sample.



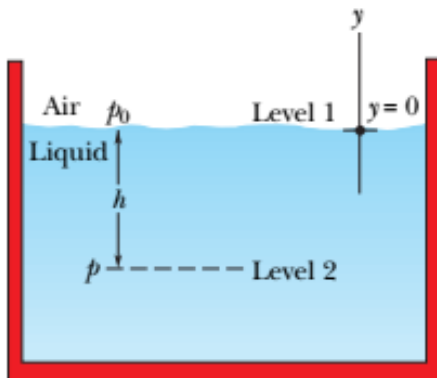
(d)



(e)

$$p = p_0 + \rho gh \quad (\text{pressure at depth } h).$$

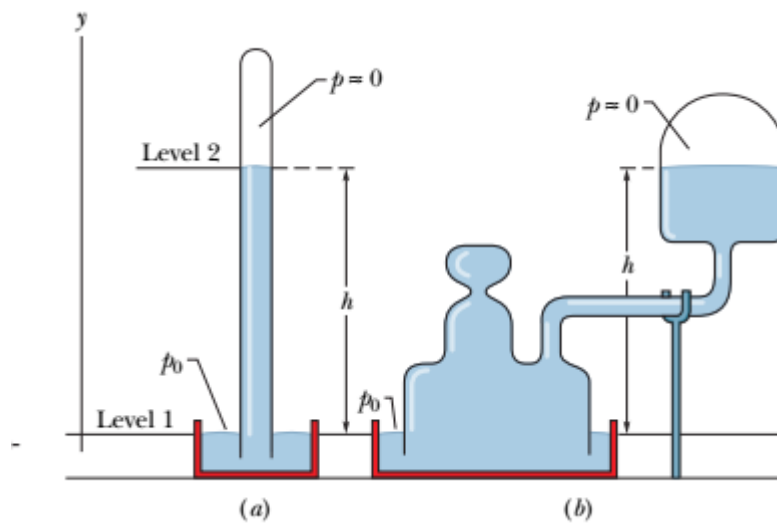
(25.4)



**Απόλυτη πίεση  $p$**

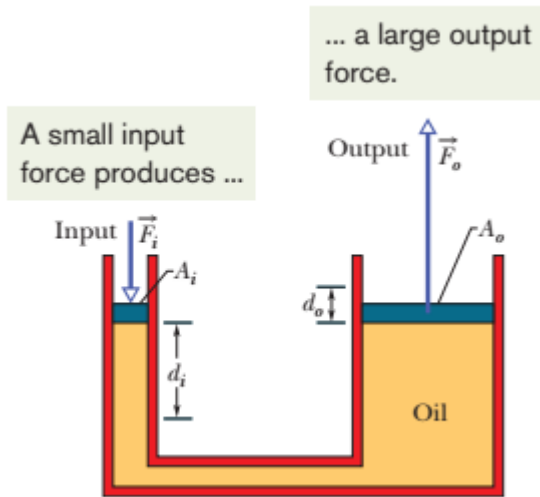
**Ατμοσφαιρική πίεση  $p_0$**

**Μανομετρική ή σχετική πίεση  $p - p_0$**



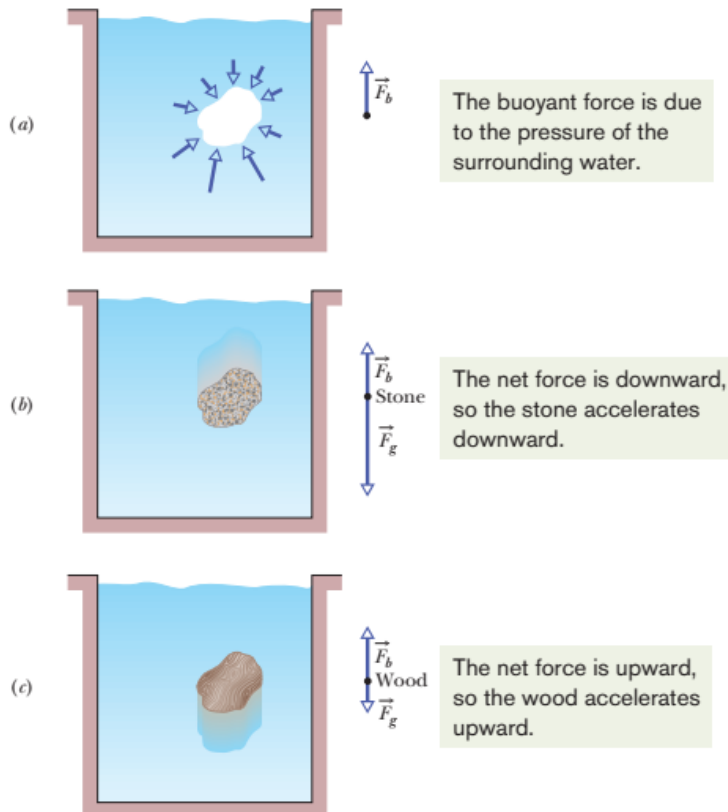
## **Αρχή του Pascal**

**Η μεταβολή της πίεσης που εφαρμόζεται σε ένα έγκλειστο ασυμπίεστο ρευστό μεταδίδεται αμείωτη σε κάθε τμήμα του ρευστού και τα τοιχώματα του δοχείου του**



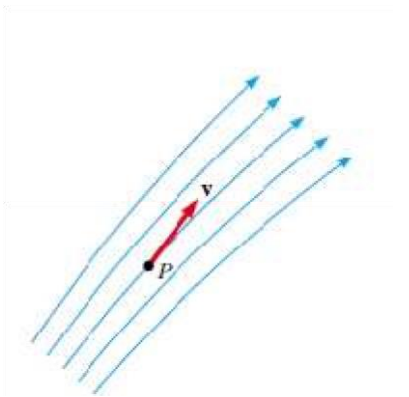
## Αρχή του Αρχιμήδη

$$F_b \equiv m_f g \quad (25.5)$$



## ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

Όταν τα ρευστά βρίσκονται σε κίνηση, δηλαδή ρέουν, η ροή τους διακρίνεται σε δύο τύπους την **ομαλή ή στρωτή** και την **τυρβώδη** .



Στην **ομαλή ροή** οι ρευματικές γραμμές δηλαδή οι τροχιές που ακολουθούν τα σωματίδια του ρευστού δεν τέμνονται. Επίσης η ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού που διέρχονται από μία διατομή παραμένει σταθερή. Αντίθετα στην **τυρβώδη ροή** οι τροχιές τέμνονται και σχηματίζονται μικρές δίνες σε όλη την έκταση της ρευματικής γραμμής . **Η ροή από κανονική μετατρέπεται σε τυρβώδη μετά από μια χαρακτηριστική κρίσιμη ταχύτητα του ρευστού**





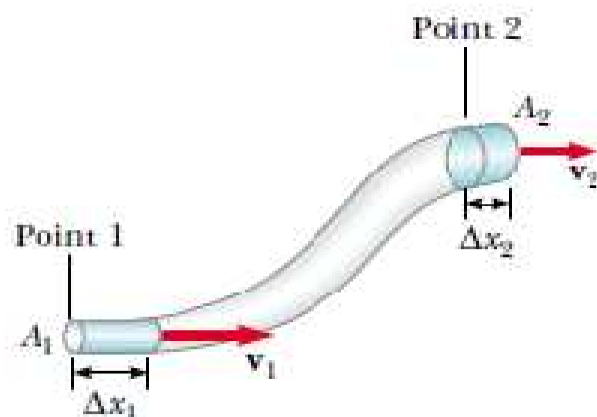
Τα ρευστά κατά την κίνησή τους εμφανίζουν τριβή ανάμεσα στα γειτονικά στρώματα του ρέστού που ολισθαίνουν μεταξύ τους. Αυτή η εσωτερική τριβή ανάμεσα στα στρώματα του ρευστού χαρακτηρίζεται με το μέγεθος **ιξώδες** το οποίο μας δείχνει τον βαθμό της εσωτερική αυτής τριβής εάν είναι μεγάλη η μικρή. Η εσωτερική τριβή ανάμεσα στα στρώματα του ρευστού μετατρέπει μέρος της κινητικής ενέργειας του ρευστού λόγω του ιξώδους σε εσωτερική ενέργεια.

Επειδή η κίνηση των πραγματικών ρευστών είναι πολύπλοκη η μελέτη τους απλοποιείται με τις ακόλουθες παραδοχές που περιγράφουν ένα ιδανικό ρευστό.

- Η ροή είναι χωρίς τριβές
- Η ροή είναι στρωτή
- Το ρευστό είναι ασυμπίεστο
- Η ροή είναι αστρόβιλη

Η ταχύτητα ενός σωματιδίου P στο ρευστό είναι πάντα κάθετη στην ρευματική γραμμή. Μία δέσμη ρευματικών γραμμών όπως φαίνεται σχηματίζουν ένα σωλήνα ροής. Στην στρωτή ροή οι ρευματικές γραμμές δεν τέμνονται και είναι περιορισμένες εντός των ορίων του σωλήνα ροής.

Θεωρούμε ένα ρευστό που ρέει σε ένα σωλήνα



Η μάζα του ρευστού στο σημείο -1 του σωλήνα είναι

$$m_1 = \rho V_1 = \rho A_1 \Delta x_1 = \rho A_1 v_1 \Delta t \quad (25.6)$$

ομοίως η μάζα του ρευστού στο σημείο -2

$$m_2 = \rho V_2 = \rho A_2 \Delta x_2 = \rho A_2 v_2 \Delta t \quad (25.7)$$

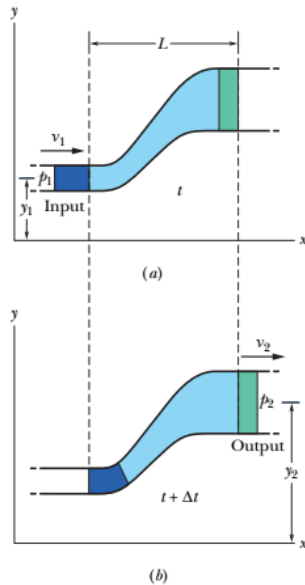
**Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο και η ροή είναι στρωτή, η μάζα του ρευστού στο σημείο 1 θα είναι ίση με τη μάζα στο σημείο – 2**

$$m_1 = m_2 \quad (25.7)$$

οπότε

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constant} \quad (25.8)$$

Η (25.8) είναι η **εξίσωση συνεχείας** για τα ρευστά



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2.$$

(25.9)

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{a constant} \quad (\text{Bernoulli's equation}).$$

(25.10)

Για ρευστό σε ηρεμία,  $v_1 = v_2 = 0$  η (2.59) γίνεται

$$p_2 = p_1 + \rho g (y_1 - y_2),$$

(25.11)

Στην περίπτωση που το ρευστό δεν αλλάζει ύψος ενώ ρέει

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{a constant} \quad (\text{Bernoulli's equation}).$$

,  $y = 0$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2,$$

(25.12)

## 26. ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

### Περιοδική κίνηση- Απλός Αρμονικός ταλαντωτής

Περιοδική ή Αρμονική κίνηση ή Ταλάντωση ή Δόνηση είναι η κίνηση εκείνη η οποία επαναλαμβάνεται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Η κίνηση αυτή είναι μία ειδική περίπτωση κίνησης η οποία συμβαίνει όταν η δύναμη που δρα σε ένα σώμα είναι ανάλογη της μετατόπισης του σώματος από κάποια θέση ισορροπίας και κατευθύνεται πάντα προς την θέση ισορροπίας . Η κίνηση είναι επαναλαμβανόμενη πίσω – μπρός ως προς την θέση αυτή.

Όταν ένα σώμα που εκτελεί Αρμονική κίνηση διέρχεται από το σημείο ισορροπίας, τότε η δυναμική του ενέργεια είναι ελάχιστη. Η σχέση που συνδέει την δύναμη  $F(x)$  με την δυναμική ενέργεια  $U(x)$  δίνεται από τη σχέση

$$F = - \frac{dU(x)}{dx} \quad (26.1)$$

Στην περίπτωση που η δυναμική ενέργεια ανάλογη του  $x^2$  όπως στην σχέση

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (26.2)$$

τότε η αλγεβρική τιμή της δύναμης μετά την παραγωγή της 1.1 δίνεται από τη σχέση

$$F = -kx \quad (26.3).$$

Και σε διανυσματική μορφή,

$$\text{Εάν } \vec{x} = x\hat{i}$$

Τότε

$$\vec{F} = -kx\hat{i} \quad (26.4)$$

Ενώ αν

$$\vec{x} = -x\hat{i}$$

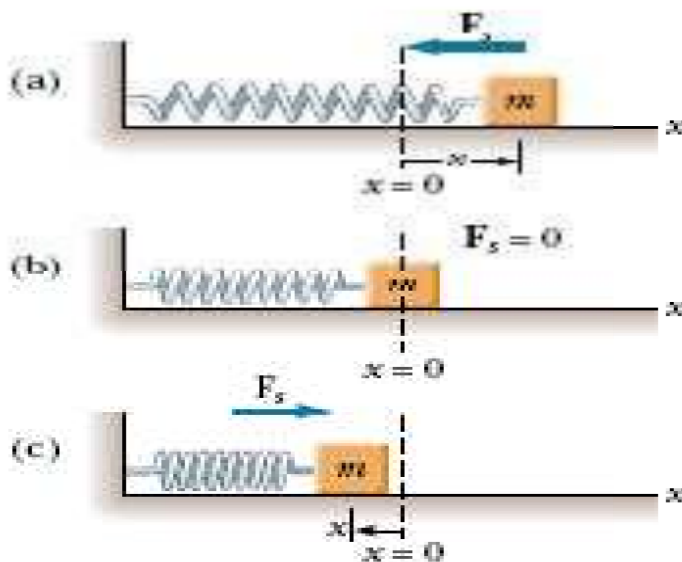
Τότε

$$\vec{F} = -k(-x\hat{i}) = kx\hat{i} \quad (26.5)$$

δηλαδή η δύναμη είναι πάντα αντίθετη της μετατόπισης.

Ένα τέτοιο ταλαντούμενο σώμα του οποίου η δυναμική ενέργεια δίνεται από τη σχέση 26.3 λέγεται **απλός αρμονικός ταλαντωτής** και η κίνηση του απλή **αρμονική ταλάντωση**. Ένα παράδειγμα απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι ένα σώμα μάζας  $m$  που

προσδένεται σε ένα ιδανικό αβαρές ελατήριο που είναι ελεύθερο να κινηθεί σε μία λεία επιφάνεια (Σχήμα 1)



Από τον δεύτερο νόμο του Νευτωνα

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow -kx\hat{i} = ma\hat{i} \rightarrow kx = -ma$$

$$kx + ma = 0 \rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (26.6)$$

Η εξίσωση αυτή που περιέχει παραγώγους ονομάζεται **διαφορική εξίσωση (ΔΕ)**. Η λύση της δίνει την μετατόπιση της μάζας σαν συνάρτηση του χρόνου.

Στην περίπτωση του ελατηρίου, η εξίσωση (26.3) αποτελεί τον νόμο του **Hooke** και η σταθερά  $k$  αποτελεί την σταθερά του ελατηρίου. Η ΔΕ (26.6) ισχύει για οποιονδήποτε απλό

αρμονικό ταλαντωτή όπου η σταθερά  $k$  μπορεί να σχετίζεται με άλλα χαρακτηριστικά του συστήματος.

Αποδεικνύεται ότι η λύση της (26.6) είναι η

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

(26.7)

όπου  $x_m$  είναι το πλάτος που είναι η μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

(26.8)

είναι η κυκλική συχνότητα ή γωνιακή ταχύτητα σε μονάδες  $\text{rad s}^{-1}$ .

$T$  είναι η περίοδος και

$$f = \frac{1}{T} \quad (26.9)$$

η συχνότητα σε Hz. Η συχνότητα μιας απλής αρμονικής κίνησης είναι ανεξάρτητη του πλάτους της κίνησης. Επίσης  $\phi$  είναι η **αρχική φάση** και η παράσταση  $(\omega t + \phi)$  η **φάση**.

Displacement at time  $t$

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

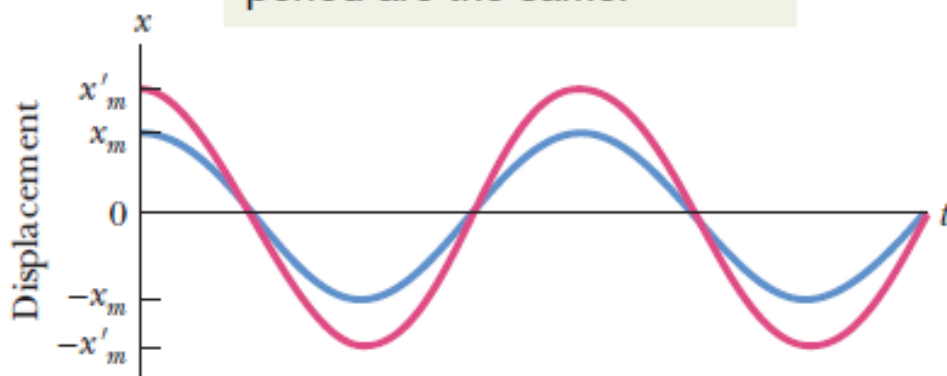
Amplitude

Angular frequency

Time

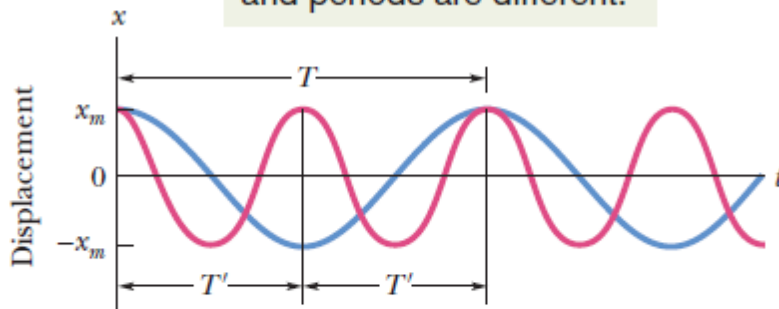
Phase constant or phase angle

The amplitudes are different, but the frequency and period are the same.



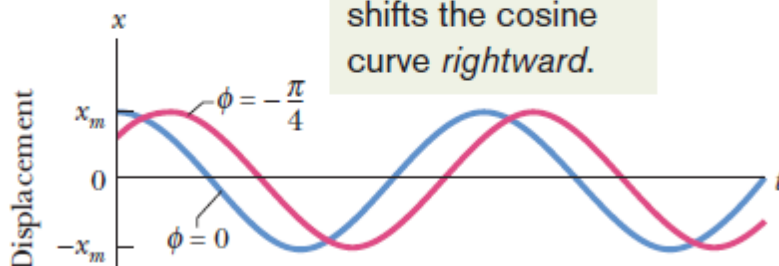


The amplitudes are the same, but the frequencies and periods are different.



(b)

This *negative* value shifts the cosine curve *rightward*.



This zero gives a regular cosine curve.

(c)

Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητα της κίνησης δίνεται από τη σχέση

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [x_m \cos(\omega t + \phi)]$$

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{velocity}).$$

(26.10)

**Με μέγιστη τιμή  $v_m = \omega x_m$  (26.11)**

Και η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [-\omega x_m \sin(\omega t + \phi)]$$

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{acceleration}).$$

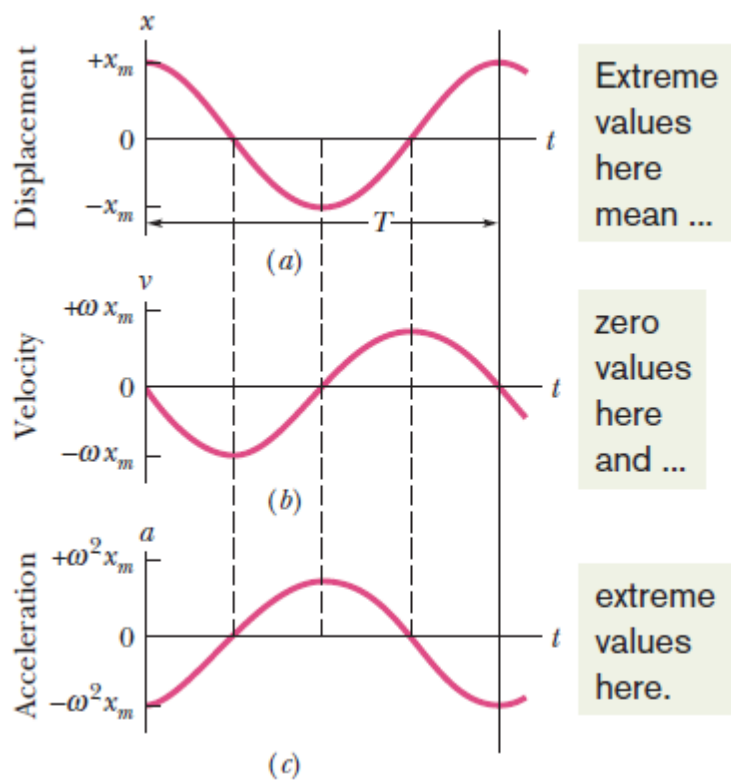
(26.12)

**Με μέγιστη τιμή την**

$$a_{\max} = \omega^2 x_m \quad (26.13)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t),$$

(26.14)



Εάν γνωρίζουμε την τιμή  $x(t)$  και την ταχύτητα  $v(t)$  σε μία χρονική στιγμή π.χ.

Για  $t=0$   $x=x_m$  και  $v=-x_m \omega$  βρίσκουμε την  $\omega$ .

Από τις σχέσεις

$$F = ma = -kx$$

$$a = -\omega^2 x$$

$$-kx = -m\omega^2 x$$

προκύπτει

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(26.13)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(26.14)

και

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (26.15)$$

Η συχνότητα  $f$  που δίνεται από την σχέση (26.15) και η είναι η συχνότητα που ταλαντώνεται το σώμα όταν αφεθεί ελεύθερο λέγεται **φυσική συχνότητα** ή **ιδιοσυχνότητα** του σώματος.

Η δυναμική ενέργεια σε οποιαδήποτε στιγμή

$$U(t) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi). \quad (26.16)$$

Η κινητική ενέργεια σε οποιαδήποτε τη στιγμή

$$K(t) = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi). \quad (26.17)$$

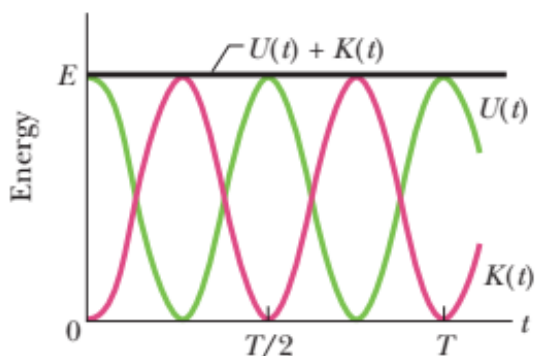
Οι μέγιστες τιμές τους είναι

$$U_{max} = \frac{1}{2} kx_m^2 \quad (26.18)$$

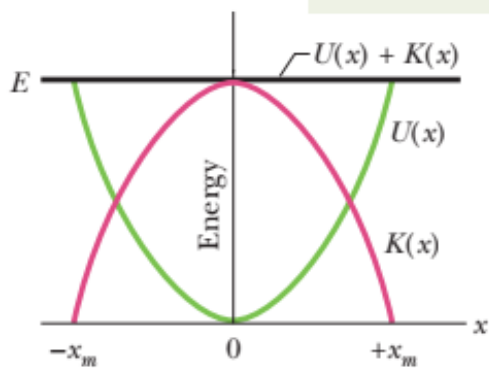
$$K_{max} = \frac{1}{2} kx_m^2 \quad (26.19)$$

Η ολική μηχανική ενέργεια είναι

$$E = U + K = \frac{1}{2}kx_m^2 \quad (26.20)$$



(a) As time changes, the energy shifts between the two types, but the total is constant.



## ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Εάν η απλή αρμονική κίνηση υπόκειται σε τριβές τότε η κίνηση εξασθενεί λόγω της τριβής και λέγεται **φθίνουσα αρμονική κίνηση**.

Θεωρώντας ότι η δύναμη της τριβής είναι αντίθετη και ανάλογη της ταχύτητας

$$f_k = -bv \quad (26.21)$$

η διαφορική εξίσωση της κίνησης γίνεται

$$\vec{F} + \vec{f}_k = m\vec{a} \rightarrow -kx\hat{i} - bv\hat{i} = ma\hat{i} \rightarrow kx + bv = -ma$$

$$m \frac{dx^2}{dt} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (26.27)$$

όπου  $b$  σταθερά αναλογίας (σταθερά απόσβεσης).

Εάν η  $b$  είναι μικρή, η λύση της

ΔΕ (26.27) δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi),$$

(26.28)

Όπου

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (26.29)$$

Εάν  $b=0$  τότε παίρνουμε την

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Εάν

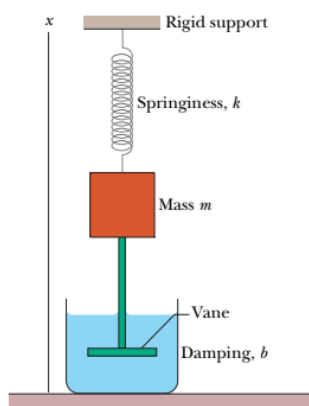
$$b \ll 2\sqrt{m}$$

Τότε

$$\omega \cong \omega'$$

Απώλεια ενέργειας

$$E(t) \approx \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}, \quad (26.30)$$



Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.12) και (1.24)

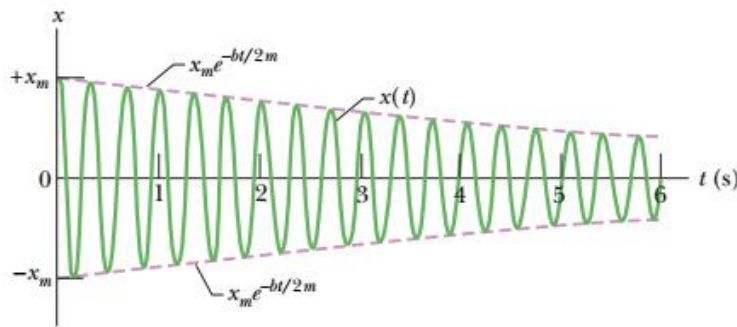
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

η συχνότητα  $f' < f$  είναι μικρότερη και η  $T' > T$  από την κίνηση χωρίς τριβή. Η τριβή κάνει πιο αργή την κίνηση. Για  $b=0$  έχουμε  $\omega' = \omega$ .



Το πλάτος της κίνησης βαθμιαία μειώνεται στο μηδέν. Ο χρόνος  $\tau$  μέσα στον οποίο το πλάτος πέφτει στο  $1/e$  της αρχικής τιμής του λέγεται μέσος χρόνος ζωής της ταλάντωσης



Εάν στη σχέση (26.28)

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi),$$

θέσουμε  $t = \tau$ , προκύπτει ότι

$$\tau = \frac{2m}{b} \quad (26.31)$$

Στην περίπτωση που

$$\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = 0 \quad \text{ογ} \quad b = 2\sqrt{km}$$

η διαφορετικά όταν το  $b$  αποκτήσει την κρίσιμη τιμή  $b_c$ ,

$$b_c = 2m\omega \quad (26.32)$$

τότε

τότε το σύστημα δεν ταλαντώνεται και λέμε ότι είναι **κρίσιμα αποσβενύμενο**. Στην περίπτωση αυτή όταν το σύστημα αφεθεί από την θέση ισορροπίας γυρίζει στην θέση ισορροπίας και παραμένει εκεί.

Εάν  $b > b_c$

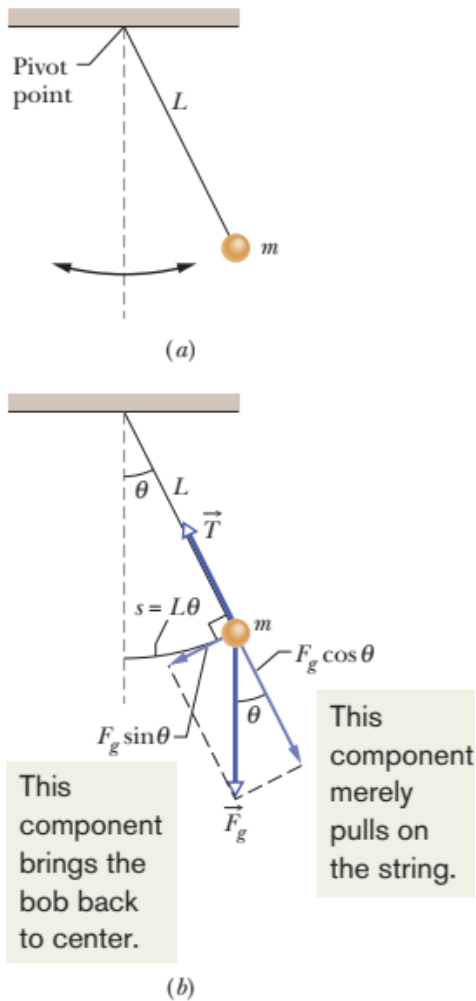
δηλαδή η τριβή είναι μεγάλη το  $b$  γίνεται τόσο μεγάλο που το υπόρριζο στην σχέση

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

γίνεται αρνητικό και η σχέση (26.28) δεν είναι πλέον λύση της ΔΕ, η κίνηση δεν είναι καν περιοδική. Το σώμα όταν το σύστημα αφεθεί από την θέση ισορροπίας γυρίζει στην θέση ισορροπίας και παραμένει εκεί αλλά κάνει πολύ περισσότερο χρόνο να γυρίσει από ότι στην προηγούμενη περίπτωση. Η λύση της ΔΕ είναι η

$$x = C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t} \quad (26.33)$$

## ΑΠΛΟ ΕΚΡΕΜΜΕΣ



$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F}_{gx} = -L\hat{j} \times mg\sin\theta(-\hat{i}) = Lmg\sin\theta(\hat{j} \times \hat{i}) \rightarrow \\ \vec{\tau} &= -Lmg\sin\theta\hat{k}\end{aligned}\quad (26.34)$$

Όμως

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

Οπότε

$$\vec{\alpha} = -\frac{mg\sin\theta}{I}\hat{k}\quad (26.35)$$

Για  $\theta$  (σε  $rad$ ) μικρό,  $\sin\theta \simeq \theta$   
Με αλγεβρική τιμή

$$\alpha = -\frac{mgL}{I} \theta. \quad (26.36)$$

Ισχύει στην απλή αρμονική κίνηση

$$a(t) = -\omega^2 x(t), \quad (26.14)$$

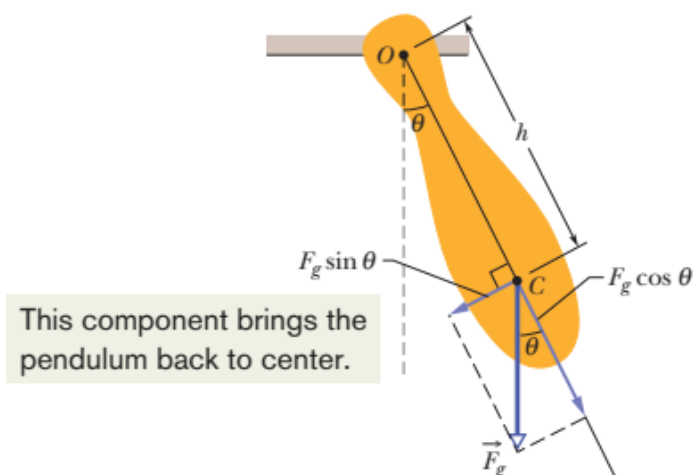
Οπότε

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}. \quad (26.15)$$

$$I = mL^2 \quad (26.16)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (26.17)$$

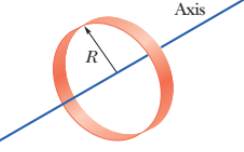
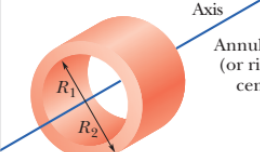
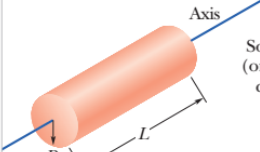
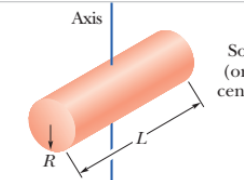
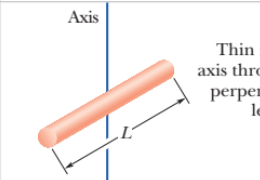
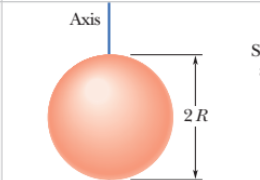
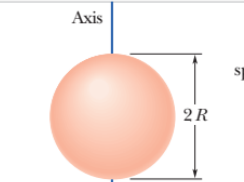
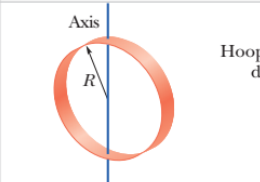
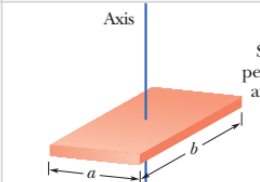
## ΦΥΣΙΚΟ ΕΚΡΕΜΜΕΣ



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

Table 10-2

Some Rotational Inertias

 <p>Hoop about central axis</p> <p><math>I = MR^2</math> (a)</p>	 <p>Annular cylinder (or ring) about central axis</p> <p><math>I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)</math> (b)</p>	 <p>Solid cylinder (or disk) about central axis</p> <p><math>I = \frac{1}{2}MR^2</math> (c)</p>
 <p>Solid cylinder (or disk) about central diameter</p> <p><math>I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2</math> (d)</p>	 <p>Thin rod about axis through center perpendicular to length</p> <p><math>I = \frac{1}{12}ML^2</math> (e)</p>	 <p>Solid sphere about any diameter</p> <p><math>I = \frac{2}{5}MR^2</math> (f)</p>
 <p>Thin spherical shell about any diameter</p> <p><math>I = \frac{2}{3}MR^2</math> (g)</p>	 <p>Hoop about any diameter</p> <p><math>I = \frac{1}{2}MR^2</math> (h)</p>	 <p>Slab about perpendicular axis through center</p> <p><math>I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)</math> (i)</p>

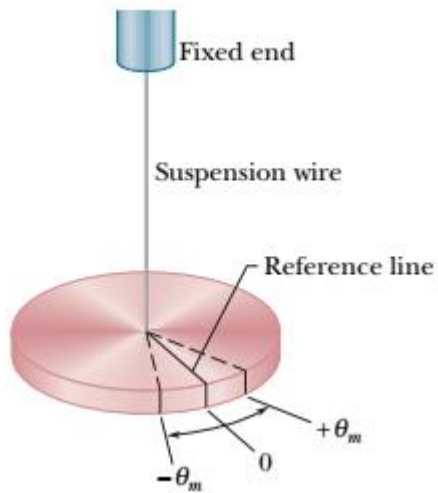
Για λεπτή ράβδο (e)

$$I = I_{\text{com}} + mh^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2. \quad (26.18)$$

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}.$$

(26.19)

## Στροφικό εκκρεμές



$$\tau = -\kappa\theta.$$

(26.20)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

(26.21)

## **ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ**

Εάν στο σώμα ασκείται μία εξωτερική περιοδική δύναμη τότε εκτελεί **εξαναγκασμένη περιοδική** κίνηση. Η αντίστοιχη ταλάντωση λέγεται **εξαναγκασμένη ταλάντωση**. Εάν θεωρήσουμε ότι η εξωτερική περιοδική δύναμη δίνεται από τη σχέση

$$F'' = F_m \cos(\omega_d t)$$

(26.22)

τότε η διαφορική εξίσωση της κίνησης γίνεται

$$\vec{F} + \vec{f}_k + \vec{F}'' = m\vec{a} \rightarrow -kx\hat{i} - bv\hat{i} + F''\hat{i} = ma\hat{i} \rightarrow$$

$$ma + kx + bv = F_m \cos(\omega_d t) \quad (26.23)$$

Η σχέση (26.23) αποτελεί την ΔΕ της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

Η λύση της ΔΕ (26.23) δίνεται από τη σχέση

$$x = \frac{F_m}{G} \sin(\omega_d t - \varphi) \quad (26.24)$$

Με

$$G = \sqrt{m^2(\omega_d^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega_d^2} \quad (26.25)$$

Και

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{b\omega_d}{G} \quad (26.26)$$

Ενώ το πλάτος είναι

$$x'_m = \frac{F_m}{G} \quad (26.27)$$

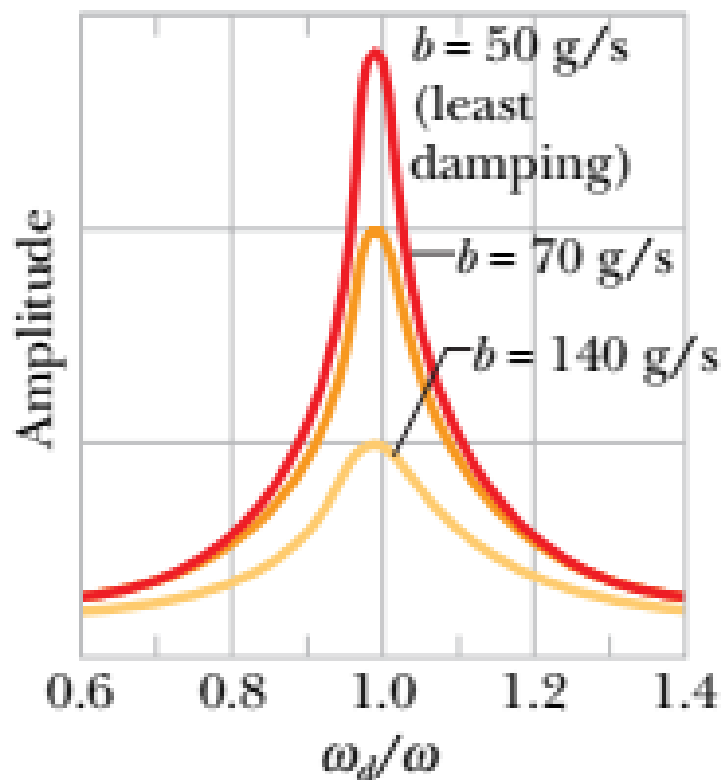


Από τη σχέση (26.24) προκύπτει ότι η εξαναγκασμένη ταλάντωση έχει την συχνότητα της εξωτερικής δύναμης και όχι τη φυσική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα)  $f$  του σώματος. Η απόκριση όμως του σώματος εξαρτάται από την σχέση μεταξύ εξωτερικής συχνότητας και της φυσικής συχνότητας. Η κίνηση είναι αμείωτη αρμονική κίνηση με συχνότητα  $f''$ .

**Στην περίπτωση που δεν υπάρχει τριβή  $b=0$  και  $\omega=\omega_d$**  ο παράγοντας  $G=0$  και το πλάτος  $x'_m$  γίνεται άπειρο. Στην πραγματικότητα υπάρχει πάντα κάποια τριβή και έτσι στην πράξη το  $x_m'$  γίνεται πολύ μεγάλο αλλά πεπερασμένο.

Όταν έχουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση υπάρχει μία χαρακτηριστική τιμή της εξωτερικής συχνότητας  $f''$  για την οποία το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο. Η κατάσταση αυτή λέγεται **συντονισμός** και η συχνότητα

για την οποία συμβαίνει συντονισμός λέγεται συχνότητα συντονισμού. Όσο πιο μικρή είναι η σταθερά  $b$  τόσο η συχνότητα συντονισμού πλησιάζει την φυσική συχνότητα ταλάντωσης. Για μικρό  $b$  η συχνότητα συντονισμού ισούται πρακτικά με  $f$ .

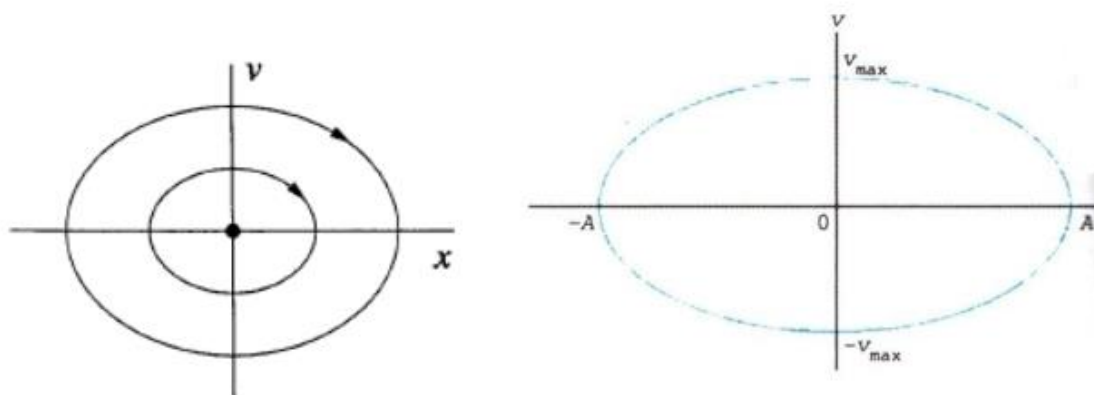


## ΧΑΟΣ

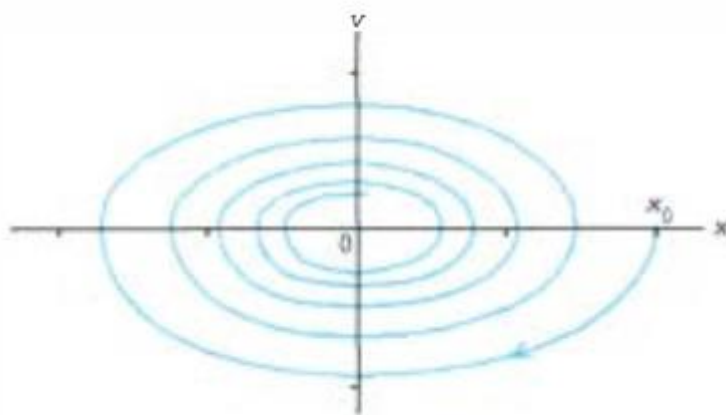
Σε ένα αρμονικό ταλαντωτή οι εξισώσεις δίνουν την θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση σε οποιαδήποτε μεταγενέστερη χρονική στιγμή, εφόσον έχουν δοθεί οι τιμές της αρχικής μετατόπισης  $x_0$  και αρχικής ταχύτητας  $v_0$ . Οποιοδήποτε σύστημα του οποίου την κίνηση μπορούμε να προβλέψουμε πλήρως, εφόσον γνωρίζουμε τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες ονομάζεται **αιτιοκρατικό σύστημα**. Στη φύση όμως υπάρχουν συστήματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, αλλά η χρονική τους εξέλιξη δεν μπορεί να περιγραφεί ή μπορεί να προβλεφθεί σε μικρό μόνο βαθμό. Τα συστήματα αυτά ονομάζονται **χαοτικά**.

**Το χαρακτηριστικό των χαοτικών συστημάτων είναι η ευαισθησία τους στις αρχικές συνθήκες. Μια μικρή αλλαγή στις αρχικές συνθήκες προκαλεί μια μεγάλη αλλαγή στο τελικό αποτέλεσμα.** Για την μελέτη των χαοτικών συστημάτων χρησιμοποιούμε **το χώρο των φάσεων**. Ο χώρος των φάσεων είναι ένας καρτεσιανός (ορθογώνιος χώρος) με συντεταγμένες τις μεταβλητές που χρειάζονται για να περιγραφεί πλήρως το σύστημα. Το πλήθος των μεταβλητών αυτών μας δίνει και το πλήθος των αρχικών συνθηκών. Για παράδειγμα εάν εξετάσουμε τον απλό αρμονικό ταλαντωτή χωρίς τριβές τότε ο φασικός χώρος είναι δυο διαστάσεων με μεταβλητές την θέση  $x$  και την ταχύτητα  $v$ . Ένα σημείο στο χώρο των φάσεων αντιπροσωπεύει τη στιγμιαία θέση και ταχύτητα του σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

## Ο χώρος των φάσεων για ένα αρμονικό ταλαντωτή



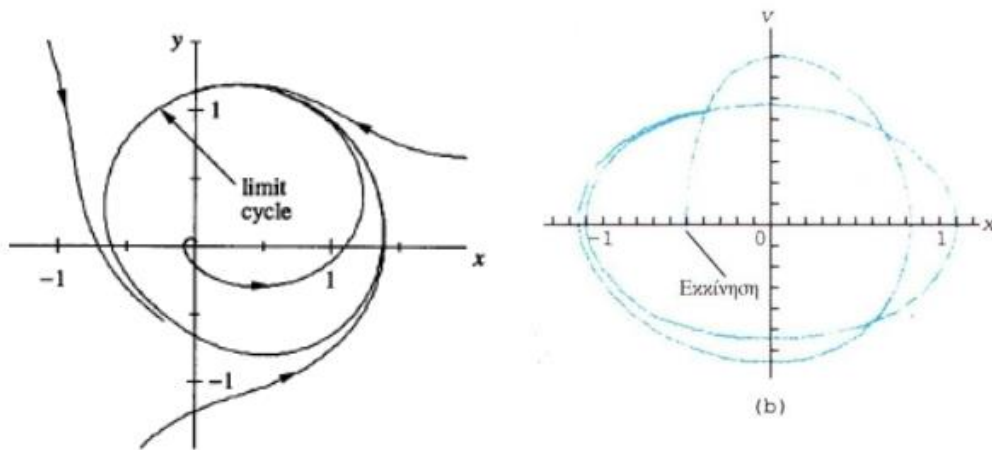
Εάν τώρα η κίνηση είναι φθίνουσα αρμονική τότε ο φασικός χώρος παριστάνεται



## Στην περίπτωση της εξαναγκασμένης περιοδικής κίνησης

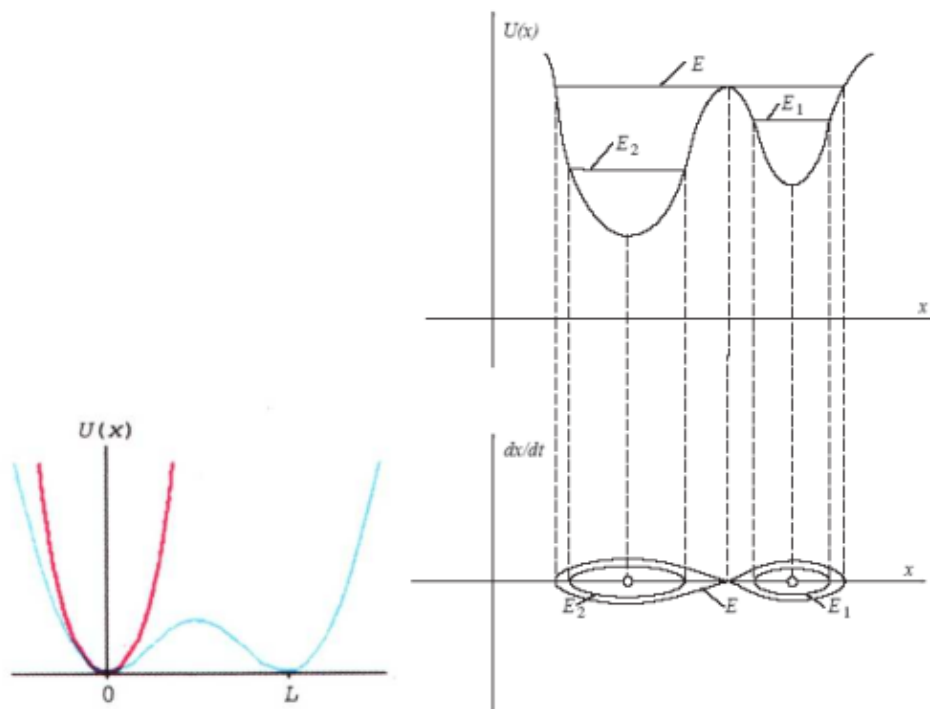
Η κίνηση μπορεί να ξεκινήσει με ένα μεταβατικό ακανόνιστο τρόπο αλλά θα καταλήξει σε αρμονική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_d$  και θα απεικονίζεται με μία έλλειψη στον χώρο των φάσεων που

ονομάζεται **οριακός κύκλος** γιατί σε αυτήν καταλήγουν τελικά όλες οι τροχιές. Η επίδραση των οριακών συνθηκών είναι μεταβατικό φαινόμενο που εξασθενεί μετά από πολύ χρόνο αφήνοντας το σύστημα σε μια μόνιμη κατάσταση που είναι ανεξάρτητη από τις αρχικές συνθήκες.



Αν θεωρήσουμε τώρα ένα ελατήριο που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση αλλά η δυναμική ενέργεια περιγράφεται από την σχέση

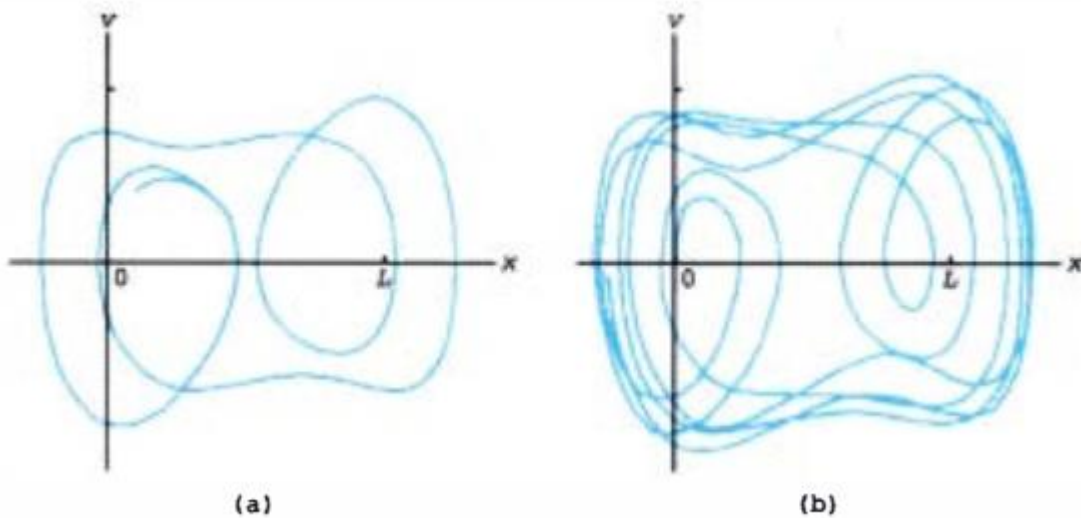
$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 \left( 1 - \frac{x}{L} \right)^2 \quad (26.28)$$



Στην περίπτωση που  $x \ll L$  παίρνουμε το φασικό διάγραμμα του αρμονικού ταλαντωτή. Εάν το  $x$  είναι μεγάλο τότε οι συναρτήσεις του δυναμικού διαφέρουν αρκετά.

Εάν τώρα η  $F_m$  γίνει μεγάλη τότε το σώμα ταλαντώνεται ανάμεσα σε δύο καταστάσεις δυναμικής ενέργειας και το φασικό διάγραμμα

(α)



Για μια κρίσιμη τιμή της  $Fm$  δεν υπάρχει κλειστή καμπύλη στον χώρο των φάσεων αλλά ένα πολύπλοκο σχήμα σαν κουβάρι που ονομάζεται χαοτικός ή παράξενος **ελκυστής**. Το σώμα φαίνεται να ταλαντώνεται πότε στο ένα πότε στο άλλο πηγάδι δυναμικού η περιφέρεται μεταξύ των δύο χωρίς συγκεκριμένες τάσεις. Λέμε τότε ότι η κίνηση είναι χαοτική. **Χαρακτηριστικό της χαοτικής κίνησης είναι η ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες**. Όταν αφήσουμε το σύστημα να ξεκινήσει από δύο ελαφρώς διαφορετικές αρχικές συνθήκες που απεικονίζονται από δύο διαφορετικά γειτονικά σημεία στον χώρο των φάσεων οι δύο κινήσεις που θα προκύψουν θα αποκλίνουν πολύ γρήγορα η μία από την άλλη.

Η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου θα δίνεται από τη σχέση

$$F(x) = -kx \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \quad (26.29)$$

και η διαφορική εξίσωση θα δίνεται από τη σχέση

$$ma + kx \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{2x}{L}\right) + bv = F_m \cos(\omega_d t) \quad (26.30)$$

Η (26.30) λύνεται μόνο αριθμητικά