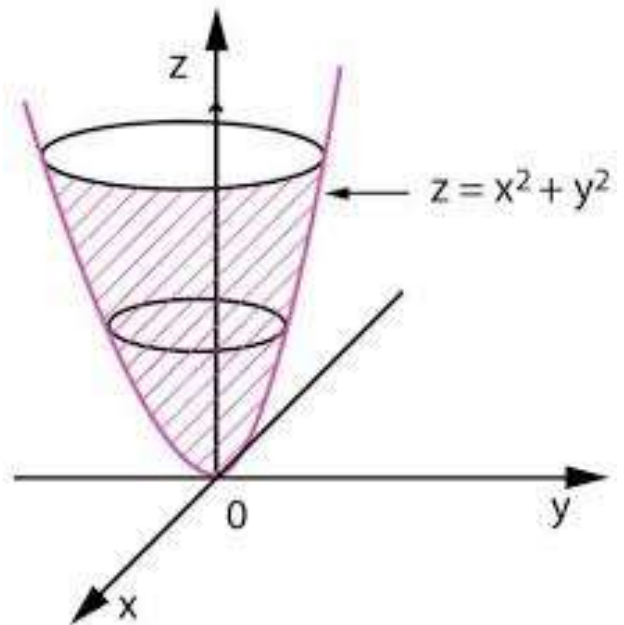
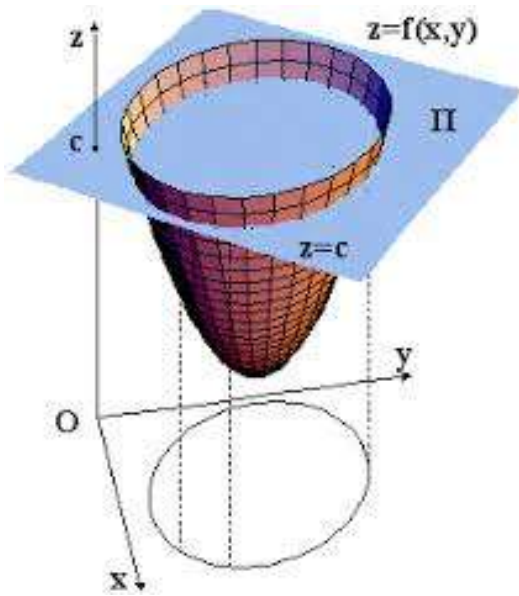


Ισοϋψείς καμπύλες

- Όταν περιορίζουμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών να είναι ίση με μια σταθερή τιμή k , δημιουργείται μια καμπύλη στο επίπεδο, η οποία ονομάζεται ισοψής, γιατί η τιμή της είναι πάντα ίση με την σταθερή τιμή k .
- Στις οικονομικές εφαρμογές, πολλές φορές μας ενδιαφέρουν οι συναρτήσεις δύο μεταβλητών, οι οποίες έχουν την ίδια σταθερή τιμή, αλλά με διαφορετικούς συνδυασμούς των δύο μεταβλητών.
- Αν πρόκειται για συνάρτηση χρησιμότητας, κάθε ισοϋψής καμπύλη ονομάζεται **καμπύλη αδιαφορίας**.
- Στην περίπτωση συνάρτησης παραγωγής, κάθε ισοϋψής καμπύλη ονομάζεται καμπύλη **ίσου προϊόντος**.

Οριζόντια τομή γραφικής παράστασης



- Αν θεωρήσουμε $z=k$ σταθερά, τότε έχουμε μια σχέση $f(x,y)=k$ με τις δύο μόνο μεταβλητές x , y .
- Η σχέση αυτή κάποιες φορές μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο xy .

οριακός λόγος υποκατάστασης

- Η κλίση των ισοϋψών καμπυλών σε κάποιο σημείο, υπολογίζεται με την παράγωγο, συμβολίζεται με dy/dx κι ονομάζεται **οριακός λόγος υποκατάστασης μεταξύ του y και x**
- Δείχνει με ποιο τρόπο πρέπει να αντικαταστήσουμε την ποσότητα x με ποσότητα y , ώστε να είμαστε πάνω στην ίδια ισοϋψή.

παράδειγμα

Για η συνάρτηση παραγωγής $Q(K,L)$ η οποία έχει τύπο $Q(K,L) = 0,05K + 20L$,

Βρείτε για την ισοϋψή καμπύλη όπου η παραγωγή είναι 100 μονάδες, τον οριακό λόγο υποκατάστασης του dK/dL .

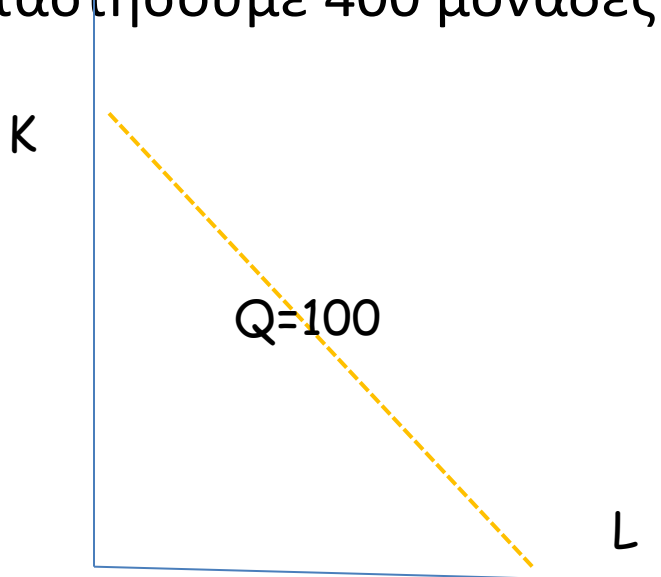
Λύση

Η ισοϋψής θα είναι $0,05K + 20L = 100 \Leftrightarrow$

$0,05K = 100 - 20L \Leftrightarrow K = (100 - 20L)/0,05 \Leftrightarrow K = 2000 - 400L$

$dK/dL = -400$

Χρειαζόμαστε 1 μονάδα εργασίας L , για να υποκαταστήσουμε 400 μονάδες κεφαλαίου K



παράδειγμα

Για η συνάρτηση παραγωγής $Q(K,L)$ η οποία έχει τύπο $Q(K,L) = K^{1/2} * L^{1/2}$,

Βρείτε για την ισοϋψή καμπύλη όπου η παραγωγή είναι 100 μονάδες, τον οριακό λόγο υποκατάστασης του dK/dL .

Λύση

Η ισοϋψής θα είναι $K^{1/2} * L^{1/2} = 100 \Leftrightarrow$

$$K^{1/2} = 100/L^{1/2} \Leftrightarrow K = 100^2/L$$

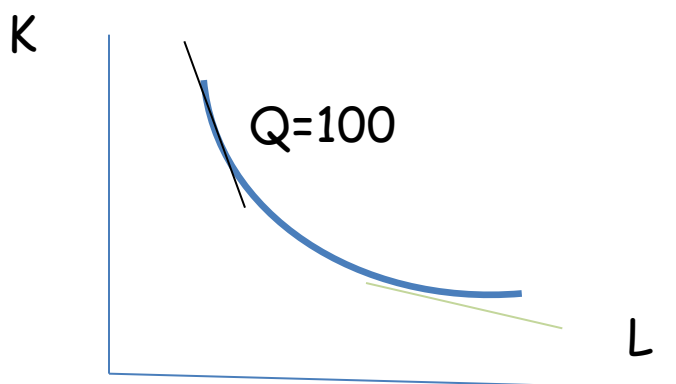
$$dK/dL = -100^2/L^2$$

Ο οριακός λόγος υποκατάστασης δεν είναι σταθερός, αλλά εξαρτάται από την τιμή του L .

Αν $L=10$ τότε $dK/dL = -100^2/10^2 = -100$

χρειαζόμαστε 1 μονάδα εργασίας L , για να υποκαταστήσουμε 100 μονάδες κεφαλαίου K

Αν $L=50$ τότε $dK/dL = -100^2/50^2 = -4$ χρειαζόμαστε 1 μονάδα εργασίας L , για να υποκαταστήσουμε 4 μονάδες κεφαλαίου K



ασκήσεις

1. Να βρείτε την κλίση dy/dx των παρακάτω ισοϋψών καμπυλών:

$$f(x,y)=x^{-2}y \text{ όταν } f(x,y)=3 \text{ στο σημείο } (1,3)$$

$$g(x,y)=x^2+xy \text{ όταν } g(x,y)=18 \text{ στο σημείο } (3,3)$$

Λύση

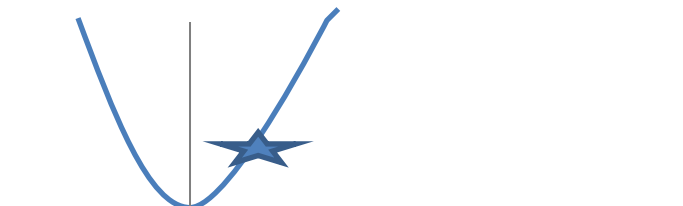
$$f(x,y)=x^{-2}y = y/x^2$$

$$\text{Ισουψής } f(x,y)=3 \Leftrightarrow y/x^2 = 3 \Leftrightarrow y=3x^2$$

Οριακός λόγος υποκατάστασης

$$dy/dx = 3 \cdot 2x = 6x$$

$$\text{Αν } x=1 \quad dy/dx = 6 \cdot 1 = 6$$



ασκήσεις

1. Να βρείτε την κλίση dy/dx των παρακάτω ισοϋψών καμπυλών:

$f(x,y)=x^{-2}y$ όταν $f(x,y)=3$ στο σημείο $(1,3)$

$g(x,y)=x^2+xy$ όταν $g(x,y)=18$ στο σημείο $(3,3)$

Λύση

Ισουψής $g(x,y)=18 \Leftrightarrow x^2+xy=18 \Leftrightarrow$

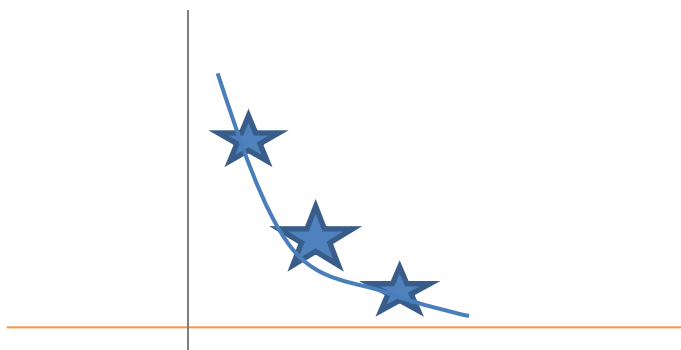
$xy=18-x^2 \Leftrightarrow y=(18-x^2)/x \Leftrightarrow$

$y=18/x-x^2/x \Leftrightarrow y=18/x-x$

$x=1 \ y=17, \ x=2 \ y=7, \ x=3 \ y=3, \ x=4 \ y=0,5$

Οριακός λόγος υποκατάστασης

$dy/dx = -18/x^2-1$ αν $x=3 \ dy/dx=-3$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τις ακόλουθες συναρτήσεις 2 μεταβλητών:

Να υπολογισθούν οι τιμές τους όταν $x=1$, $y=0$ και όταν $x=1$, $y=1$

Να υπολογισθούν οι ισοϋψείς $f(x, y) = 200$

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4,$

2. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6,$

3. $f(x, y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2,$

4. $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4,$

5. $f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5,$

Λύση

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

$$f(1,0) = 1^2 + 1 \cdot 0 + 0^2 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 4 = 8 \quad f(1,1) = 1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 4 = 7$$

$$x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4 = 200 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y = 196$$

2. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$

$$f(1,0) = 1^2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 6 = -11$$

$$f(1,1) = 1^2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 6 = -2$$

$$x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6 = 200 \Leftrightarrow x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y = 206$$

3. $f(x, y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2,$

$$f(1,0) = 5 \cdot 1 \cdot 0 - 7 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 6 \cdot 0 + 2 = -2 \quad f(1,1) = 5 \cdot 1 \cdot 1 - 7 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 2 = -3$$

$$5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2 = 200 \Leftrightarrow 5xy - 7x^2 + 3x - 6y = 198$$

4. $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4,$

$$f(1,0) = 2 \cdot 1 \cdot 0 - 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 4 = -5 \quad f(1,1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 4 = -1$$

$$2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4 = 200 \Leftrightarrow 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y = 204$$

5. $f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5,$

$$f(1,0) = 1^2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 5 = 9 \quad f(1,1) = 1^2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 5 = 12$$

$$x^2 + xy + 3x + 2y + 5 = 200 \Leftrightarrow x^2 + xy + 3x + 2y = 195$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τις ακόλουθες συναρτήσεις 2 μεταβλητών:

Να υπολογισθούν οι τιμές τους όταν $x=1$, $y=0$ και όταν $x=1$, $y=1$

Να υπολογισθούν οι ισοϋψείς $f(x, y) = 200$

6. $f(x, y) = y^2 + xy - 2x - 2y + 2,$

7. $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4,$

8. $f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4,$

9. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3y + 3,$

10. $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 7y^2 - 2x + 4y$

Λύση

6. $f(x, y) = y^2 + xy - 2x - 2y + 2,$

7. $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4,$

8. $f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4,$

9. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3y + 3,$

10. $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 7y^2 - 2x + 4y$

ασκήσεις

2. Ένα προϊόν Q παράγεται με εργασία L και κεφάλαιο K , με τη σχέση $Q=L^{1/2}K^{1/4}$. Να υπολογίσετε τον οριακό λόγο υποκατάστασης πάνω στην καμπύλη ίσου προϊόντος $Q=3$, όταν χρησιμοποιείται 1 μονάδα κεφαλαίου και 9 μονάδες εργασίας.

Λύση

Η ισοϋψής θα είναι $Q=3 \Leftrightarrow K^{1/4} \cdot L^{1/2} = 3 \Leftrightarrow$

$$K^{1/4} = 3/L^{1/2} \Leftrightarrow K = 3^4/L^2 \Leftrightarrow K = 81/L^2$$

$$dK/dL = -2 \cdot 81/L^3 = -162/L^3$$

Ο οριακός λόγος υποκατάστασης δεν είναι σταθερός, αλλά εξαρτάται από την τιμή του L .

$$\text{Αν } L=9 \text{ τότε } dK/dL = -162/9^3 = -0,222$$

χρειαζόμαστε 1 μονάδα εργασίας L , για να υποκαταστήσουμε 0,222 μονάδες κεφαλαίου K

ασκήσεις

3. Μια επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα κ και λ, τα οποία πωλούνται προς 27 και 26 ευρώ η κάθε μονάδα αντίστοιχα. Το κόστος παραγωγής των δύο προϊόντων δίνεται από τη συνάρτηση

$$C(\kappa, \lambda) = \kappa^2 + 3\kappa\lambda + 2\lambda^2 - 50$$

- Γράψτε τη συνάρτηση κέρδους ως συνάρτηση του κ και λ.
- Υπολογίστε την ισοϋψή, όταν το κέρδος θέλουμε να είναι 300 μονάδες.
- Ποιος θα είναι ο οριακός λόγος υποκατάστασης του κ ως προς λ στην ισοϋψή αυτή;

Λύση

το κέρδος θα είναι ίσο με έσοδα- κόστος

Τα έσοδα είναι τιμή επί ποσότητα, δηλαδή $R = 27*\kappa + 26*\lambda$

$$\text{Κέρδος} = R - C(\kappa, \lambda) = 27*\kappa + 26*\lambda - (\kappa^2 + 3\kappa\lambda + 2\lambda^2 - 50) \Leftrightarrow$$

$$\text{Κέρδος} = 27*\kappa + 26*\lambda - \kappa^2 - 3\kappa\lambda - 2\lambda^2 + 50$$

Ισοψής κέρδος=300

$$\text{οπότε } 27*\kappa + 26*\lambda - \kappa^2 - 3\kappa\lambda - 2\lambda^2 + 50 = 300 \Leftrightarrow$$

$$27*\kappa + 26*\lambda - \kappa^2 - 3\kappa\lambda - 2\lambda^2 = 250$$

ο οριακός λόγος υποκατάστασης του κ ως προς λ στην ισοϋψή αυτή, θα είναι $dk/d\lambda$ θεωρούμε το κ ως συνάρτηση του λ και παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση ως προς λ, έχουμε:

$$27dk/d\lambda + 26*1 - 2\kappa*dk/d\lambda - 3\lambda*dk/d\lambda - 3\kappa*1 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$dk/d\lambda (27 - 2\kappa - 3\lambda) + 26 - 3\kappa - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$dk/d\lambda = (3\kappa + 4\lambda - 26) / (27 - 2\kappa - 3\lambda)$$

ασκήσεις

4. Δύο επιχειρήσεις παράγουν το ίδιο προϊόν και το διαθέτουν στην αγορά με την ίδια τιμή p . Η πρώτη παράγει ποσότητα Q_1 και η δεύτερη ποσότητα Q_2 . Η συνάρτηση ζήτησης είναι $p=10-0,1*(Q_1+Q_2)$.

Το κόστος της πρώτης είναι $C_1(Q_1)=0,25Q_1$ και το κόστος της δεύτερης $C_2(Q_1)=0,5Q_2$.

Γράψτε τη συνάρτηση κερδών, ξεχωριστά για την κάθε επιχείρηση.

Ποια συνθήκη θα πρέπει να ισχύει για τα Q_1 και Q_2 ώστε οι δύο επιχειρήσεις να έχουν ίσα κέρδη;

Λύση

το κέρδος θα είναι ίσο με έσοδα- κόστος

Τα έσοδα είναι τιμή επί ποσότητα,

δηλαδή $R_1=p*Q_1$

Κέρδος1= $R_1-C_1(Q_1)=p*Q_1-0,25Q_1=$

$$= [10-0,1*(Q_1+Q_2)]*Q_1-0,25Q_1=9,75Q_1-0,1Q_1^2-0,1Q_1*Q_2$$

Με παρόμοιο τρόπο:

Κέρδος2= $R_2-C_2(Q_2)=p*Q_2-0,5Q_2=$

$$= [10-0,1*(Q_1+Q_2)]*Q_2-0,5Q_2=9,5Q_2-0,1Q_1*Q_2-0,1Q_2^2$$

Αν θέλουμε Κέρδος 1=Κέρδος2 $\Leftrightarrow$

$$9,75Q_1-0,1Q_1^2-0,1Q_1*Q_2=9,5Q_2-0,1Q_1*Q_2-0,1Q_2^2 \Leftrightarrow$$

$$9,75Q_1-0,1Q_1^2-9,5Q_2+0,1Q_2^2=0 \Leftrightarrow$$

$$9,75Q_1-0,1Q_1^2=9,5Q_2-0,1Q_2^2$$