

Ασκήσεις

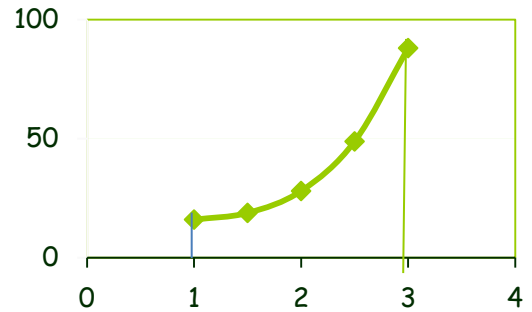
1. Να βρεθούν τα ορισμένα ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων για τιμές του x από 1 έως 3.

(a) $f(x) = x^4 - x^2 + 16$ (b) $f(x) = x - 3/x$ (c) $f(x) = -5x^4$

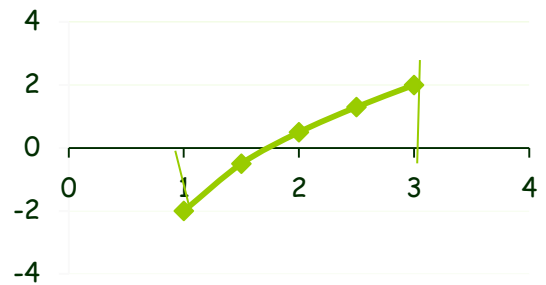
(d) $f(x) = (x+2)^5$ (e) $f(x) = 3x^2 + 5\sqrt{x} - 2$

Λύσεις

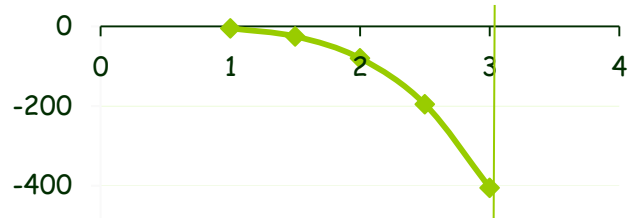
$$\begin{aligned} \text{a) } \int_1^3 (x^4 - x^2 + 16) dx &= x^5/5 - x^3/3 + 16x \Big|_1^3 = \\ &= 3^5/5 - 3^3/3 + 16 \cdot 3 - (1^5/5 - 1^3/3 + 16 \cdot 1) = \\ &= 243/5 - 9 + 48 - (1/5 - 1/3 + 16) = \\ &= 108,6 + 39 - (0,20 - 0,33 + 16) = 147,6 - 15,87 = 132 \end{aligned}$$



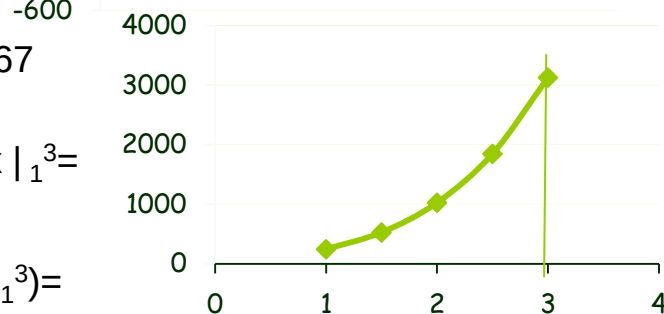
$$\begin{aligned} \text{b) } \int_1^3 (x - 3/x) dx &= x^2/2 - 3 \ln x \Big|_1^3 = \\ &= 3^2/2 - 3 \ln 3 - (1^2/2 - 3 \ln 1) = \\ &= 9/2 - 3 \ln 3 - 1/2 + 3 \ln 1 = 4 - 3 \ln 3 \end{aligned}$$



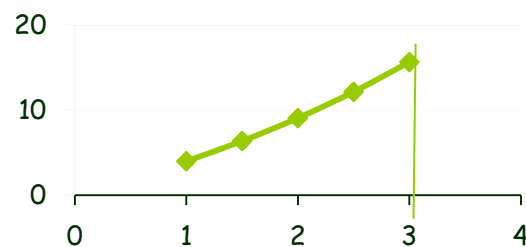
$$\begin{aligned} \text{c) } \int_1^3 (-5x^4) dx &= -x^5 \Big|_1^3 = \\ &= -3^5 - (-1^5) = -9 \cdot 9 \cdot 3 + 1 = -242 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{d) } \int_1^3 (x+2)^5 dx &= \int_1^3 (x+2)^5 d(x+2) = \\ &= (x+2)^6/6 \Big|_1^3 = (3+2)^6/6 - (1+2)^6/6 = \\ &= (5^6 - 3^6)/6 = (25 \cdot 25 \cdot 25 - 9 \cdot 9 \cdot 9)/6 = 2482,67 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{e) } \int_1^3 (3x^2 + 5\sqrt{x} - 2) dx &= x^3 + 5x^{3/2} / 3/2 - 2x \Big|_1^3 = \\ &= x^3 + 10/3 \sqrt{x^3} - 2x \Big|_1^3 = \\ &= x^3 + 10/3 \sqrt{x^3} - 2x \Big|_1^3 - (x^3 + 10/3 \sqrt{x^3} - 2x \Big|_1^3) = \\ &= 27 + 10/3 \sqrt{27} - 2 \cdot 3 - (1^3 + 10/3 \sqrt{1} - 2 \cdot 1) = \\ &= 27 + 17,1 - 6 - 1 - 3,333 + 2 = 37,77 \end{aligned}$$



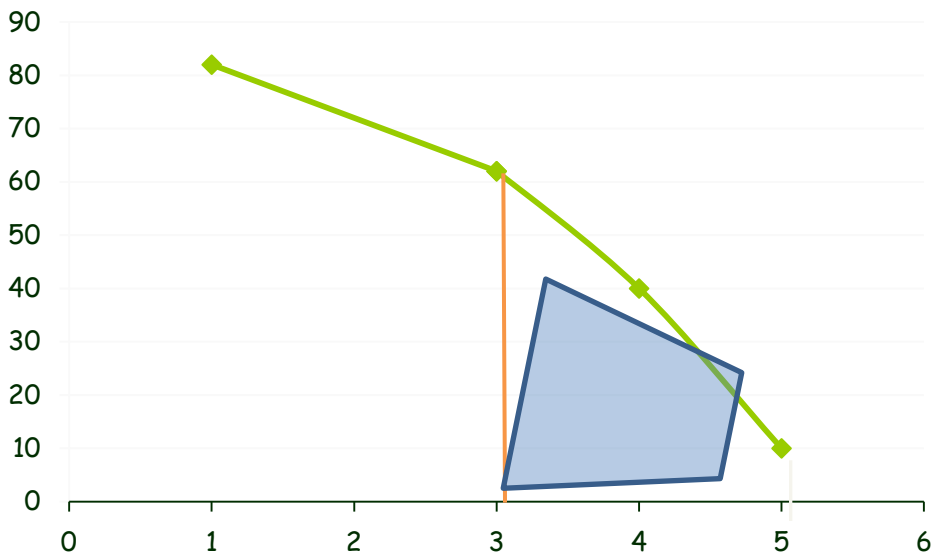
Ασκήσεις

2. Να υπολογισθεί η το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ του άξονα των p και της συνάρτησης ζήτησης $Q(p) = -4p^2 + 6p + 80$ στα σημεία $p=3$ έως και $p=5$.

Λύση

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε εμβαδόν κάτω από μία καμπύλη και μεταξύ δύο κάθετων και του οριζόντιου άξονα, χρησιμοποιούμε το ορισμένο ολοκλήρωμα.

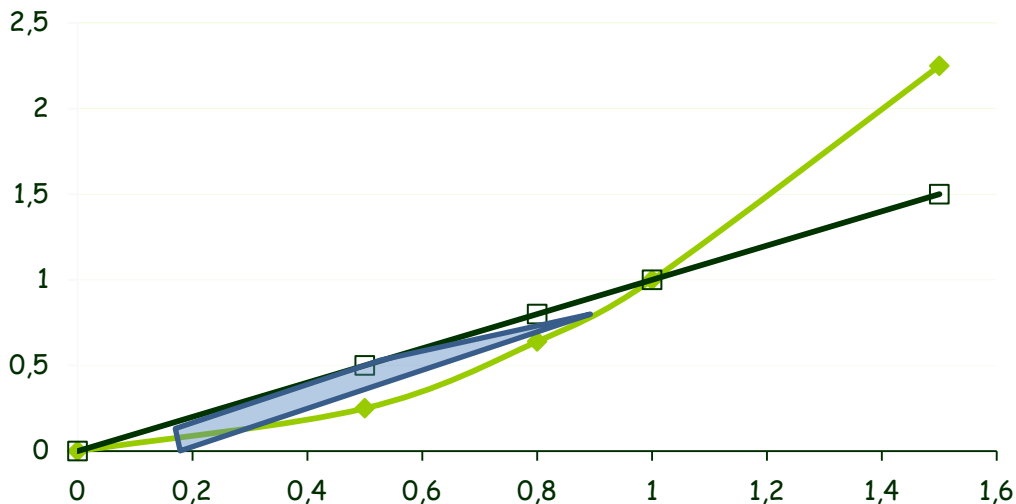
$$\begin{aligned} \int_3^5 (-4p^2 + 6p + 80) dp &= -\frac{4p^3}{3} + \frac{6p^2}{2} + 80p \Big|_3^5 = -\frac{4p^3}{3} + 3p^2 + 80p \Big|_3^5 = \\ &= -\frac{4}{3} \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 80 \cdot 5 - \left(-\frac{4}{3} \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 80 \cdot 3 \right) = \\ &= -166,67 + 75 + 400 + 36 - 27 - 240 = 77,33 \end{aligned}$$



Ασκήσεις

3. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τις καμπύλες των συναρτήσεων $Y = x^2$ και $Y = x$.

Λύση



Καταρχήν πρέπει να σχεδιάσουμε τις δύο συναρτήσεις, ώστε να δούμε ποιο εμβαδόν περικλείεται ανάμεσά τους.

Από τη γραφική τους παράσταση παρατηρούμε ότι μεταξύ 0 και 1 υπάρχει ένα μικρό κομμάτι που περικλείεται μεταξύ των δύο καμπυλών.

Αν δεν είχαμε γραφική παράσταση θα λύναμε την εξίσωση $x^2 = x$ για να δούμε που τέμνονται και θα βρίσκαμε ρίζες 0 και 1.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν, θα βρούμε το ολοκλήρωμα από 0 έως 1, της διαφοράς $x - x^2$.

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \left. x^2/2 - x^3/3 \right|_0^1 = 1/2 - 1/3 - 0 = 1/6$$

Ασκήσεις

4. Μια εταιρεία ενοικίασης μοτοποδηλάτων, εκτιμά ότι το κόστος επισκευής και συντήρησης αυξάνει με το χρόνο. Η συνάρτηση του πρόσθετου κόστους $C(t)$ για κάθε χρόνο t , δίνεται από τη σχέση $C(t) = (1+2t)(t+t^2)^3$ για τιμές $0 < t < 7$. Ποιο είναι το συνολικό κόστος επισκευής και συντήρησης της εταιρείας στα τρία πρώτα χρόνια; Πόσο από το κόστος μπορεί να αντιστοιχηθεί σε κάθε μήνα για τα τρία πρώτα χρόνια;

Λύση

Πρόσθετο κόστος, σημαίνει την επιπλέον μεταβολή του κόστους σε σχέση με το χρόνο t .

Το συνολικό κόστος για τα τρία πρώτα χρόνια, θα βρεθεί με ολοκλήρωση.

$$\int_0^3 [(1+2t)(t+t^2)^3] dt$$

Επειδή έχουμε παρένθεση υψωμένη σε δύναμη, πρέπει να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $\omega = t+t^2$

Τότε θα είναι $d\omega = (1+2t)dt$

Αν $t=0$ τότε $\omega=0$, Αν $t=3$ τότε $\omega=3+3^2=3+9=12$,

επομένως το ολοκλήρωμα θα γίνει

$$\int_0^{3+9} \omega^3 d\omega = \omega^4/4 \Big|_0^{12} = 12^4/4 - 0 = 5184 \text{ θα είναι το κόστος των 3 χρόνων.}$$

Το κόστος μπορεί να αντιστοιχηθεί σε κάθε μήνα αν το διαιρέσουμε με τους 36 μήνες των τριών χρόνων. Οπότε $5184 / 36 = 144$ θα είναι το κόστος ανά μήνα

Ασκήσεις με πλεόνασμα καταναλωτή παραγωγού

1. Η συνάρτηση ζήτησης για ένα αγαθό είναι $P=35-0,4Q^2$ και η συνάρτηση προσφοράς είναι $P=10+0,6Q^2$.
- α) Να βρεθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας και να γίνει η γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων.
- β) Να υπολογισθεί το πλεόνασμα παραγωγού και το πλεόνασμα καταναλωτή στην κατάσταση ισορροπίας.

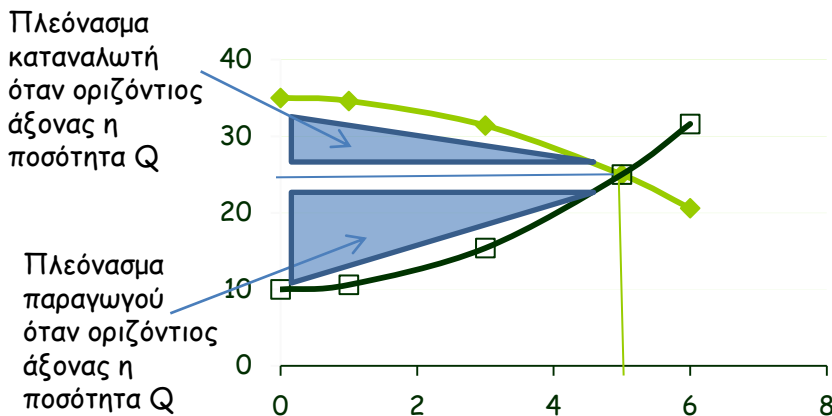
Λύση

α) $35-0,4Q^2=10+0,6Q^2 \Leftrightarrow 25=Q^2 \Leftrightarrow Q=5$ μονάδες

$P=35-0,4 \cdot 25=25$

β) $\text{πλεόνασμα παραγωγού} = 5 \cdot 25 - \int_0^5 (10+0,6Q^2) dQ =$
 $=125 - [10Q + 0,2Q^3]_0^5 = 125 - (10 \cdot 5 + 0,2 \cdot 5^3 - 0) = 125 - 50 - 25 = 50$

$\text{Πλεόνασμα καταναλωτή} = \int_0^5 (35-0,4Q^2) dQ - 5 \cdot 25 =$
 $= [35Q - 0,4Q^3/3]_0^5 - 5 \cdot 25 = [35 \cdot 5 - 0,4/3 \cdot 125 - 0] - 125 = 175 - 17 - 125 = 35$



Ασκήσεις με πλεόνασμα καταναλωτή παραγωγού

2. Έστω ένα προϊόν με συνάρτηση ζήτησης
 $30Q + 6P = 600$ και συνάρτηση οριακού κόστους
 $MC = 1 - 0,4Q$. Ο παραγωγός θέλει να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του.
Βρείτε την τιμή πώλησης.

Ποιο είναι τότε το πλεόνασμα του καταναλωτή;

Λύση

Βρίσκω με τι είναι ίσο το P

$$30Q + 6P = 600 \Leftrightarrow 6P = 600 - 30Q \Leftrightarrow P = 100 - 5Q$$

Συνάρτηση εσόδων $R(Q) = P \cdot Q = (100 - 5Q) \cdot Q = 100Q - 5Q^2$

$$MR = 100 - 10Q$$

Μέγιστα κέρδη πρέπει $MC(Q) = MR(Q)$ βρίσκουμε το αντίστοιχο Q_0 και P_0

$$1 - 0,4Q = 100 - 10Q \Leftrightarrow 9,6Q = 99 \Leftrightarrow Q_0 = 10,31 \text{ και } P_0 = 100 - 5 \cdot 10,31 = 48,5$$

Πλεόνασμα καταναλωτή

$$= \int_0^{10,31} (100 - 5Q) dQ - P_0 \cdot Q_0 = 100Q - 5Q^2/2 \Big|_0^{10,31} - 48,5 \cdot 10,31$$

$$= 100 \cdot 10,31 - 2,5 \cdot 10,31^2 - 0 - 500,035 = 1031 - 265,74 - 500,035 = 265,22$$

Ασκήσεις με πλεόνασμα καταναλωτή παραγωγού

3. Η συνάρτηση ζήτησης για ένα αγαθό είναι

$Q_d = 35 - 0,4P^2$ και η συνάρτηση προσφοράς είναι

$Q_s = 10 + 0,6P^2$.

α) Να βρεθεί η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας και να γίνει η γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων.

β) Να υπολογισθεί το πλεόνασμα παραγωγού και το πλεόνασμα καταναλωτή στην κατάσταση ισορροπίας.

Λύση

α) $35 - 0,4P^2 = 10 + 0,6P^2 \Leftrightarrow 25 = P^2 \Leftrightarrow P = 5$ μονάδες

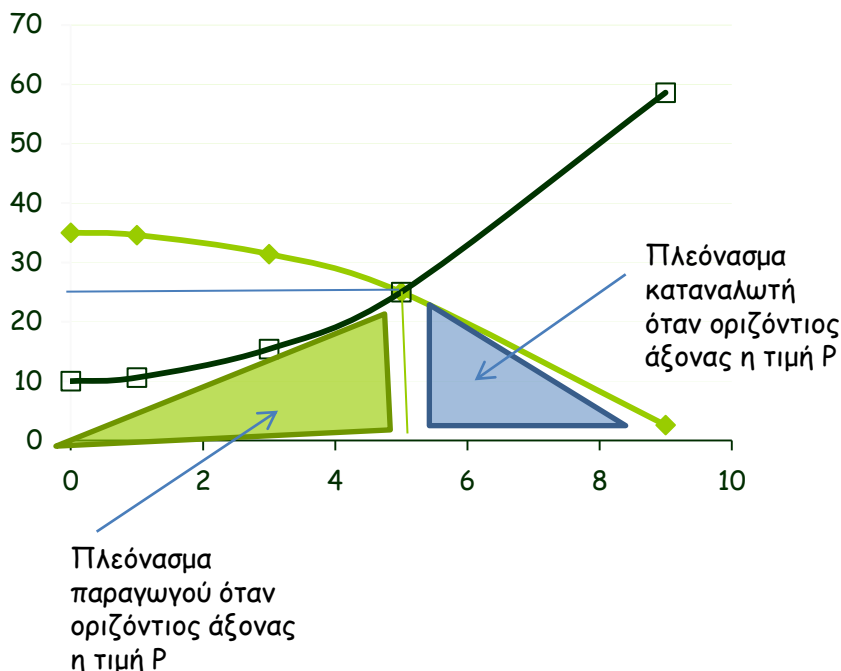
$Q = 35 - 0,4 \cdot 25 = 25$

Β) πλεόνασμα παραγωγού = $\int_0^5 (10 + 0,6P^2) dP =$

$= [10P + 0,2P^3]_0^5 = 10 \cdot 5 + 0,2 \cdot 5^3 - (10 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0^3) = 50 + 25 - 0 = 75$

Πλεόνασμα καταναλωτή = $\int_5^9 (35 - 0,4P^2) dP =$

$= [35P - 0,4P^3/3]_5^9 = [35 \cdot 9 - 0,4/3 \cdot 729 - (35 \cdot 5 - 0,4/3 \cdot 5^3)] = 315 - 97,2 - (165 - 16,67) = 69,47$



ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΟΡΙΑΚΟ

- 1. Η συνάρτηση οριακού κόστους μιας επιχείρησης είναι $MC=200+6Q^2$, και το συνολικό κόστος που αντιστοιχεί σε επίπεδο παραγωγής 4 μονάδων είναι 1000.
- Α) Να βρεθεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους παραγωγής.
- Β) Να υπολογισθεί το μέσο κόστος που αντιστοιχεί σε παραγωγή 12 μονάδων.
- Γ) Να βρεθεί το ύψος παραγωγής στο οποίο το μέσο κόστος παραγωγής ελαχιστοποιείται και να υπολογισθεί η ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους παραγωγής

υποδείξεις λύσης

- Η συνάρτηση του συνολικού κόστους μας δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνάρτησης του οριακού κόστους.

$$C(Q) = \int (200+6Q^2)dQ = 200Q + 6Q^3/3 + c$$

$$C(4)=700 \Leftrightarrow 200 \cdot 4 + 2 \cdot 4^3 + c = 1000 \Leftrightarrow$$

$$c = 1000 - 800 - 128 = 72$$

- Μέσο κόστος $AC = TC/Q = (200Q + 2Q^3 + 72) / Q =$
- $= 200 + 2Q^2 + 72/Q$ όταν $Q=12$ βρίσκω
- $AC(12) = 200 + 2 \cdot 12^2 + 72/12 = 494$
- Ελάχιστο όταν ΚΠΠ: πρώτη παράγωγος $=0$ και ΚΔΠ: δεύτερη παράγωγος θετική
-

Συνέχεια για εύρεση ελάχιστου μέσου κόστους

Μέσο κόστος $AC=TC/Q = (200Q+2Q^3+72) /Q=$

- $= 200+2Q^2+72/Q$ όταν $Q=12$ βρίσκω
- $AC(12) = 200+2*12^2+72/12= 494$
- Ελάχιστο όταν ΚΠΠ: πρώτη παράγωγος $=0$ και ΚΔΠ: δεύτερη παράγωγος θετική

$$AC'(Q)=4Q-72/Q^2= \text{πρέπει } 4Q-72/Q^2=0 \Leftrightarrow$$

$$4Q=72/Q^2 \Leftrightarrow 4Q^3=72 \Leftrightarrow Q^3=18 \Leftrightarrow Q=2,63$$

$$AC''(Q)=4+72/Q^3 >0 \text{ άρα ελάχιστο στο } 2,63$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΟΡΙΑΚΟ

2. Η συνάρτηση οριακού κόστους μιας επιχείρησης είναι:

- $MC=3e^{0.3Q}$, όπου Q η ποσότητα του προϊόντος.

A) Αν η επιχείρηση έχει σταθερό κόστος 60 μονάδες να βρείτε τη συνάρτηση συνολικού κόστους και τη συνάρτηση μέσου κόστους.

B) Πότε (για ποια ποσότητα Q) η κλίση της συνάρτησης μέσου κόστους είναι μηδέν

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΟΡΙΑΚΟ

3. Η συνάρτηση οριακού κόστους μιας επιχείρησης είναι:

$MC=5/Q$, όπου Q η ποσότητα του προϊόντος.

Αν η επιχείρηση έχει κόστος 60 μονάδες όταν $Q=1$ να βρείτε τη συνάρτηση συνολικού κόστους.

4. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού (Π) μιας πόλης είναι $M\Pi(t)=1+2\sqrt{t}$ κάτοικοι τον χρόνο. Ο σημερινός πληθυσμός είναι 5000 κάτοικοι. Ποιος θα είναι ο πληθυσμός αυτής της πόλης σε 9 χρόνια;

υποδείξεις λύσης

Η συνάρτηση του συνολικού πληθυσμού μας δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής του πληθυσμού.

Σημερινός πληθυσμός αντιστοιχεί σε χρόνο $t=0$