PhD, MBA Βεζέρης Δημήτριος

Επιχειρησιακή έρευνα.

ΔΙΕΘΝΕΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Lecture OR - Dijkstra Algorithm

OR - Αλγόριθμος Dijkstra

Αλγόριθμοι συντομότερης διαδρομής

Οι πιο γνωστοί αλγόριθμοι επίλυσης δικτύων είναι οι αλγόριθμοι Dijsktra και Floyd. Εδώ εξετάζουμε τον αλγόριθμο Dijsktra θεωρώντας ότι ο αλγόριθμος Floyd εντάσσεται στον Dijkstra.

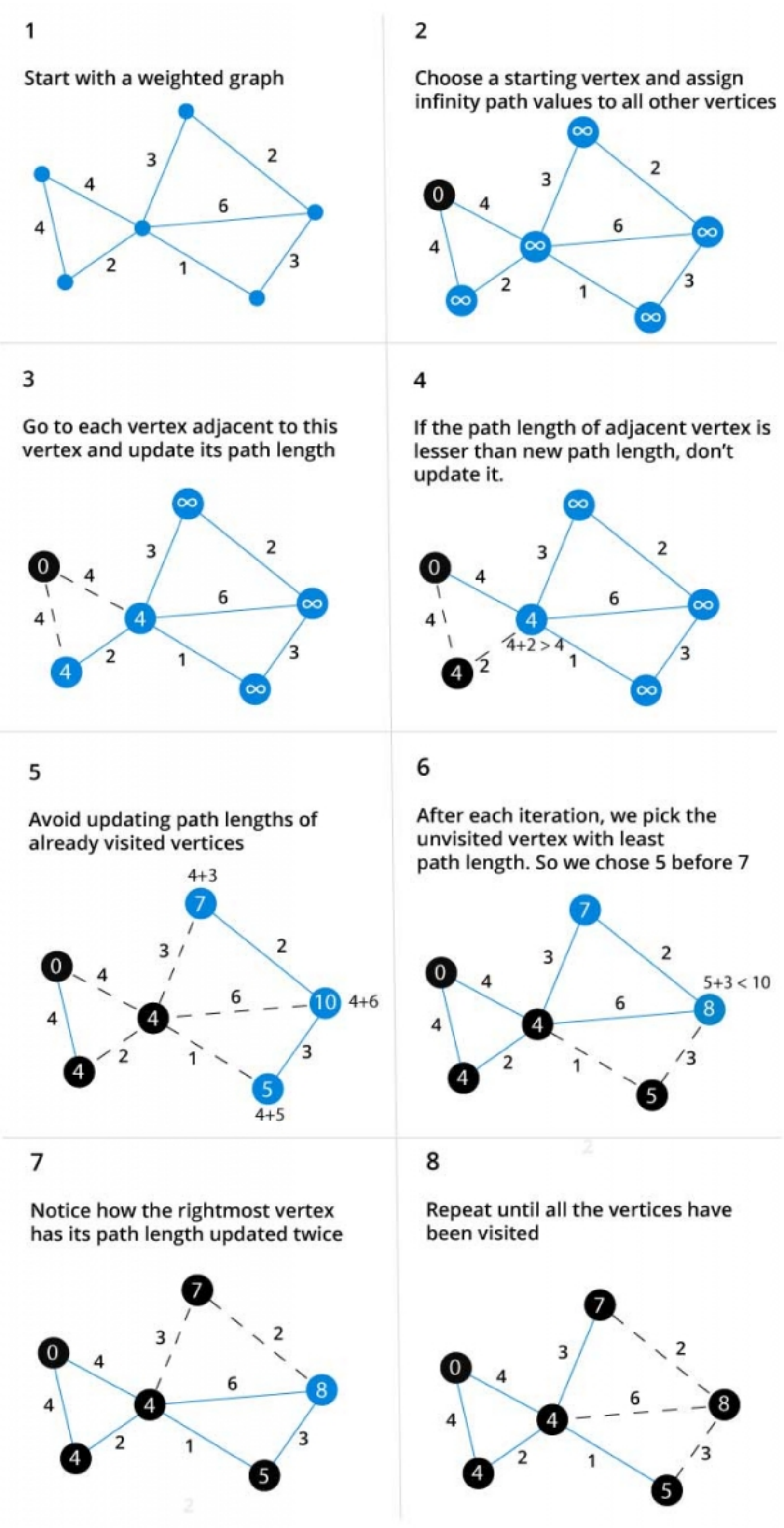
Αλγόριθμος Dijsktra

Έστω Ui είναι η συντομότερη απόσταση από τον κόμβο πηγή 1 στον κόμβο i και ορίζουμε D(i,j) (>=0) ως το βάρος την ακμής (i,j). O αλγόριθμος ορίζει την την προσωρινή ετικέτα για έναν άμεσα διαδοχικό κόμβο ως:

U(i,j) = [i,Ui+D(i,j)], D(i,j)>=0.

Η ετικέτα για τον κόμβο εκκίνησης είναι η [-,0], δηλώνοντας ότι αυτός ο κόμβος δεν έχει προηγούμενο και ότι η απόσταση (βάρος) από τον προηγούμενο είναι μηδέν. Η προσωρινή ετικέτα ενός κόμβου γίνεται μόνιμη, αν δεν υπάρχει καμία άλλη με μικρότερη απόσταση από αυτήν, για αυτόν τον κόμβο.

Έτσι λοιπόν έχουμε:



Αρχικό βήμα

Βάζουμε ετικέτα στον κόμβο - πηγή [-,0]. Βάζουμε σε όλους τους υπόλοιπους κόμβους την ετικέτα [-,∞], που ορίζει στην αρχικά άπειρη την απόσταση από την πηγή (μεγαλύτερη δεν υπάρχει, συνεπώς όλες οι υπόλοιπες που μπορούν να υπολογιστούν θα είναι μικρότερες). Θέτουμε επόμενο βήμα το i=1.

Βήμα i (γενικά)

1. Υπολογίζουμε τις προσωρινές ετικέτες [i,Ui+D(i,j)], των αμέσως επόμενων διασυνδεδεμένων κόμβων με τον προηγούμενο, και τις αναγράφουμε σε αυτούς, μόνο σε περίπτωση που δεν υπάρχει άλλη ετικέτα, εκτός αν η νέα ετικέτα έχει μικρότερο βάρος, από την τελευταία προσωρινή.

2. Εάν όλοι οι κόμβοι έχουν μόνιμη ετικέτα, τότε σταματάμε τον αλγόριθμο. Αν όχι τότε επιλέγουμε την προσωρινή ετικέτα U[s,r] με το μικρότερο βάρος, τη θέτουμε σε μόνιμη και θέτουμε i = r και επαναλαμβάνουμε το βήμα i.

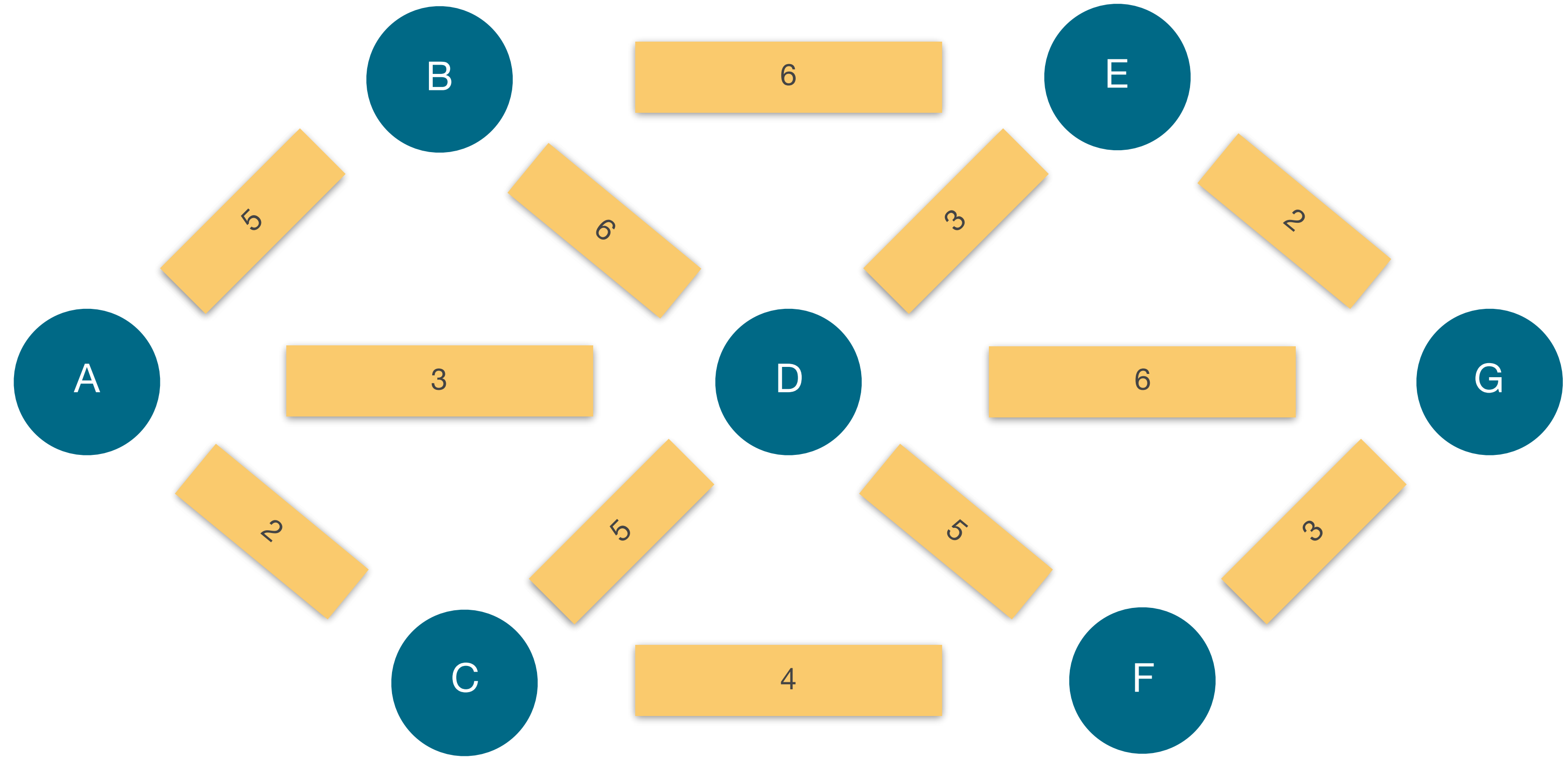
Εφαρμογή αλγορίθμου Dijsktra

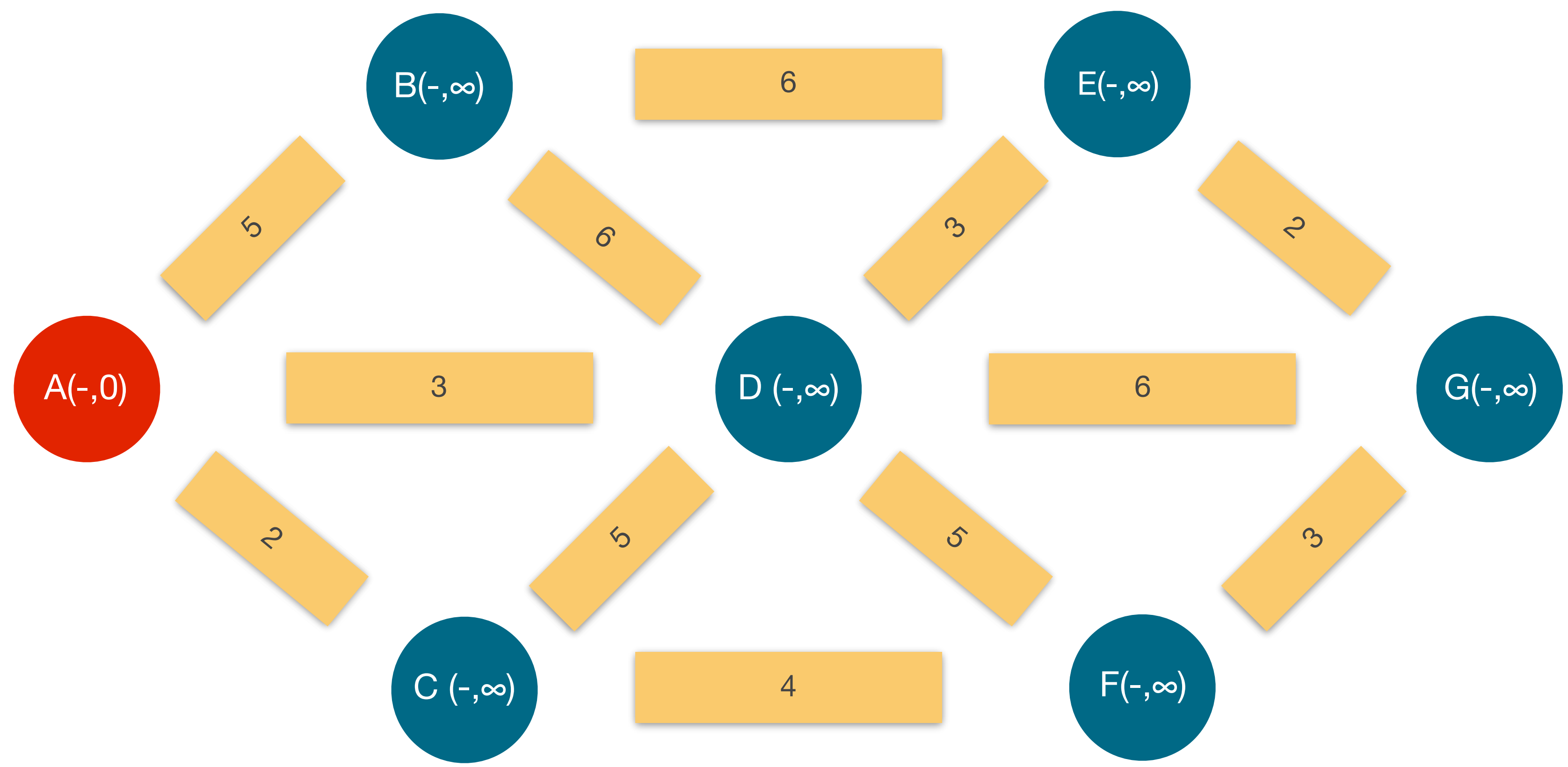
Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο στο διπλανό δίκτυο. Θέλουμε να βρούμε την διαδρομή από το A στο G με το μικρότερο βάρος.

Αρχικά θα τοποθετήσουμε την ετικέτα στον κόμβο πηγή με μηδενικό βάρος.

Σε όλους τους άλλους κόμβους θα τοποθετήσουμε την ετικέτα με την άπειρη απόσταση.

Ο κόμβος που λαμβάνει μόνιμη ετικέτα είναι ο κόμβος πηγή - αφετηρία, διότι δεν πρόκειται να υπάρξει μικρότερο του μηδενός βάρος από προηγούμενο κόμβο, διότι δεν υπάρχει προηγούμενος κόμβος.





Εφαρμογή αλγορίθμου Dijsktra

Βήμα 1

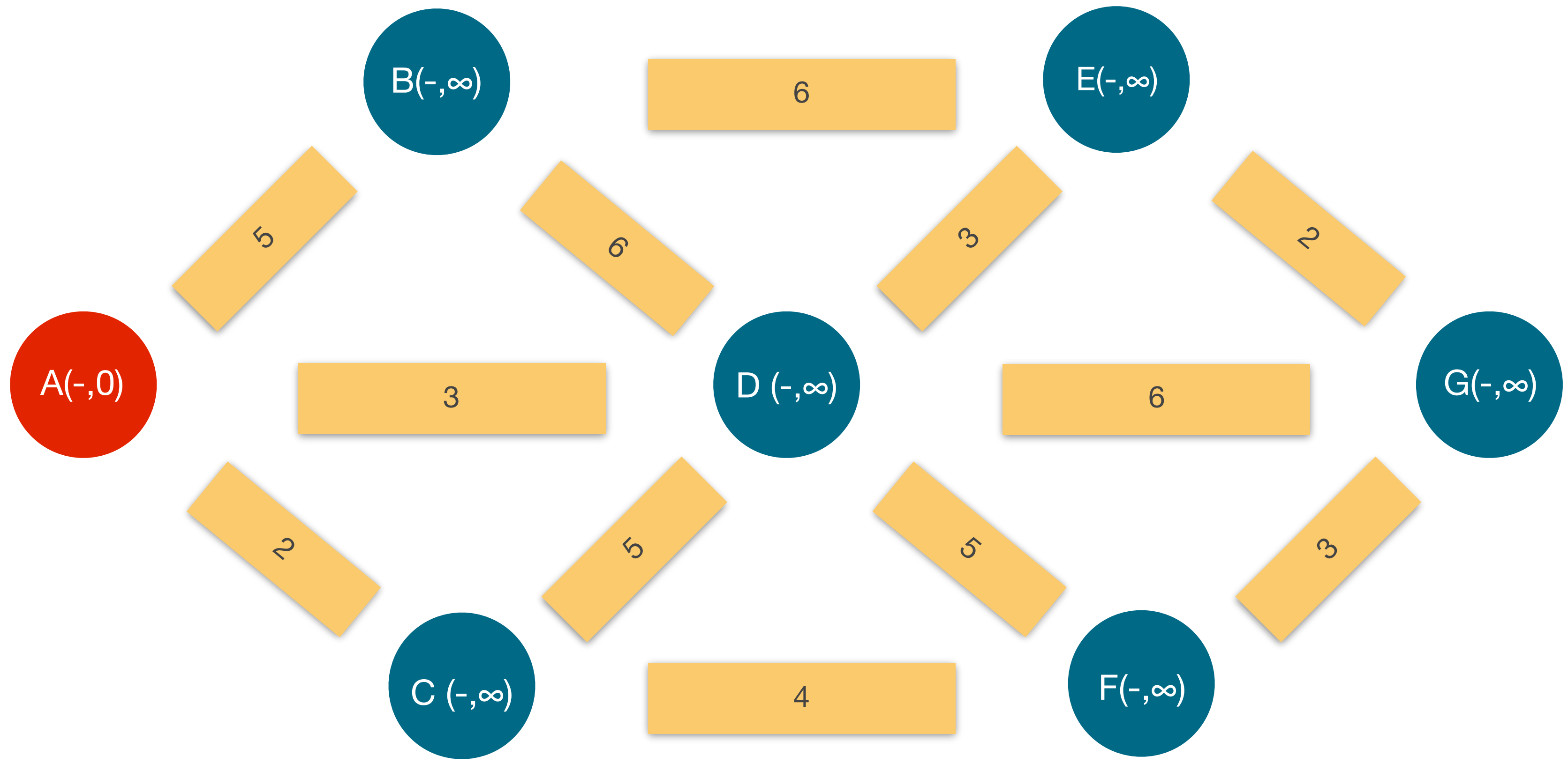
Στη συνέχεια, βλέπουμε τους επόμενους από την πηγή κόμβους B,C και D οι οποίοι έχουν αντίστοιχα νέα βάρη,

Κόμβος B: βάρος κόμβου A + απόσταση A,B = 0+5=5,

Κόμβος C: βάρος κόμβου A + απόσταση A,C = 0+2=2 και

Κόμβος D: βάρος κόμβου A + απόσταση A,D = 0+3=3.

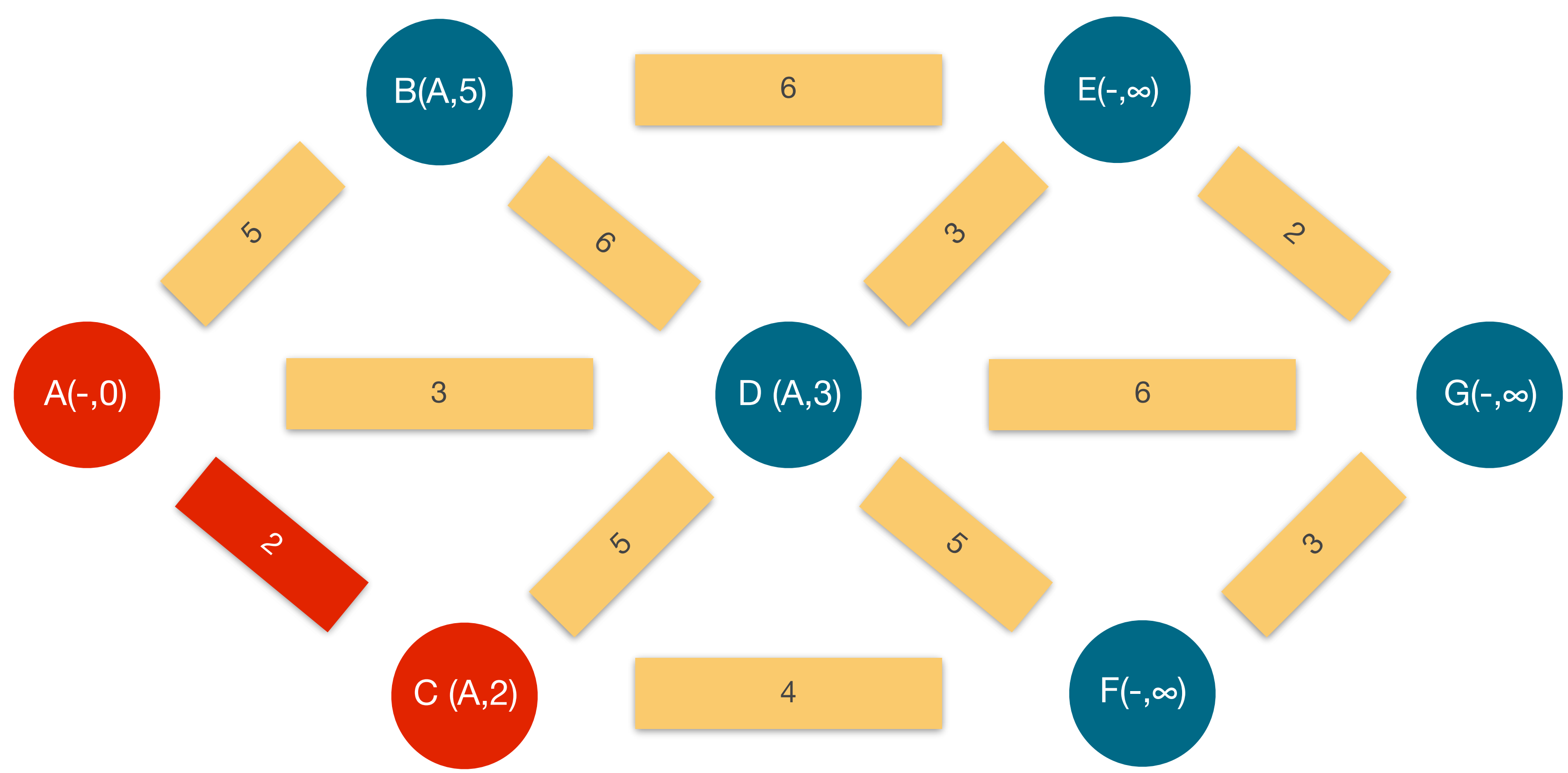
Λόγω του ότι τα βάρη αυτά είναι μικρότερα από το άπειρο, θα αντικατασταθούν και οι τρεις ετικέτες με τις νέες προσωρινές.



Βήμα 2

Από όλους τους κόμβους B,C,D,E,F και G ο C έχει τη μικρότερη απόσταση (2), οπότε η ετικέτα του γίνεται μόνιμη.

Επίσης σημειώνουμε την μικρότερη απόσταση με κόκκινο.



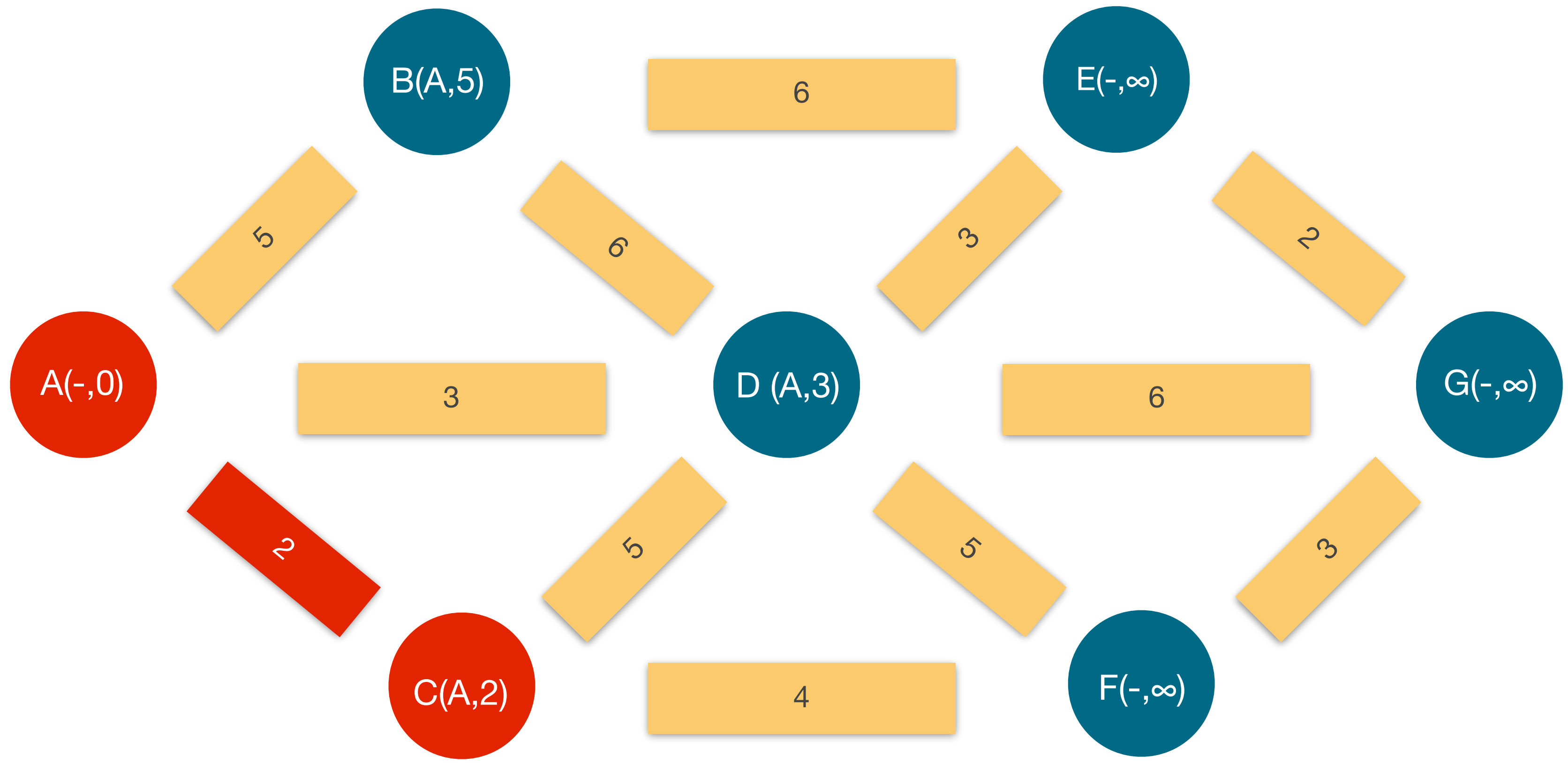
Εφαρμογή αλγορίθμου Dijsktra

Βήμα 1

Στη συνέχεια, βλέπουμε τους επόμενους από τον κόμβο C κόμβους D και F οι οποίοι έχουν αντίστοιχα νέα βάρη,

Κόμβος D: βάρος κόμβου C + απόσταση C,D = 2+5=7, το οποίο είναι μεγαλύτερο του 3, οπότε και δεν αντικαθίστανται,

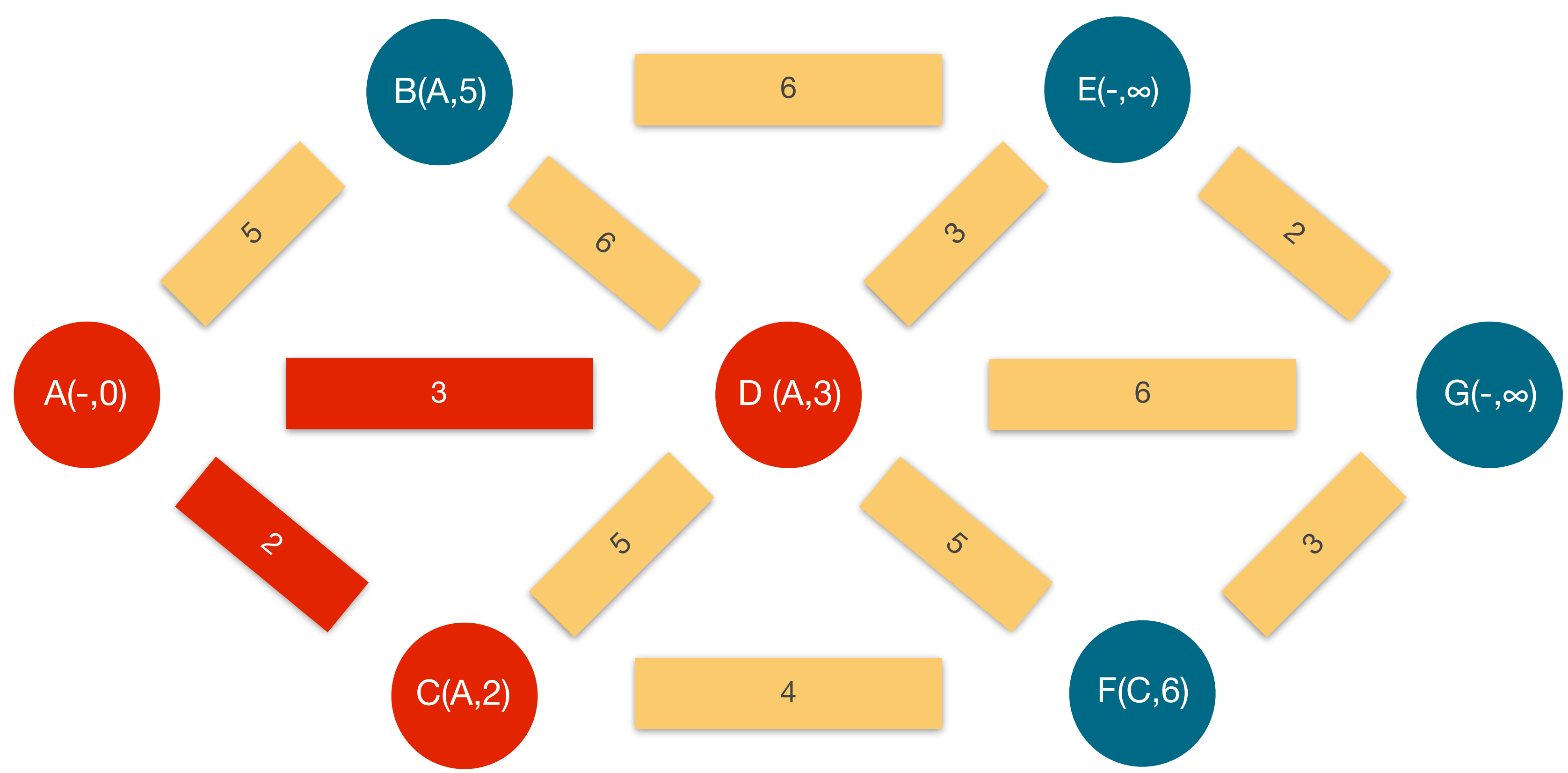
Κόμβος F: βάρος κόμβου C + απόσταση C,F = 2+4=6.



Βήμα 2

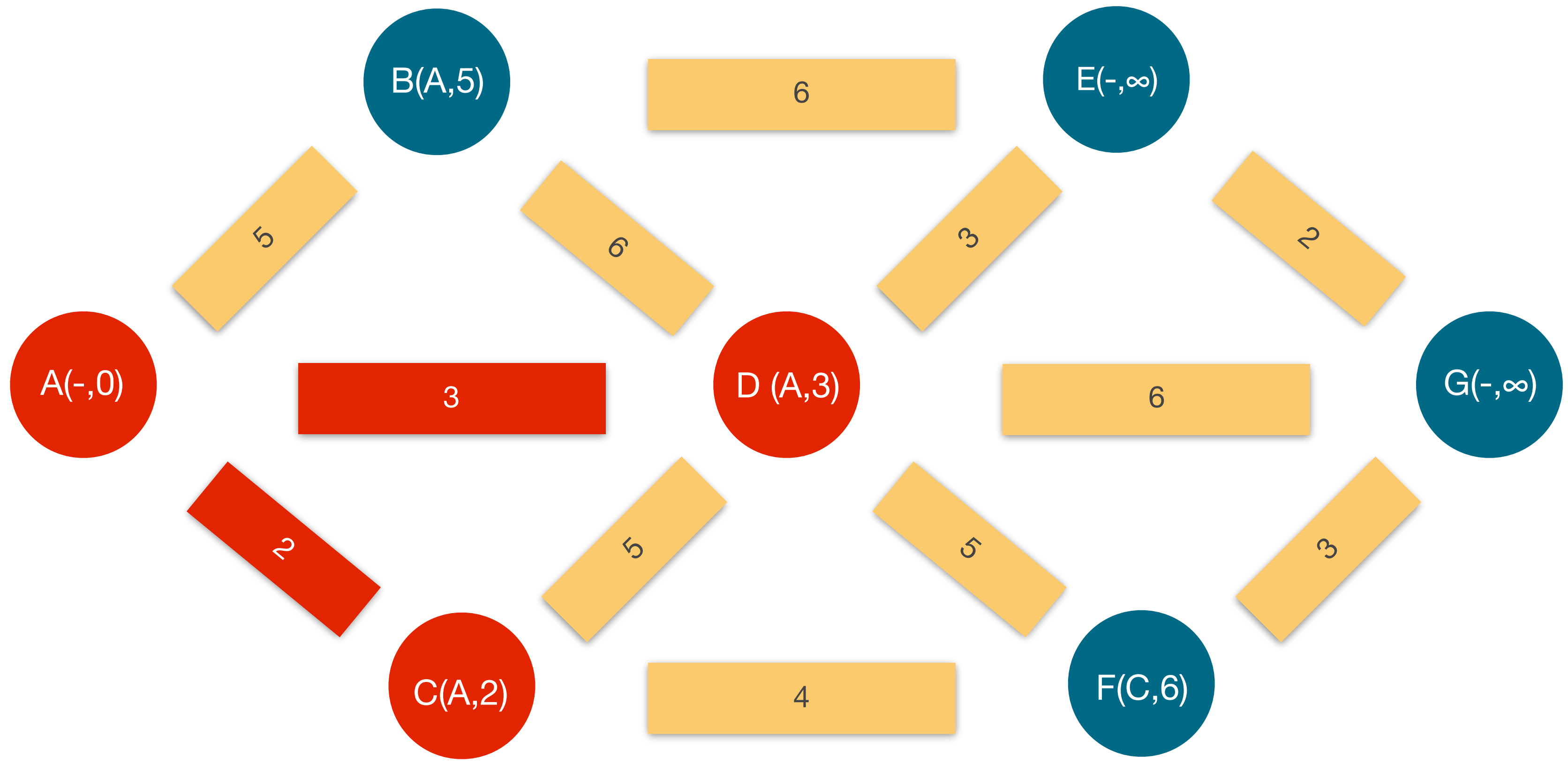
Από όλους τους κόμβους με προσωρινές ετικέτες B,D,E,F και G ο D έχει τη μικρότερη απόσταση (3), οπότε η ετικέτα του γίνεται μόνιμη.

Επίσης σημειώνουμε την μικρότερη απόσταση (3) με κόκκινο.



Εφαρμογή αλγορίθμου Dijsktra

Βήμα 1



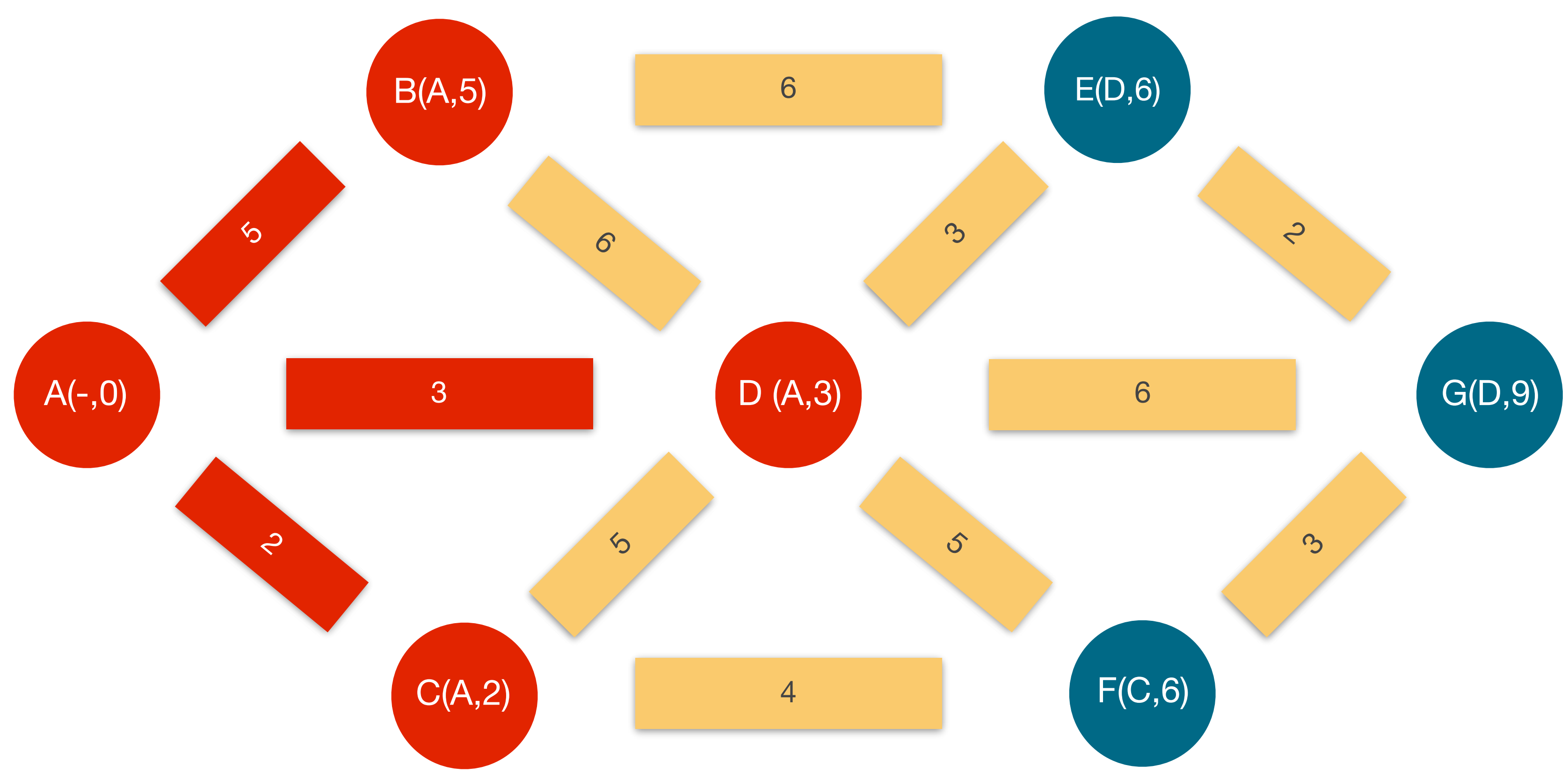
Στη συνέχεια, βλέπουμε τους επόμενους από τον κόμβο D, κόμβους E,F και G οι οποίοι έχουν αντίστοιχα νέα βάρη,

Κόμβος E: βάρος κόμβου D + απόσταση D,E = 3+3=6, όπου αντικαθιστά το άπειρο βάρος,

Κόμβος F: βάρος κόμβου D + απόσταση D,F = 3+5=8. Λόγω του ότι 8>6 δεν αντικαθιστούμε την ετικέτα και

Κόμβος G: βάρος κόμβου D + απόσταση D,G = 3+6=9, όπου αντικαθιστά το άπειρο βάρος.

Βήμα 2



Από όλους τους κόμβους B,E,F και G ο B έχει τη μικρότερη απόσταση (5), οπότε η ετικέτα του γίνεται μόνιμη.

Επίσης σημειώνουμε την μικρότερη απόσταση με κόκκινο.

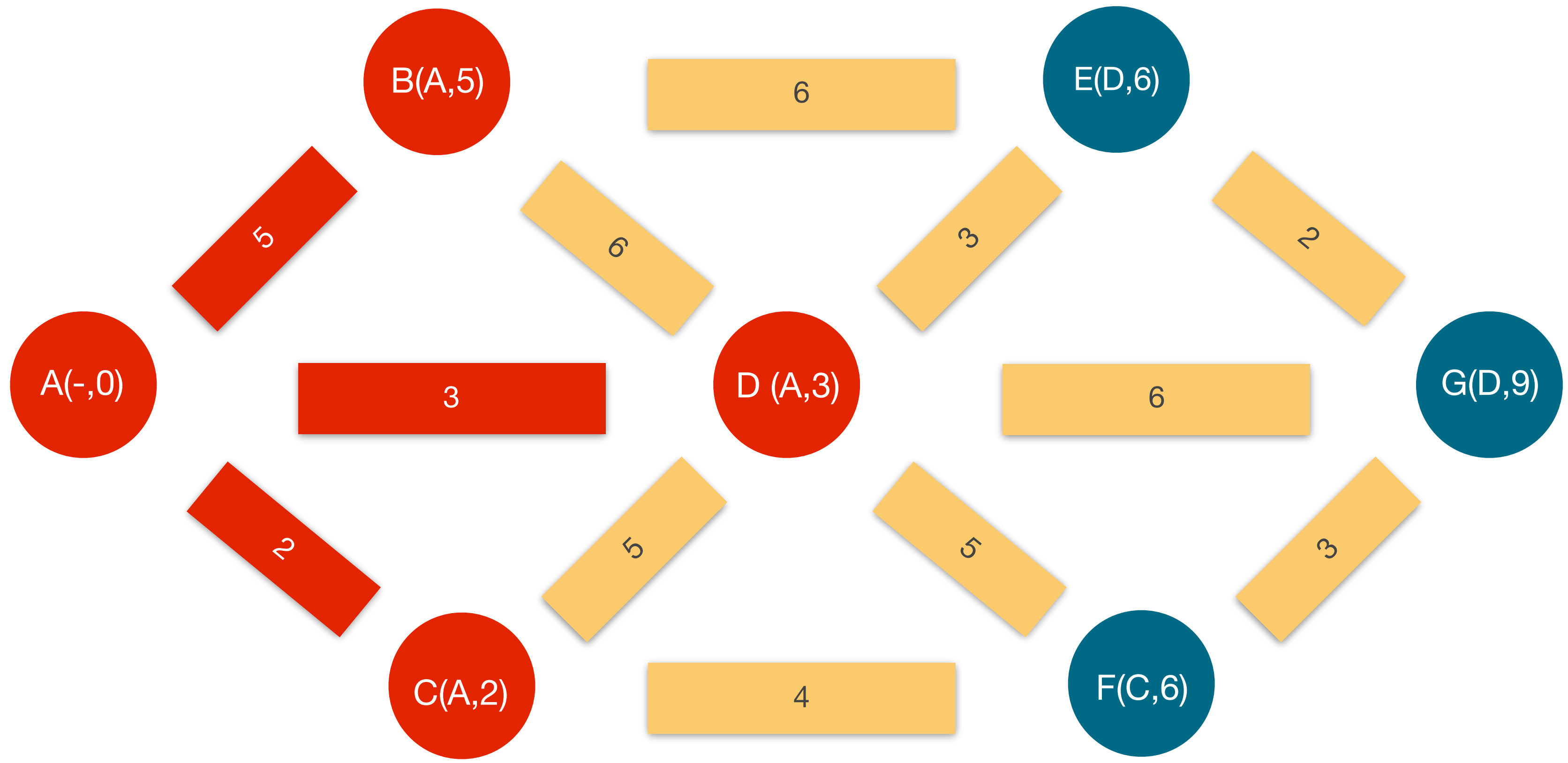
Εφαρμογή αλγορίθμου Dijsktra

Βήμα 1

Στη συνέχεια, βλέπουμε τους επόμενους από τον κόμβο B, κόμβους D και E οι οποίοι έχουν αντίστοιχα νέα βάρη,

Κόμβος D: δεν εξετάζεται λόγω μόνιμης ετικέτας,

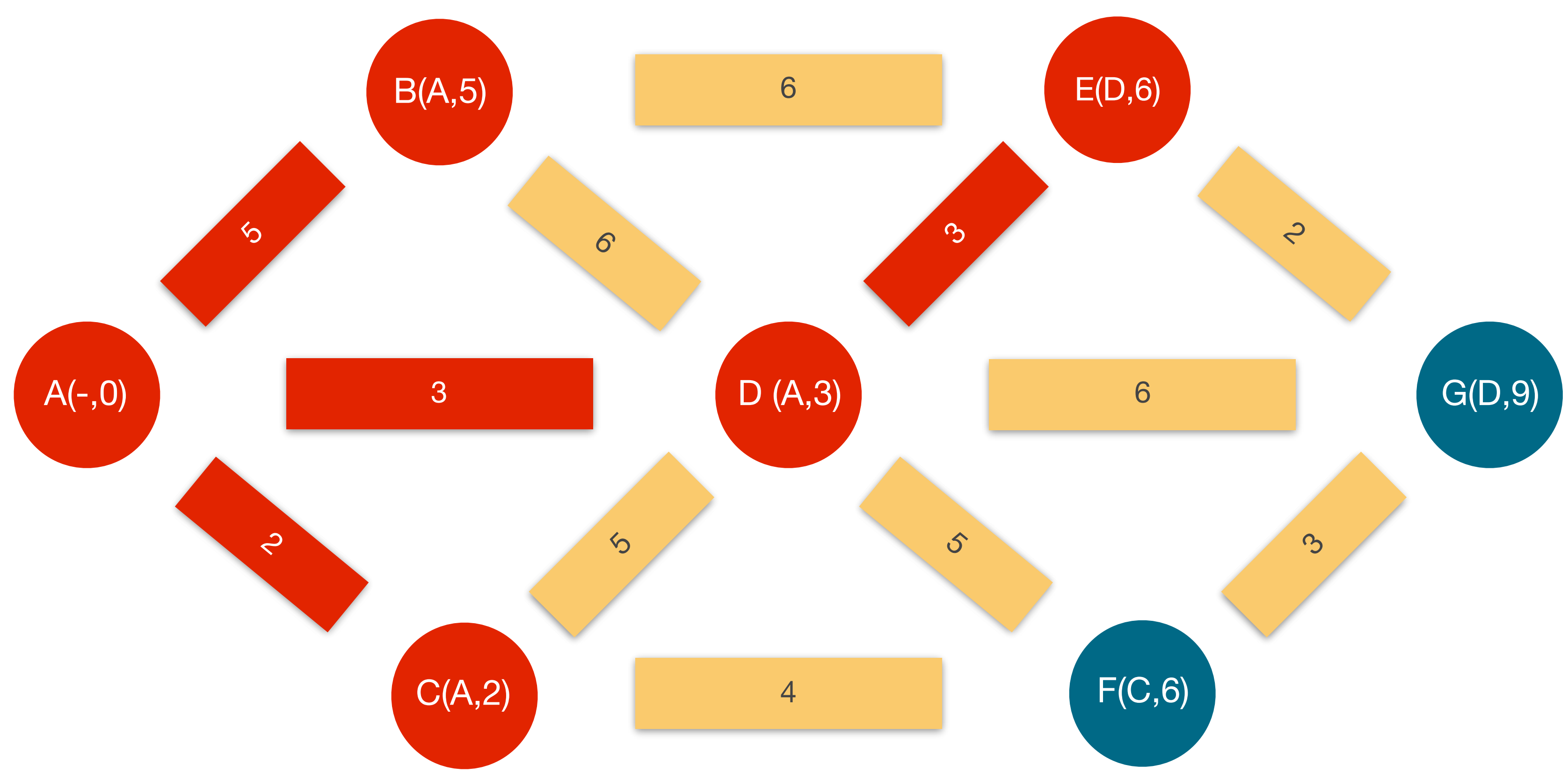
Κόμβος E: βάρος κόμβου B + απόσταση B,E = 5+6=11. Λόγω του ότι 11>6 δεν αντικαθιστούμε την ετικέτα.



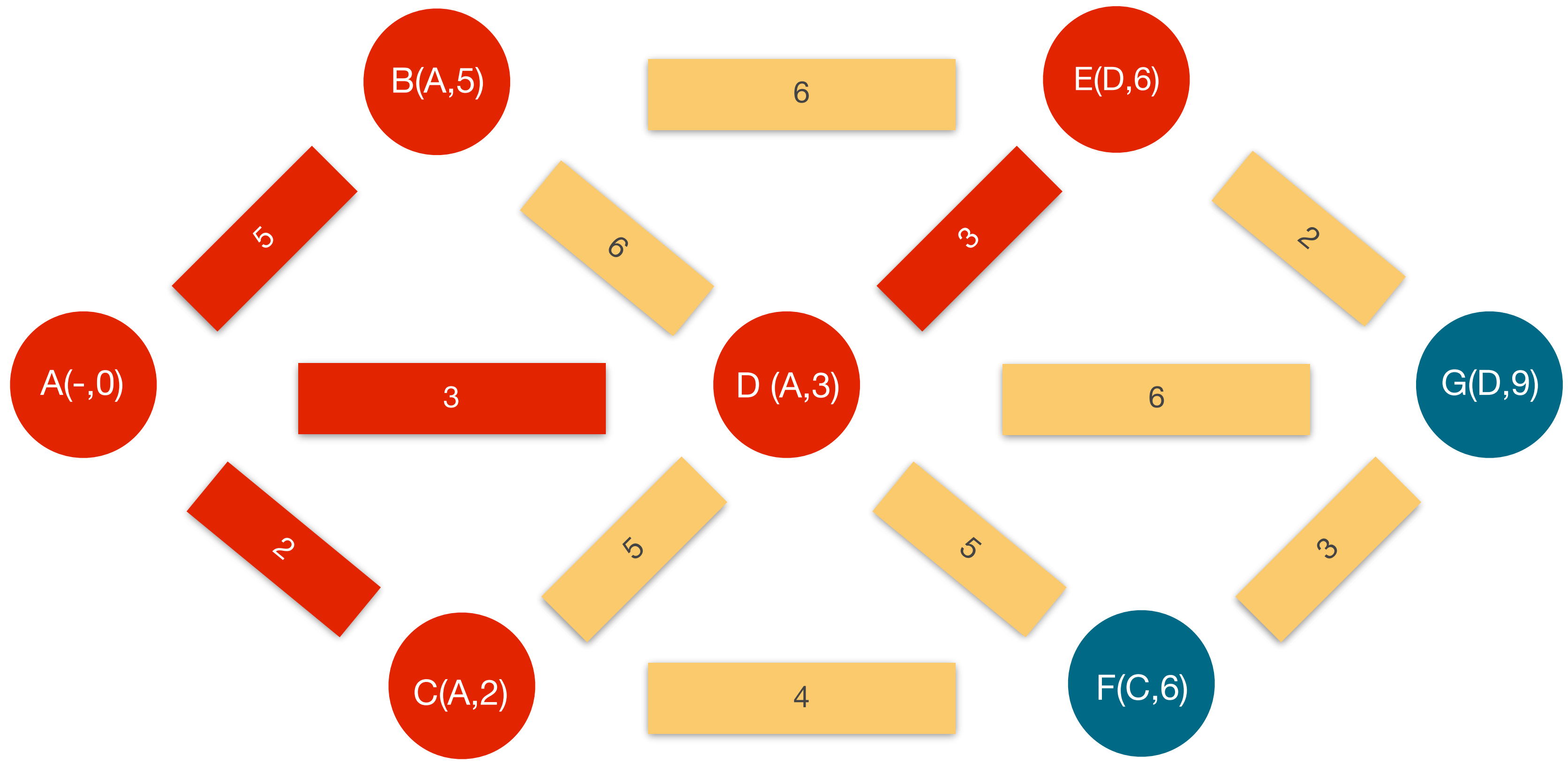
Βήμα 2

Από όλους τους κόμβους E,F και G ο E και F έχουν τη μικρότερη απόσταση (6), οπότε διαλέγουμε όποιο θέλουμε αυθαίρετα πχ το E και η ετικέτα του γίνεται μόνιμη.

Επίσης σημειώνουμε την μικρότερη απόσταση με κόκκινο.



Εφαρμογή αλγορίθμου Dijsktra



Βήμα 1

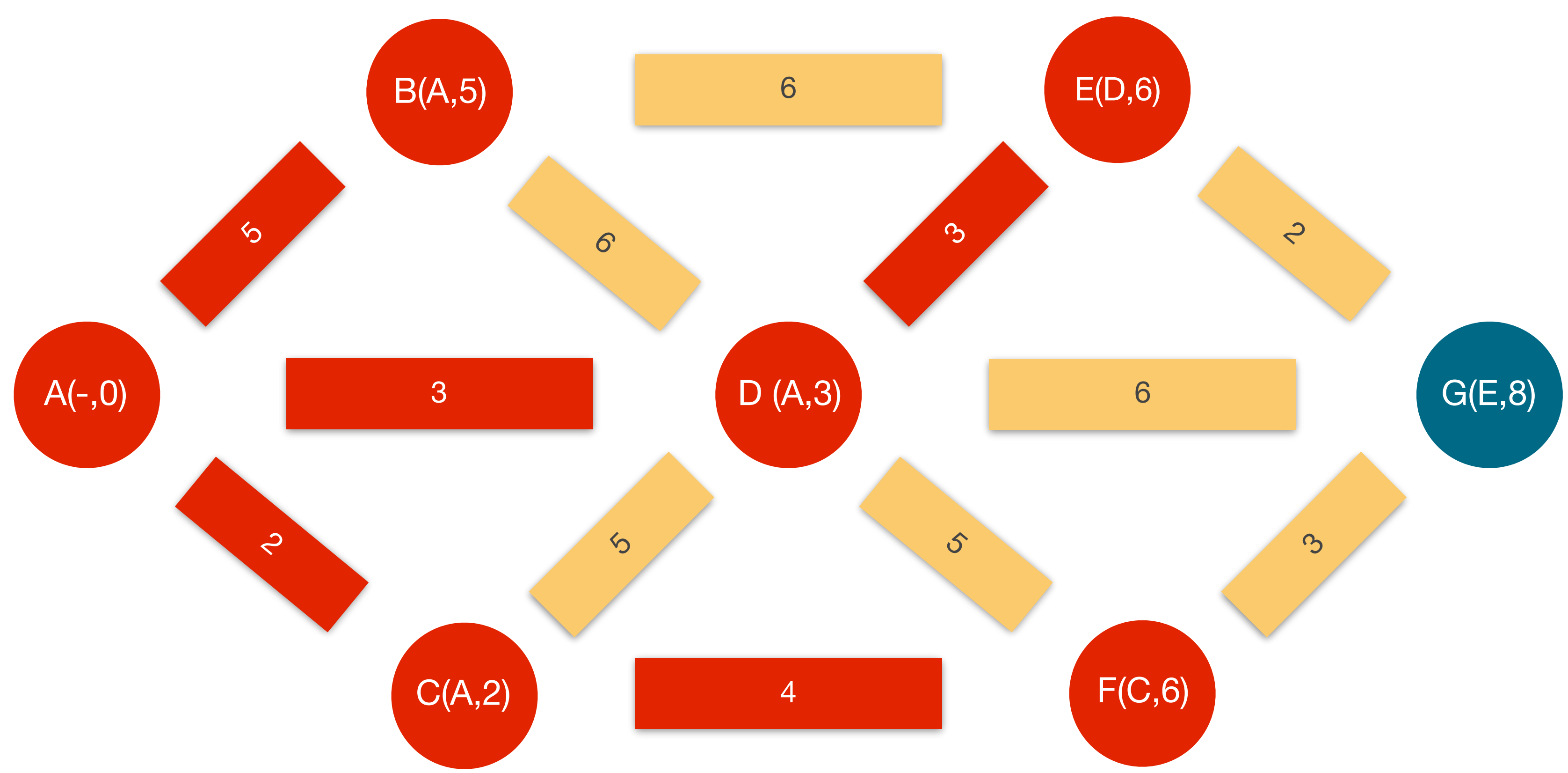
Στη συνέχεια, βλέπουμε τους επόμενους από τον κόμβο E, τον κόμβο G ο οποίος έχει νέο βάρος,

Κόμβος G: βάρος κόμβου E + απόσταση E,G = 6+2=8. Λόγω του ότι 8<9 αντικαθιστούμε την ετικέτα με την E,8.

Βήμα 2

Από όλους τους κόμβους F και G ο F έχει τη μικρότερη απόσταση (6), οπότε η ετικέτα του γίνεται μόνιμη.

Επίσης σημειώνουμε την μικρότερη απόσταση με κόκκινο.

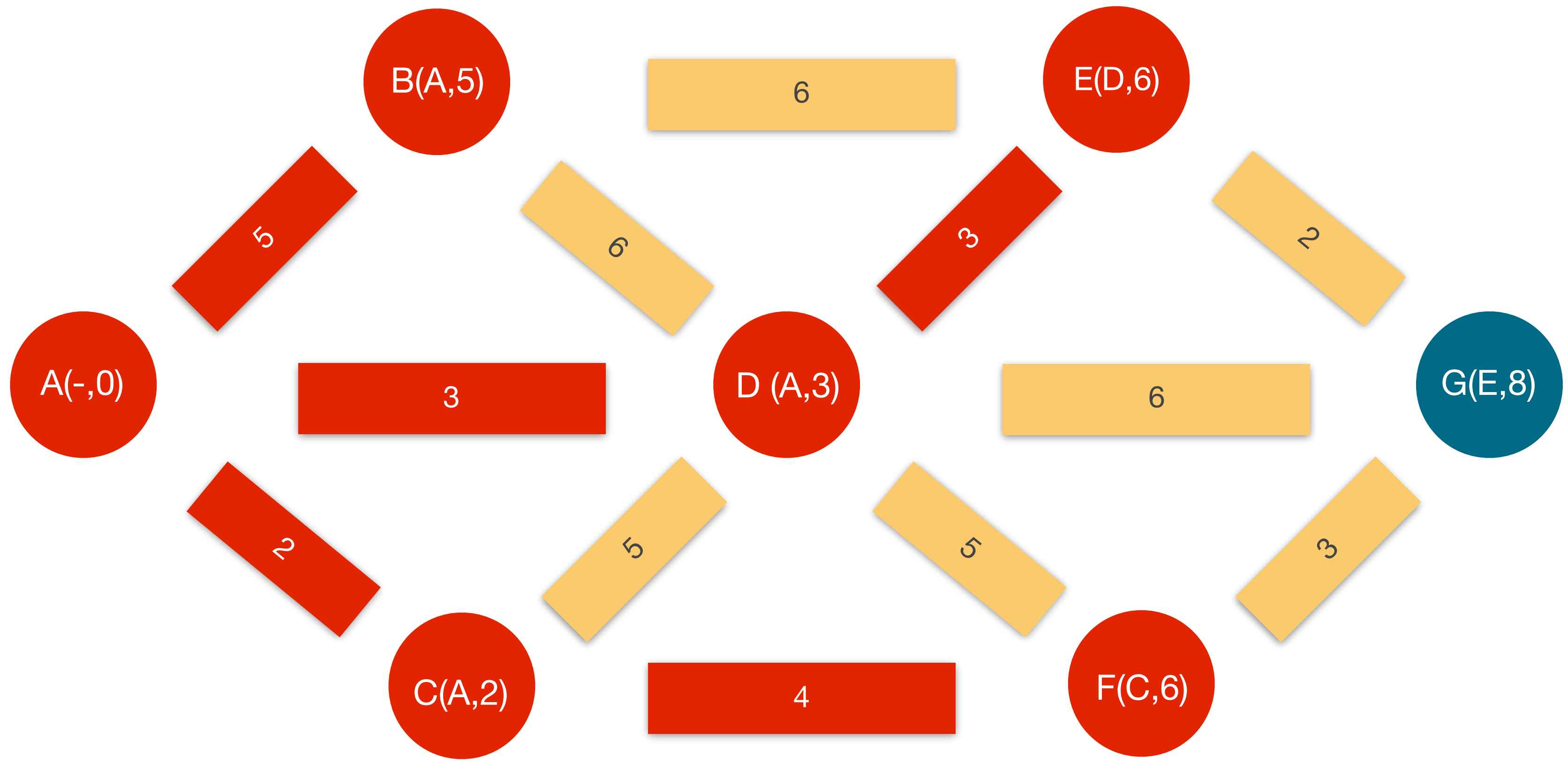


Εφαρμογή αλγορίθμου Dijsktra

Βήμα 1

Στη συνέχεια, βλέπουμε τους επόμενους από τον κόμβο F, τον κόμβο G ο οποίος έχει νέο βάρος,

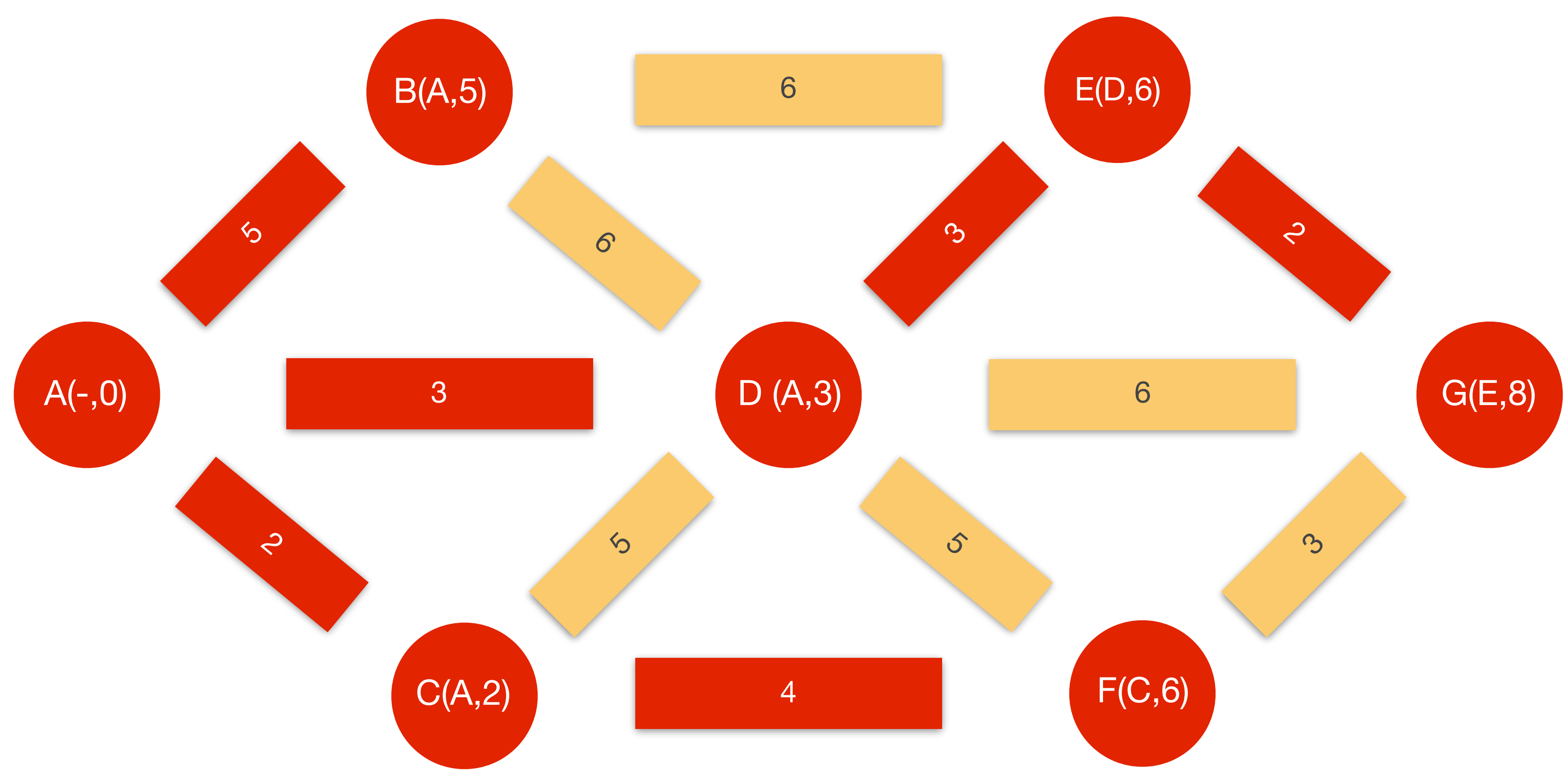
Κόμβος G: βάρος κόμβου F + απόσταση F,G = 6+3=9. Λόγω του ότι 9<8 δεν αντικαθιστούμε την ετικέτα.



Βήμα 2

Από όλους τους κόμβους G έχει τη μικρότερη απόσταση (8) και έχει μείνει τελευταίος, οπότε η ετικέτα του γίνεται μόνιμη.

Επίσης σημειώνουμε την μικρότερη απόσταση με κόκκινο.



Εφαρμογή αλγορίθμου Dijsktra

Διαπιστώσεις

1. Η μικρότερη απόσταση από το A στο G είναι η απόσταση A-D-E-G με βάρος 8.

2. Όλοι οι κόμβοι έχουν μόνιμες ετικέτες.

3. Όλες οι αποστάσεις από το A στους υπόλοιπους κόμβους έχουν σημανθεί με το μικρότερο βάρος.