

Ανάλυση διακύμανσης

Γιαννούλα Φλώρου

Καθηγήτρια

Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα

Λογιστική κι Ελεγκτική

Μερος 1ο

περιεχόμενα

- Ανάλυση διακύμανσης μεταξύ μιας ποσοτικής μεταβλητής και πολλών κατηγοριών μιας ποιοτικής είτε πολλών δειγμάτων

Ανάλυση διακύμανσης

- Σκοπός
- Προϋποθέσεις
- Υποθέσεις
- Υπολογισμοί - πίνακας ANOVA
- Πολλαπλές συγκρίσεις

Ανάλυση διακύμανσης ή διασποράς

Σύγκριση μέσων τιμών μεταξύ πολλών
δειγμάτων (περισσότερων από δύο)

- Συγκρίνουμε τις **διαφορές μεταξύ των μέσων τιμών** τους.
- Οι διαφορές αυτές είναι σημαντικές ή ασήμαντες, ανάλογα με τις διασπορές των δειγμάτων. (από κει βγαίνει η ονομασία της μεθόδου)

Βασικές προϋποθέσεις της μεθόδου

1. Όλα τα δείγματα ανεξάρτητα μεταξύ τους και προέρχονται από πληθυσμούς που ακολουθούν κανονική κατανομή.
2. Όλοι οι πληθυσμοί έχουν την ίδια διασπορά σ^2

Υποθέσεις της μεθόδου

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k,$

Οι μέσες τιμές όλων των k πληθυσμών είναι ίσες

$H_1: \text{δεν ισχύει η } H_0$

μια τουλάχιστον μέση τιμή διαφέρει από τις υπόλοιπες

Δεχόμαστε ή απορρίπτουμε την H_0 με στάθμη σημαντικότητας $\alpha\%$
(συνήθως $\alpha=5\%$)

Διαδικασία της μεθόδου

Υπολογίζουμε τα **αθροίσματα τετραγώνων** για :

- τις διαφορές μεταξύ των μέσων τιμών των **k** ομάδων-δειγμάτων
- τις διαφορές μεταξύ των τιμών μέσα στις **k** ομάδες-δείγματα
- τις διαφορές μεταξύ όλων των τιμών των **n** παρατηρήσεων

Ο λόγος των διακυμάνσεων (μέσα αθροίσματα τετραγώνων) ακολουθεί την F κατανομή με βαθμούς ελευθερίας k-1 και n-k

Κριτήριο για τον έλεγχο της H_0 :

$$\frac{S_b^2}{S_e^2} \sim F_{k-1, n-k}$$

Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης

- Προκειμένου να υπολογίσουμε εύκολα το λόγο των δύο διακυμάνσεων, χωρίς να κάνουμε δύσκολους υπολογισμούς, δημιουργούμε έναν πίνακα, τον οποίο ονομάζουμε πίνακα ANOVA (ANalysis Of Variance)

μεταβολή	Άθροισμα τετραγώνων	Βαθμοί ελευθερίας	Μέση μεταβολή	F
Μεταξύ k δειγμάτων	S^2_b	k-1	$s^2_b = S^2_b / (k-1)$	Κριτήριο = s^2_b / s^2
Μέσα στα δείγματα (υπόλοιπο ή σφάλμα)	S^2_e	n-k	$s^2 = S^2_e / (n-k)$	
Συνολικά (n πλήθος παρατηρήσεων)	$S^2_{\dagger} = S^2_b + S^2_e$	n-1		

Αν το Κριτήριο = $s^2_b / \sigma^2 > F_{k-1, n-k, a\%}$

Τότε απορρίπτουμε την H_0 , δηλαδή τότε οι μέσες τιμές δεν είναι όλες ίσες μεταξύ τους.

Η τιμή $F_{k-1, n-k, a\%}$ εντοπίζεται από τον πίνακα της F κατανομής με στάθμη σημαντικότητας $a\%$

Πολλαπλές συγκρίσεις

- Αν δεν απορρίψουμε την H_0 , συμπεραίνουμε ότι όλες οι μέσες τιμές είναι ίσες.
- Που υπάρχει η διαφορετική μέση τιμή στην περίπτωση που η H_0 απορριφθεί;
- Στο ερώτημα αυτό, απαντούν οι έλεγχοι πολλαπλών συγκρίσεων, ελέγχοντας ανά δύο τις μέσες τιμές και γίνονται με τις παρακάτω μεθόδους:
 - Fisher (LSD)
 - Tukey
 - Scheffe
 - Duncan

Ασκήσεις

1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα ανάλυσης διακύμανσης με τις τιμές που λείπουν. Ποιο είναι το πλήθος των παρατηρήσεων; Πόσες διαφορετικές ομάδες δειγμάτων υπάρχουν; Ποια είναι η μηδενική υπόθεση H_0 ; Δεχόμαστε την H_0 ;

μεταβολή	Άθροισμα τετραγώνων	Βαθμοί ελευθερίας	Μέση μεταβολή	F
Μεταξύ δειγμάτων	18,648	4	18,648/4=4,5	4,5/2,93=1,5
Μέσα στα δείγματα (υπόλοιπο)	=311-18=293	104-4=100	293/100=2,93	
Συνολικά	311,156	104		

2. Σε 11 φοιτητές, μοιράστηκαν τυχαία 3 διαφορετικά θέματα εξετάσεων και βαθμολογήθηκε ο καθένας. Οι βαθμοί φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα θέματα ήταν ισοδύναμα; (δηλαδή οι μέσες βαθμολογίες των τριών θεμάτων είναι ίσες). Χρησιμοποιήστε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=5\%$.

θέμα	Βαθμοί φοιτητών	Πλήθος φοιτητών
A	8 9,2 8,7 8,3	4 (8,5)
B	7 8,1 7,8 7,4	4 (7,6)
Γ	6,3 7,6 7	3 (7)

μεταβολή	Άθροισμα τετραγώνων	Βαθμοί ελευθερίας	Μέση μεταβολή	F
Μεταξύ δειγμάτων	4,52	3-1=2	4,52/2=2,26	2,26/0,3=7,2
Μέσα στα δείγματα	2,34	11-3=8	2,34/8=0,3	
Συνολικά	6,86	11-1=10		

$H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_\Gamma$

H_1 όχι H_0 επειδή $7,2 > 4,46$ ($F_{2,8,5\%}$) απορρίπτω την H_0

3. Εφαρμόζοντας στατιστικό έλεγχο ανάλυσης διακύμανσης με το πρόγραμμα SPSS προέκυψε το παρακάτω output. Ποιο είναι το αποτέλεσμα του ελέγχου;

ANOVA

Miles per Gallon

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7984,957	2	3992,479	97,969	,000
Within Groups	16056,415	394	40,752		
Total	24041,372	396			

Άσκηση με πολλαπλές συγκρίσεις (SPSS)

4. Εφαρμόζοντας στατιστικό έλεγχο ανάλυσης διακύμανσης με το πρόγραμμα SPSS προέκυψε το παρακάτω output. Ποιο είναι το αποτέλεσμα του ελέγχου; Που υπάρχουν διαφορετικές μέσες τιμές;

ANOVA

Horsepower					
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	144039,1	2	72019,564	63,672	,000
Within Groups	447916,3	396	1131,102		
Total	591955,4	408			

Multiple Comparisons

Dependent Variable: Horsepower

	(I) Country of Origin	(J) Country of Origin	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
Tukey HSD	American	European	38,61*	4,525	,000	27,96	49,25
		Japanese	39,77*	4,343	,000	29,55	49,99
	European	American	-38,61*	4,525	,000	-49,25	-27,96
		Japanese	1,16	5,500	,976	-11,77	14,10
	Japanese	American	-39,77*	4,343	,000	-49,99	-29,55
		European	-1,16	5,500	,976	-14,10	11,77
Scheffe	American	European	38,61*	4,525	,000	27,49	49,72
		Japanese	39,77*	4,343	,000	29,10	50,44
	European	American	-38,61*	4,525	,000	-49,72	-27,49
		Japanese	1,16	5,500	,978	-12,35	14,68
	Japanese	American	-39,77*	4,343	,000	-50,44	-29,10
		European	-1,16	5,500	,978	-14,68	12,35
LSD	American	European	38,61*	4,525	,000	29,71	47,50
		Japanese	39,77*	4,343	,000	31,23	48,31
	European	American	-38,61*	4,525	,000	-47,50	-29,71
		Japanese	1,16	5,500	,832	-9,65	11,98
	Japanese	American	-39,77*	4,343	,000	-48,31	-31,23
		European	-1,16	5,500	,832	-11,98	9,65

*. The mean difference is significant at the .05 level.

Horsepower

	Country of Origin	N	Subset for alpha = .05	
			1	2
Tukey HSD ^{a,b}	Japanese	79	79,84	
	European	71	81,00	
	American	249		119,61
	Sig.		,968	1,000
Duncan ^{a,b}	Japanese	79	79,84	
	European	71	81,00	
	American	249		119,61
	Sig.		,809	1,000
Scheffe ^{a,b}	Japanese	79	79,84	
	European	71	81,00	
	American	249		119,61
	Sig.		,971	1,000

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 97,533.

b. The group sizes are unequal. The harmonic mean of the group sizes is used. Type I error levels are not guaranteed.

Τιμές F κατανομής $\alpha=5\%$

Β.ε. 2° \ 1° ->	1	2	3	4	5
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,3
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53

Μερος 2ο

περιεχόμενα

- Ανάλυση διακύμανσης μεταξύ μιας διατεταγμένης μεταβλητής και πολλών κατηγοριών μιας ποιοτικής είτε πολλών δειγμάτων

προϋποθέσεις μη παραμετρικών ελέγχων

Οι κατανομές των δειγμάτων – ομάδων δεν είναι κανονικές με ίσες διακυμάνσεις

Η εξαρτημένη μεταβλητή ελέγχου δεν είναι ποσοτική, αλλά είναι διατάξιμη (διαβαθμιζόμενη κλίμακα τιμών)

Είδη ελέγχων παρόμοιων με ανάλυση διακύμανσης

- Kruskal Wallis
 - Έλεγχος ισότητας μέτρων θέσης σε 3 ή περισσότερους ανεξάρτητους πληθυσμούς με παρόμοια κατανομή.
- Friedman
 - Έλεγχος ισότητας μέτρων θέσης σε συσχετιζόμενους πληθυσμούς.