

Έλεγχος υποθέσεων

Γιαννούλα Φλώρου

Καθηγήτρια

Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής

Διεθνές Πανεπιστήμιο Ελλάδας

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα

Λογιστική και Ελεγκτική

Περιεχόμενα

- Είδη υποθέσεων
- Παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων
- Παραβίαση προυποθέσεων
- Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων

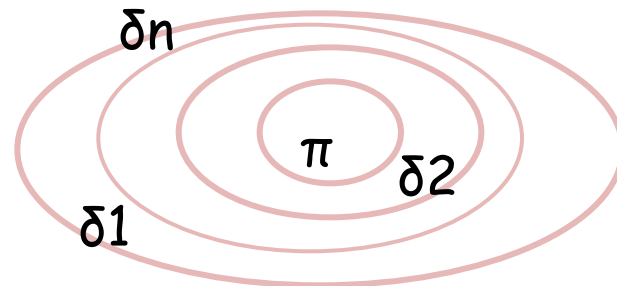
Στατιστικοί έλεγχοι

- Ανάγκη ελέγχων
- Μέτρηση σφάλματος
- Είδη ελέγχων και στάθμη σημαντικότητας

Ανάγκη ελέγχου

Με τις στατιστικές έρευνες και με χρήση δείγματος, εκτιμούμε τις διάφορες παραμέτρους του δείγματος.

Κύριος στόχος μας όμως είναι η εκτίμηση των παραμέτρων του πληθυσμού.



Προϋποθέσεις για εφαρμογή παραμετρικών ελέγχων

Οι έλεγχοι αφορούν παραμέτρους του πληθυσμού και ονομάζονται παραμετρικοί έλεγχοι.

Οι βασικές προϋποθέσεις για την εφαρμογή τέτοιων ελέγχων είναι:

Ακραίες τιμές

Προσθετικότητα και γραμμικότητα.

Κανονικότητα μεγεθών

Ομοσκεδαστικότητα / ομοιογένεια διακύμανσης

Ανεξαρτησία

Ερμηνεία των προυποθέσεων

Ακραίες τιμές

Τιμές εξαιρετικά μικρές ή εξαιρετικά μεγάλες σε σχέση με τις υπόλοιπες. Τις εντοπίζουμε και τις ξεχωρίζουμε από τα δεδομένα.

Προσθετικότητα και γραμμικότητα.

Εφαρμόζεται στη μέτρηση συσχέτισης μεταξύ ποσοτικών μεταβλητών

Κανονικότητα μεγεθών

Σε πολλούς ελέγχους θα πρέπει η κατανομή των δεδομένων να πλησιάζει την κανονική κατανομή ιδίως για μικρά δείγματα. Στα μεγάλα δείγματα η προϋπόθεση αυτή αντικαθίσταται από το κεντρικό οριακό θεώρημα

Ομοσκεδαστικότητα / ομοιογένεια διακύμανσης

Όταν συγκρίνουμε δύο ή περισσότερα δείγματα

Ανεξαρτησία

Τα σφάλματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους στην παλινδρόμηση

Λειτουργία υποθέσεων

- Έστω ότι έχουμε «διαρροή» νερού στους υδραυλικούς σωλήνες του σπιτιού μας.
- Στόχος μας να βρούμε σε ποιο σημείο υπάρχει τρύπα στους σωλήνες, αλλά καθώς αυτοί βρίσκονται κάτω από τα πλακάκια, δεν μπορούμε να τους δούμε.
- Έτσι δοκιμάζουμε διαδοχικά τις υδραυλικές μας εγκαταστάσεις, να δούμε ποια έχει το πρόβλημα.
- Κλείνουμε την μία και εξετάζουμε αν σταμάτησε η διαρροή. Αν ναι, είμαστε τυχεροί, αν όχι θα πρέπει να επαναλάβουμε την προσπάθεια με άλλη εγκατάσταση.

Μηδενική και εναλλακτική υπόθεση

- Ο επιτηρητής των εξετάσεων υποψιάζεται ότι ένας φοιτητής αντιγράφει από το κινητό του. Ο επιτηρητής ζητάει να δει το κινητό, και ο φοιτητής διαμαρτύρεται.
- Μηδενική (αρχική) υπόθεση H_0
 - *Ο φοιτητής αντέγραφε*
- Εναλλακτική υπόθεση H_1
 - *Ο φοιτητής δεν αντέγραφε*

Διαπίστωση-απόφαση

- Αν στο κινητό υπάρχει το ίδιο κείμενο με το γραπτό, δεχόμαστε την H_0 .
- Αν δεν δούμε το κείμενο στο κινητό, δεν έχουμε αρκετά πειστήρια και δεν μπορούμε να δεχθούμε την H_0

Δημιουργία υποθέσεων

- Μην έχοντας πλήρη στοιχεία για τον πληθυσμό που μας ενδιαφέρει, υποθέτουμε ότι οι παράμετροι του πληθυσμού έχουν κάποιες τιμές, και με βάση την υπόθεση που κάνουμε, μετρούμε πόσο «πιθανό» είναι να βρούμε την τιμή του δείγματος, δεχόμενοι την υποθετική τιμή του πληθυσμού.
- Αν η πιθανότητα είναι μεγάλη, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η τιμή του πληθυσμού που υποθέσαμε είναι σωστή. Αν όχι, θα πρέπει να ξαναδοκιμάσουμε με νέα υπόθεση για τον πληθυσμό.
- Το δείγμα μας δίνει πάντα ακριβείς υπολογισμούς, αλλά η υπόθεση για τον πληθυσμό γίνεται «στα τυφλά», και επιβεβαιώνεται (αν ισχύει) με τις τιμές του δείγματος.

Τυχαίες διαφορές και σημαντικές διαφορές

Έστω ότι χωρίζουμε ένα πληθυσμό σε δύο ομάδες- δείγματα με τυχαίο τρόπο.

- Υπολογίζουμε μέση τιμή για το πρώτο δείγμα και μέση τιμή για το δεύτερο δείγμα.
- Περιμένουμε οι δύο αυτές μέσες τιμές να είναι πολύ κοντά ή μια στην άλλη, αλλά να είναι ακριβώς ίδιες είναι πάρα πολύ σπάνιο.
- Τέτοιες μικρές διαφορές που οφείλονται στην τύχη, ονομάζονται «**τυχαίες**» διαφορές.

Αν όμως τα δύο δείγματα χωριστούν όχι με τυχαίο τρόπο, οι μέσες τιμές των δύο δειγμάτων μπορεί να διαφέρουν πολύ μεταξύ τους, οπότε έχουμε «**σημαντικές**» διαφορές.

Ερώτηση: Πως θα καταλάβουμε αν μια διαφορά μεταξύ δύο δειγμάτων είναι τυχαία ή σημαντική;

Απάντηση: Χρησιμοποιώντας πιθανότητα. Πότε δεν είμαστε τελείως σίγουροι.

Σημαντική διαφορά

- Όταν η θεωρητική πιθανότητα να συμβεί μια διαφορά είναι μικρότερη από το 5%, θεωρούμε ότι η διαφορά συμβαίνει με τυχαίο τρόπο, είναι δηλαδή απίθανο να οφείλεται σε σημαντική διαφορά.
- Παρόλα αυτά, όμως υπάρχει η μικρή πιθανότητα 5% η διαφορά να είναι σημαντική στην πραγματικότητα.

Υπόθεση και απόφαση

- Η υπόθεση αναφέρεται στην εκτίμησή μας για την τιμή του πληθυσμού.
- Η απόφαση αναφέρεται στο αν θα δεχθούμε ή όχι την υπόθεση που κάναμε.

Σφάλματα

Τα σφάλματα που μπορεί να κάνουμε είναι δύο ειδών

Σωστή υπόθεση και λάθος απόφαση
(απορρίπτουμε μια σωστή υπόθεση)

Λάθος υπόθεση και λάθος απόφαση
(δεχόμαστε μια λάθος υπόθεση)

Ονομασία σφαλμάτων

Τα σφάλματα που μπορεί να κάνουμε χαρακτηρίζονται με δύο τύπους

Σωστή υπόθεση και λάθος απόφαση
(απορρίπτουμε μια σωστή υπόθεση)

Σφάλμα τύπου α

Λάθος υπόθεση και λάθος απόφαση
(δεχόμαστε μια λάθος υπόθεση)

Σφάλμα τύπου β

Σφάλμα τύπου α

- Χρησιμοποιείται σχεδόν πάντα
- Εύκολο να υπολογισθεί
- Η πιθανότητα να μην δεχθούμε την υπόθεσή μας, αν και είναι σωστή, είναι $\alpha\%$.

Επίπεδο εμπιστοσύνης και επίπεδο σημαντικότητας

- Το επίπεδο εμπιστοσύνης (confidence level) είναι το ποσοστό των φορών που μια διαδικασία εκτίμησης είναι σωστή.
- Το επίπεδο σημαντικότητας (significance level) μετράει πόσο συχνά το αποτέλεσμα θα είναι εσφαλμένο
- Αν το σφάλμα μας είναι α , τότε η στάθμη (επίπεδο) εμπιστοσύνης είναι $1-\alpha$.
- Το συνηθέστερο είναι να ανεχόμαστε σφάλμα $\alpha=5\%$, οπότε η στάθμη (επίπεδο) εμπιστοσύνης θα είναι $1-0,05=95\%$

Επίπεδο σημαντικότητας 90% ή 99%

- Κάποιες φορές ανεχόμαστε σφάλμα $\alpha=10\%$, οπότε η στάθμη (επίπεδο) εμπιστοσύνης θα είναι $1-0,10=90\%$
- Άλλες φορές θέλουμε ανοχή σφάλματος 1% , οπότε η στάθμη (επίπεδο) εμπιστοσύνης θα είναι $1-0,01=99\%$

Κριτική τιμή ελέγχου υποθέσεων

- Με την μεγάλη ανάπτυξη των υπολογιστών, αντί για το σφάλμα τύπου α , υπολογίζεται αυτόματα η **κριτική τιμή**, δηλαδή πιθανότητα να απορρίψουμε την υπόθεσή μας, αν και είναι σωστή, και ονομάζεται
 - Sig. level (significant level)
 - P value (probability value)

Αν η τιμή αυτή είναι μικρότερη από το σφάλμα τύπου α , σημαίνει ότι μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση.

Αν η τιμή αυτή δεν είναι μικρότερη από το σφάλμα τύπου α , τότε δεν μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεσή μας.

Βήματα για έλεγχο υποθέσεων

1. ορίζουμε την μηδενική υπόθεση H_0
2. ορίζουμε την εναλλακτική υπόθεση H_1
3. αποφασίζουμε ποιο “test” θα κάνουμε (στις περισσότερες περιπτώσεις t-test)
4. βρίσκουμε την απορριπτική περιοχή της H_0 , ή την πιθανότητα να κάνουμε λάθος αν απορρίψουμε την H_0 . (p value, sig. level)
5. βγάζουμε το συμπέρασμά μας (απορρίπτουμε ή δεν μπορούμε να απορρίψουμε την H_0)

Τυπολόγιο έλεγχος υποθέσεων

- Κριτήριο Αναλογίας

- Μεγάλο δείγμα

$$\frac{\tilde{p} - p_0}{\sqrt{\frac{\tilde{p}(1 - \tilde{p})}{n}}} \sim N(0,1)$$

- Κριτήριο Μιας μέσης τιμής

- Μεγάλο δείγμα
- Μικρό δείγμα

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

- Κριτήριο Διαφοράς δύο μέσων τιμών

- Μεγάλα δείγματα

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{\alpha/2, n-1}$$

- ~~Μικρά δείγματα~~

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s} \sim N(0,1)$$

$$s = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$s_t = s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

- Διαφορά δύο αναλογιών

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s} \sim t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$$

$$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{s_p} \sim N(0,1)$$

$$s_p = \sqrt{p(1-p) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

$$\hat{p} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

Περιοχή απόρριψης υπόθεσης H_0

- Στάθμη σημαντικότητας $\alpha\%$
- Δίπλευρος έλεγχος (\neq)
Αν $|\text{κριτήριο}| > z_{\alpha/2}$ ή $t_{\alpha/2}$
- Μονόπλευρος έλεγχος αριστερά ($<$)
Αν $\text{κριτήριο} < -z_{\alpha}$ ή $-t_{\alpha}$
- Μονόπλευρος έλεγχος δεξιά ($>$)
Αν $\text{κριτήριο} > +z_{\alpha}$ ή $+t_{\alpha}$

Έλεγχος των προϋποθέσεων

Ακραίες τιμές

Τιμές εξαιρετικά μικρές ή εξαιρετικά μεγάλες σε σχέση με τις υπόλοιπες. Τις εντοπίζουμε με ένα απλό πίνακα συχνοτήτων ή με ένα θηκόγραμμα

Προσθετικότητα και γραμμικότητα.

Εφαρμόζεται στη μέτρηση συσχέτισης μεταξύ ποσοτικών μεταβλητών

Κανονικότητα μεγεθών

Ελέγχεται με τον έλεγχο Kolmogorov – Smirnov (non parametric tests 1 sample K-S ή εντολή explore-plots-normality with tests)

Ομοσκεδαστικότητα / ομοιογένεια διακύμανσης

Όταν συγκρίνουμε δύο ή περισσότερα δείγματα (διάγραμμα καταλοίπων στην παλινδρόμηση ή Levene test σε άλλους ελέγχους)

Ανεξαρτησία

Τα σφάλματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους στην παλινδρόμηση

Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων

Εφαρμόζονται όταν δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις ή όταν τα δείγματα είναι μικρά ή όταν δεν θέλουμε έλεγχο παραμέτρων

Χρησιμοποιούνται σε δεδομένα που μπορούν να διαταχθούν από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.

Υπάρχουν μη παραμετρικοί έλεγχοι που χρησιμοποιούνται για δύο δείγματα ανεξάρτητα ή για δυο δείγματα εξαρτημένα ή για περισσότερα δείγματα ανεξάρτητα ή εξαρτημένα