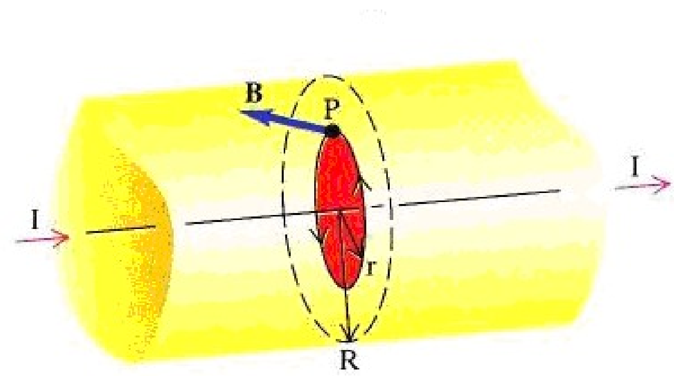
Μαγνητικό Πεδίο – Πηγές Μαγνητικού Πεδίου- Νόμοι Biot – Savart και Ampere

1. Να υπολογίσετε το μαγνητικό πεδίο μέσα σε κυλινδρικό αγωγό μεγάλου μήκους ακτίνα R ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα ένταση I.

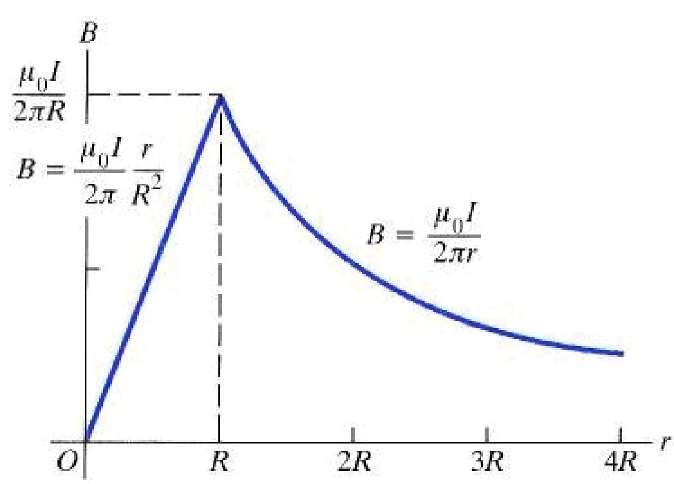
Λύση



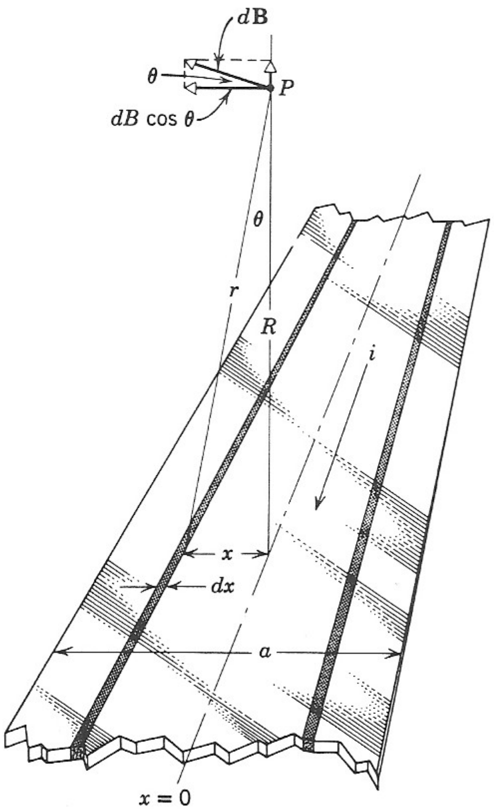
Για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό κυλινδρικού αγωγού ακτίνας R σε απόσταση r από τον άξονά του όπως φαίνεται στο σχήμα, επιλέγουμε ως δρόμο ολοκλήρωσης οποιονδήποτε κύκλο ακτίνας r. Λόγω συμμετρίας το ***B*** έχει το ίδιο μέτρο σε κάθε σημείο αυτού του κύκλου και εφάπτεται σε αυτόν. Άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ίσο με $B(2\pi r)$. Για να υπολογίσουμε το ρεύμα $I_{ολ}$ που περικλείεται από το δρόμο, παρατηρούμε ότι η πυκνότητα ρεύματος J (ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας) είναι $I / \pi R^2$, επομένως $I_{ολ} = J (\pi r^2) = I r^2 / R^2$. Τελικά από τον νόμο του Ampere έχουμε

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{ολ} \Rightarrow B\cdot(2\pi\cdot r) = \mu_0 \cdot \frac{I\cdot r^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I\cdot r}{R^2}$$

Το δεύτερο δείχνει τη γραφική παράσταση του B σαν συνάρτηση του r, τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του αγωγού.



2. Το σχήμα δείχνει επίπεδη χάλκινη ταινία πλάτους *α* και αμελητέου πάχους, που διαρρέεται από ρεύμα *I*. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση *R* από το κέντρο της ταινίας και κάθετα σ' αυτό.



Λύση.

Ας διαιρέσουμε την ταινία σε μικρά απειροστά νήματα πλάτους dx που το καθένα θεωρείται σαν σύρμα με ρεύμα dI το οποίο δίνεται από $dI = I\,(dx / \alpha)$. Η τιμή του dB για το πεδίο στο P του σχήματος, που δημιουργεί το στοιχείο από το νόμο του Ampere είναι:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot dI}{2\pi \cdot r} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dx}{2\pi \cdot r \cdot \alpha}$$

όπου

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

τελικά

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot dI}{2\pi \cdot r} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot \alpha}\frac{dx}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

Οι συνιστώσες του πεδίου κατά τους άξονες x και y όπως φαίνονται στο σχήμα είναι

$$dB_y = dB\sin\theta \qquad \text{και} \qquad dB_x = dB\cos\theta$$

ενώ

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \qquad \text{και} \qquad \cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Τελικά

$$dB_y = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot \alpha} \cdot \frac{x \cdot dx}{(x^2 + R^2)} \qquad \text{και} \qquad dB_x = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot \alpha} \cdot \frac{R \cdot dx}{(x^2 + R^2)}$$

Ολοκληρώνοντας τις πιο πάνω σχέσεις έχουμε

$$B_y = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot \alpha} \cdot \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{x \cdot dx}{(x^2 + R^2)} \Rightarrow B_y = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot \alpha} \cdot \left[\frac{1}{2} \ln\left(x^2 + R^2\right) \right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$B_y = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot \alpha} \cdot \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha^2}{4} + R^2 \right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha^2}{4} + R^2 \right) \right] \Rightarrow$$

$$B_y = 0$$

Και

$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot \alpha} \cdot \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{R \cdot dx}{(x^2 + R^2)} \Rightarrow B_x = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R}{2\pi \cdot \alpha} \cdot \left[\frac{1}{R} \cdot \tan^{-1} \frac{x}{R} \right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot \alpha} \cdot \left[\tan^{-1} \frac{a}{2R} - \left(-\tan^{-1} \frac{a}{2R} \right) \right] \Rightarrow$$

$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi \cdot \alpha} \cdot \left(\tan^{-1} \frac{a}{2R} \right)$$

Βλέπουμε ότι μόνο η οριζόντια συνισταμένη του ***dB*** είναι ενεργός γιατί η κατακόρυφη εξουδετερώνεται από την αντίστοιχη συνιστώσα του συμμετρικού στοιχειώδους σύρματος. Επομένως $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_x}$. Για μακρινά σημεία η α / 2R είναι μικρή γωνία για την οποία $tan^{-1}\alpha \approx \alpha$ έτσι έχουμε :

$$B \cong \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi \cdot \alpha} \cdot \left(\frac{a}{2R} \right) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot R}$$

Το αποτέλεσμα αυτό το περιμένει κανείς γιατί σε μακρινά σημεία η ταινία δεν ξεχωρίζει από ένα απλό κυλινδρικό σύρμα.

3. Κυλινδρικός αγωγός ακτίνας α = 2,5 cm διαρρέεται κατά μήκος του από ρεύμα I = 2,5 A. Το ρεύμα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο καθ΄ όλη τη διατομή του αγωγού. α) Υπολογίστε το

μαγνητικό πεδίο στο μέσο της ακτίνας του σύρματος (δηλαδή, στο r = α/2). β) Βρείτε την απόσταση πέρα από το κέντρο του αγωγού και στο χώρο έξω από τον αγωγό στην οποία το μέτρο του μαγνητικού πεδίου έχει την ίδια τιμή με το μέτρο του πεδίου για r = α/2.

Λύση

α) Εφαρμόζοντας τον νόμο του Apmere για r ≤ α έχουμε

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I'}{2\pi \cdot r} \tag{1}$$

όπου I΄ το ρεύμα που διαρρέει αγωγό ακτίνας r. Επειδή το ρεύμα είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα στη διατομή του αγωγού θα ισχύει:

$$\frac{I'}{I} = \frac{\pi \cdot r^2}{\pi \cdot \alpha^2} \Rightarrow I' = I \cdot \frac{r^2}{\alpha^2} \tag{2}$$

Επομένως αντικαθιστώντας την Εξ. (2) στην Εξ.(1) έχουμε

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r}{2\pi \cdot \alpha^2} \tag{3}$$

Για r = α/2 η (3) γίνεται

$$B = \frac{(4\pi \times 10^{-7} T \cdot m / A)(2,5A) \cdot (1,25 \times 10^{-2} m)}{2\pi \cdot (2,5 \times 10^{-2} m)^2} = 10,0\mu T$$

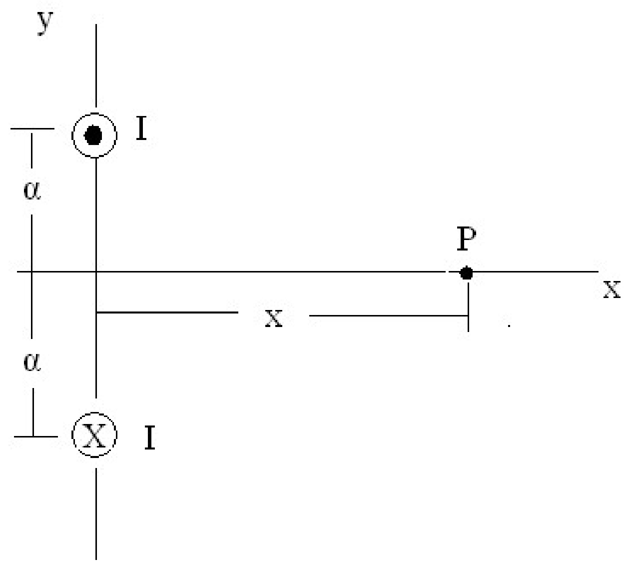
β) Το μαγνητικό πεδίο για r ≥ α είναι

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

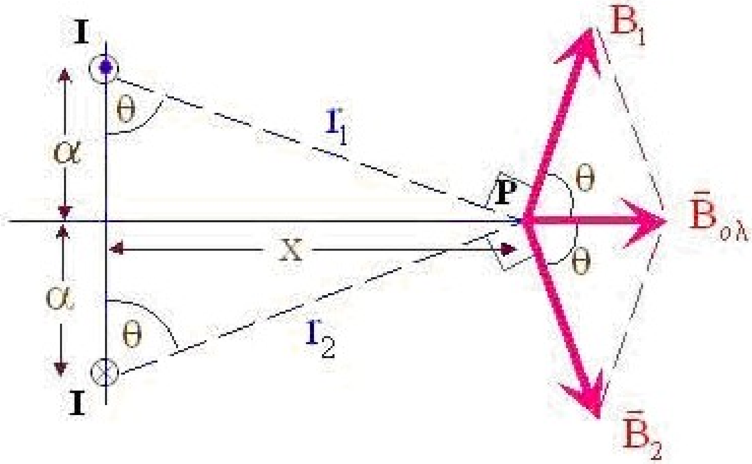
άρα

$$r = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot B} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} T \cdot m / A)(2,5A)}{2\pi \cdot (10 \times 10^{-6} T)} = 5,00cm$$

4. Το σχήμα δείχνει δυο παράλληλα σύρματα μεγάλου μήκους κάθετα στη σελίδα (επίπεδο xy), που διαρρέονται από ίσα ρεύματα I με αντίθετες φορές. A) Σχεδιάστε τα διανύσματα του μαγνητικού πεδίου B που δημιουργεί το κάθε σύρμα και το ολικό μαγνητικό πεδίο στο σημείο P. B) Βρείτε μια έκφραση για το μέτρο του ολικού μαγνητικού πεδίου B σε κάθε σημείο του άξονα x, συναρτήσει της συντεταγμένης x του σημείου αυτού. Ποια είναι η κατεύθυνση του B.



Λύση



α. Το πάνω σύρμα δημιουργεί στο σημείο P ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_1$ κάθετο στην ακτίνα r_1 με φορά όπως φαίνεται στο σχήμα (σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού), ενώ το κάτω σύρμα δημιουργεί στο σημείο P ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_2$ κάθετο στην ακτίνα r_2 και με τη φορά του σχήματος, όπως προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Το ολικό μαγνητικό πεδίο $B_{ολ}$ στο σημείο P προκύπτει από τη διανυσματική άθροιση των $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ και σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου είναι αυτή του σχήματος.

β. Τα μέτρα των $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ είναι:

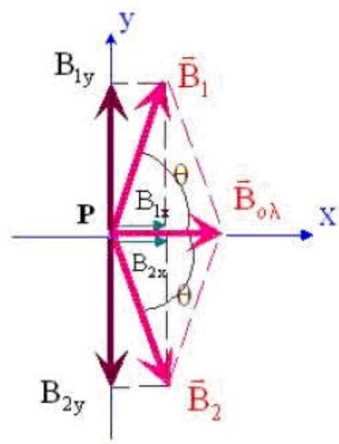
$$B_1 = \frac{\mu_o I}{2\pi r_1} \quad \Rightarrow \quad B_1 = \frac{\mu_o I}{2\pi\sqrt{x^2+\alpha^2}} \quad (1)$$

και

$$B_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi r_2} \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi\sqrt{x^2+\alpha^2}}$$

όπου $r_1 = r_2 = \sqrt{x^2+\alpha^2}$.

Αναλύοντας τα $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ στους άξονες x και y προκύπτει ότι οι συνιστώσες B_{1y} και B_{2y} αλληλοαναιρούνται ως ίσες και αντίθετες, ενώ οι



συνιστώσες B_{1x} και B_{2x} προστίθενται και δίνουν το $\vec{B}_{o\lambda}$ στην κατεύθυνση x με μέτρο:

$$B_{o\lambda} = B_{1x} + B_{2x} = B_1 \cos\theta + B_2 \cos\theta$$

από την οποία επειδή $B_1 = B_2$, έχουμε:

$$B_{o\lambda} = 2B_1 \cos\theta \quad \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$B_{o\lambda} = \cancel{2}\frac{\mu_o I}{\cancel{2}\pi\sqrt{x^2+\alpha^2}}\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$B_{o\lambda} = \frac{\mu_o I}{\pi\sqrt{x^2+\alpha^2}}\cos\theta \quad (2)$$

Αλλά από το σχήμα εύκολα προκύπτει ότι:

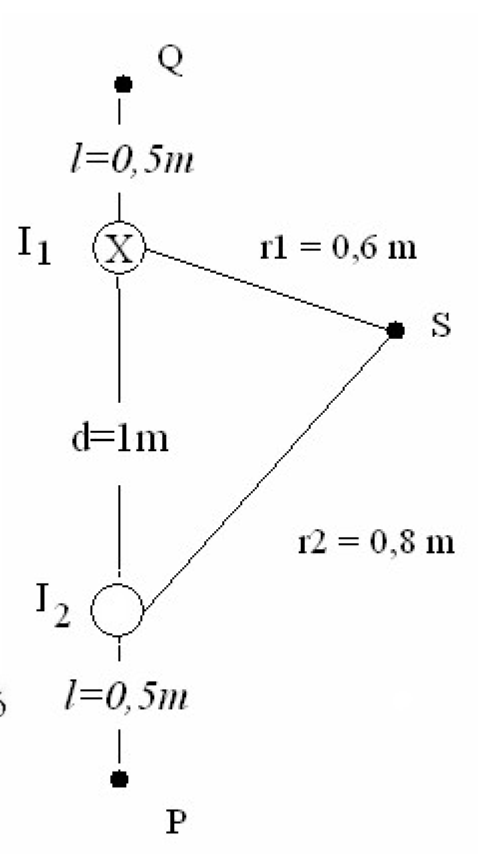
$$\cos\theta = \frac{\alpha}{r_1} = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}$$

οπότε η (2) γίνεται:

$$B_{o\lambda} = \frac{\mu_o I}{\pi\sqrt{x^2+\alpha^2}}\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{B_{o\lambda} = \frac{\mu_o I \alpha}{\pi\left(x^2+\alpha^2\right)}} \quad (3)$$

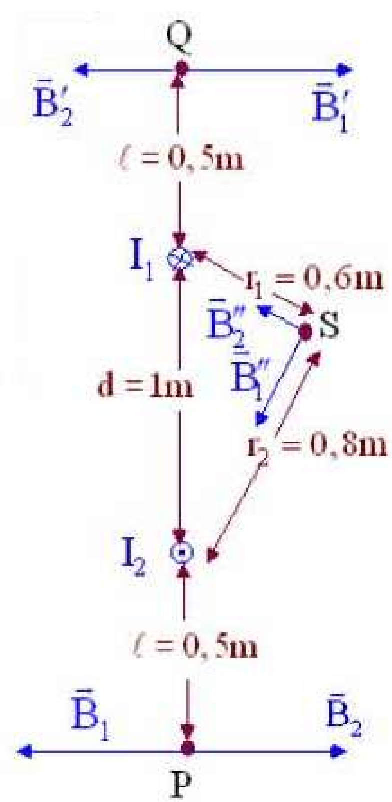
5. Δυο ευθύγραμμα και μεγάλου μήκους παράλληλα σύρματα απέχουν μεταξύ τους 1m .Η διεύθυνση των συρμάτων είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το επάνω σύρμα διαρρέεται από ρεύμα I_1 = 6A με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα. A). Ποιο πρέπει να είναι το I_2, σε μέτρο και φορά, ώστε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P να είναι μηδέν; B). Πόσο είναι τότε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο Q; Γ). Πόσο είναι τότε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο S;



Λύση

α. Στο σημείο P το ρεύμα I_1 δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_1$ προς τα αριστερά με μέτρο:

$$B_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi(d+\ell)} \quad (1)$$



Επομένως για να είναι το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P μηδέν, θα πρέπει το $\vec{B}_2$ να είναι αντίθετο του $\vec{B}_1$, δηλαδή προς τα δεξιά. Άρα το ρεύμα I_2 πρέπει να έχει φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη.

Το μέτρο του $\vec{B}_2$ είναι:

$$B_2 = \frac{\mu_o I_2}{2\pi\ell} \quad (2)$$

Συνεπώς για να είναι το μαγνητικό πεδίο στο P μηδέν, θα πρέπει:

$$\vec{B}_P = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2$$

Από την οποία λόγω των (1) και (2), έχουμε:

$$\frac{\mu_o I_1}{2\pi(d+\ell)}=\frac{\mu_o I_2}{2\pi\ell} \quad\Rightarrow\quad I_2=\frac{\ell I_1}{d+\ell}=\frac{0,5\cdot 6}{1+0,5}=\frac{3}{1,5} \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{I_2=2A}$$

β. Το μαγνητικό πεδίο στο σημείο Q είναι:

$$\vec{B}_Q=\vec{B}_1'+\vec{B}_2'=\frac{\mu_o I_1}{2\pi\ell}\hat{x}+\frac{\mu_o I_2}{2\pi(d+\ell)}(-\hat{x}) \quad\Rightarrow$$

$$\vec{B}_Q=\frac{\mu_o}{2\pi}\left(\frac{I_1}{\ell}-\frac{I_2}{d+\ell}\right)\hat{x}=\frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi}\left(\frac{6}{0,5}-\frac{2}{1+0,5}\right)\hat{x} \quad\Rightarrow$$

$$\vec{B}_Q=2\cdot 10^{-7}(12-1,33)\hat{x}=2\cdot 10^{-7}\cdot 10,67\hat{x} \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{B}_Q=21,34\cdot 10^{-7}\,\hat{x}\text{Tesla}}$$

γ. Επειδή το τρίγωνο που σχηματίζεται στο σημείο S είναι ορθογώνιο, τα μαγνητικά πεδία από τα δυο ρεύματα έχουν τη φορά του σχήματος και τα μέτρα τους είναι:

$$B_1''=\frac{\mu_o I_1}{2\pi r_1}=\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6}{2\pi\cdot 0,6}=\frac{12\cdot 10^{-7}}{0,6} \quad\Rightarrow\quad B_1''=20\cdot 10^{-7}\text{Tesla}$$

$$B_2''=\frac{\mu_o I_2}{2\pi r_2}=\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 2}{2\pi\cdot 0,8}=\frac{4\cdot 10^{-7}}{0,8} \quad\Rightarrow\quad B_2''=5\cdot 10^{-7}\text{Tesla}$$

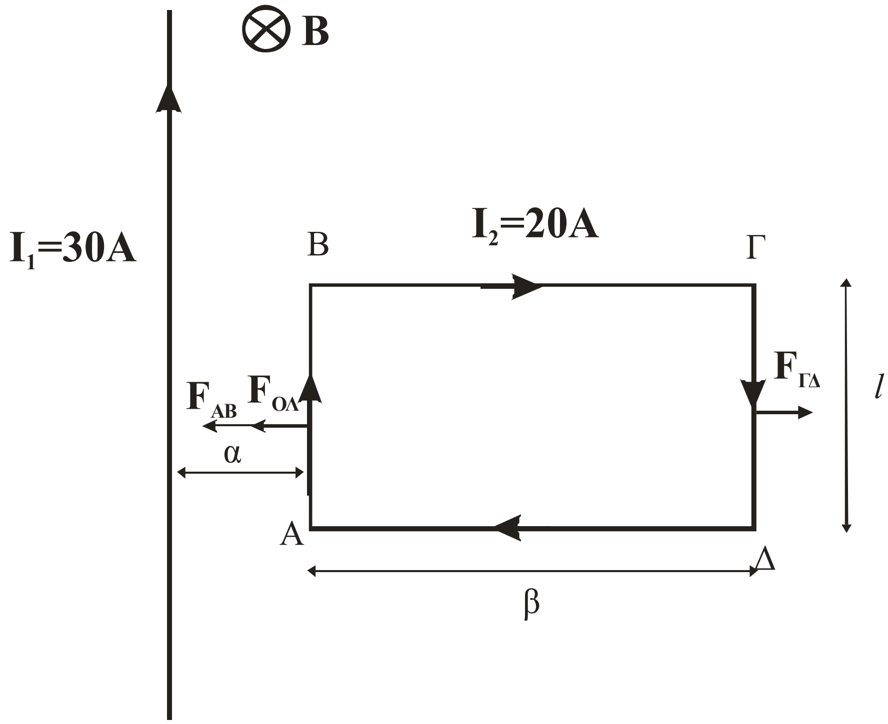
Άρα:

$$B_S=\sqrt{B_1''^2+B_2''^2}=\sqrt{\left(20\cdot 10^{-7}\right)^2+\left(5\cdot 10^{-7}\right)^2}=\sqrt{425}\cdot 10^{-7} \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{B_S=20,6\cdot 10^{-7}\text{Tesla}}$$

6. Το σχήμα δείχνει μακρύ σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα I_1 = 30 A. Ο ορθογώνιος βρόχος διαρρέεται από ρεύμα I_2 = 20 A. Υπολογίστε τη συνισταμένη δύναμη που δρα στον βρόχο. Όπου α = 1,0cm, β = 8,0 cm και l = 3,0 cm.

Λύση



Το πεδίο B σε απόσταση **α** από τον αγωγό με τη βοήθεια του νόμου του Ampere είναι

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi\alpha}$$

Με φορά προς τα μέσα όπως δείχνει το σχήμα και προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού.
Στο τμήμα AB ασκείται δύναμη

$$d\vec{F} = I_{AB} \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

όπου το dl είναι το μήκος l άρα:

$$F_{AB} = I_{AB} \cdot \ell \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi\alpha} \Rightarrow F_{AB} = 20A \cdot 0{,}03m \cdot \frac{(4\pi \times 10^{-7}\, T \cdot A/m) \cdot 30A}{2\pi \cdot (0{,}01m)} \Rightarrow$$

$$F_{AB} = 3{,}6 \times 10^{-4}\, N$$

με φορά αυτή του σχήματος.

Στο τμήμα ΓΔ με τον ίδιο τρόπο το πεδίο από το νόμο του Ampere είναι

$$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{o\lambda} \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 \cdot (I_1 + I_{AB} - I_{\Gamma\Delta})}{2\pi(\alpha+\beta)} \Rightarrow$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi(\alpha+\beta)}$$

Τα ρεύματα I_{AB} και $I_{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα και αντίρροπα άρα αλληλοαναιρούνται και έτσι $I_{o\lambda} = I_1$. Η δύναμη στο τμήμα ΓΔ είναι

$$F_{\Gamma\Delta} = I_{\Gamma\Delta} \cdot \ell \cdot B_2 = I_{\Gamma\Delta} \cdot \ell \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi(\alpha+\beta)} \Rightarrow$$

$$F_{\Gamma\Delta} = 20A \cdot 0{,}03m \cdot \frac{(4\pi \times 10^{-7} T \cdot A/m) \cdot 30A}{2\pi \cdot (0{,}01m + 0{,}08m)} \Rightarrow$$

$$F_{\Gamma\Delta} = 0{,}4 \times 10^{-4} N$$

Με φορά από αριστερά προς τα δεξιά (όπως στο σχήμα).

Οι δυνάμεις $\boldsymbol{F_{B\Gamma}}$ και $\boldsymbol{F_{\Delta A}}$ είναι ίσες και αντίρροπες με αποτέλεσμα να αλληλοαναιρούνται και η συνισταμένη τους να είναι ίση με μηδέν. Έτσι η συνισταμένη δύναμη που δρα στο βρόχο είναι :

$$\sum F = F_{ab} - F_{\Gamma\Delta} = 3{,}2 \times 10^{-4} N$$

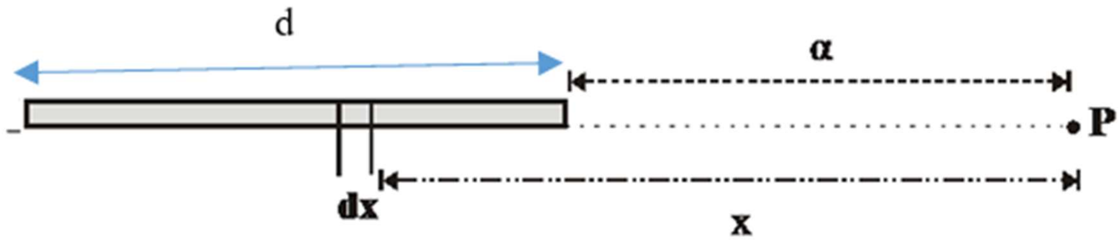
Με φορά αυτή της δύναμης $\boldsymbol{F_{AB}}$ δηλαδή ο αγωγός έλκει το βρόχο.

7. Μία πολύ μακριά επίπεδη ταινία χαλκού πάχους *d* διαρρέεται από ρεύμα *I*. Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο *B* σε ένα σημείο στο επίπεδο της ταινίας και σε απόσταση *α* από την άκρη της.

Λύση

Θεωρούμε τμήμα της ταινίας μήκους *dx*. Το ρεύμα στο *dx* είναι ίσο με

$$dI = \frac{I}{d} \cdot dx$$



Το μαγνητικό πεδίο από τον νόμο του Ampere για το dx είναι

$$\oint d\vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot dI \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 \cdot dI}{2\pi \cdot r} \Rightarrow \tag{1}$$

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot d \cdot r}\cdot dx$$

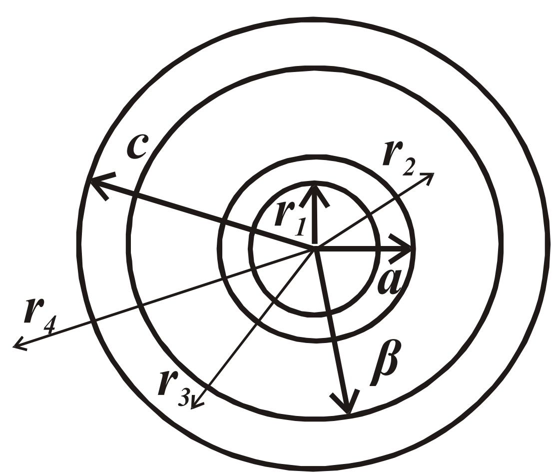
από το σχήμα $r = x$ η (1) δίνει

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot d \cdot r}\cdot dx = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot d}\cdot \int_{\alpha}^{\alpha+d} \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot d}\cdot [\ln x]_{\alpha}^{\alpha+d} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot d}\cdot \ln\left(\frac{\alpha+d}{a}\right)$$

8. Σε ένα ομοαξονικό καλώδιο ρέει ρεύμα *I* με ομοιόμορφη κατανομή στον εσωτερικό αγωγό, και στον εξωτερικό αγωγό ρέει ρεύμα –*I*. Έστω ότι *α* η ακτίνα του εσωτερικού αγωγού, *β* η εσωτερική ακτίνα του εξωτερικού αγωγού και *c* η εξωτερική του ακτίνα. Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο σε κάθε σημείο εσωτερικά και εξωτερικά του καλωδίου.



Λύση

α) Για r < α ο νόμος του Ampere είναι

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_1 \qquad (1)$$

το ρεύμα I_1 στην επιφάνεια με ακτίνα r είναι

$$I_1 = I \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{\pi \cdot \alpha^2} \Rightarrow I_1 = I \cdot \frac{r^2}{\alpha^2} \qquad (2)$$

Έτσι από τις (1) και (2) έχουμε

$$B_1 \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{r^2}{\alpha^2} \Rightarrow B_1 = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{r}{2\pi \cdot \alpha^2} \qquad (3)$$

Για r = α η (3) γίνεται

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot \alpha}$$

β) Για α < r < β έχουμε

$$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{o\lambda}$$

επειδή $I_{o\lambda} = I$ έχουμε

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

γ) Για β < r < c έχουμε το ολικό ρεύμα να περιλαμβάνει το I του εσωτερικού αγωγού και ένα μέρος του ρεύματος του εξωτερικού αγωγού το οποίο έχει αντίθετη φορά και αφαιρείτε.

Αν στην επιφάνεια $\pi(c^2-\beta^2)$ έχω ρεύμα I τότε στην επιφάνεια $\pi(r^2-\beta^2)$ θα έχω ρεύμα

$$I_3 = I \cdot \frac{r^2 - \beta^2}{c^2 - \beta^2}$$

Άρα

$$I_{o\lambda} = I - I \cdot \frac{r^2 - \beta^2}{c^2 - \beta^2} \Rightarrow I_{o\lambda} = I \cdot \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - \beta^2} \right)$$

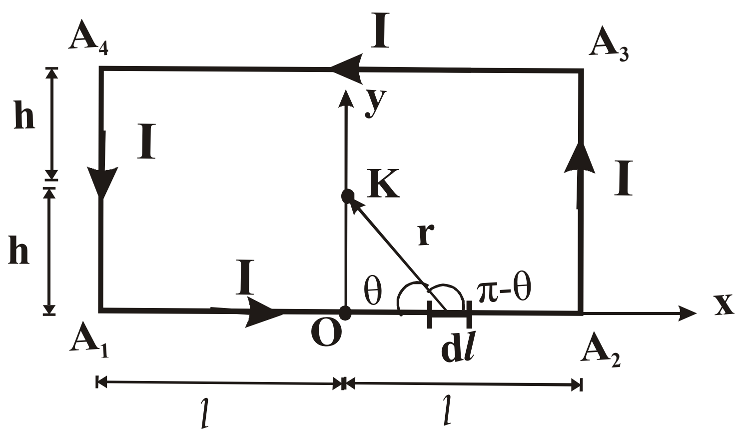
Έτσι

$$\oint \vec{B}_3 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{o\lambda} \Rightarrow B_3 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} \cdot \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - \beta^2} \right)$$

δ) Για r > c το συνολικό ρεύμα I είναι μηδέν άρα δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο B.

9. Ένα σύρμα έχει σχήμα ορθογώνιου με πλευρές που έχουν μήκη 2*l* και 2*h* και φέρει ρεύμα έντασης I. Ζητείται το μαγνητικό πεδίο *B* στο κέντρο K του ορθογωνίου.

Λύση



Το μαγνητικό πεδίο στο K οφείλεται στους ρευματοφόρους αγωγούς A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 και A_4A_1. Ο αγωγός A_1A_2 που εκτείνεται από τη θέση x = -*l* μέχρι τη θέση x = + *l* προκαλεί στο σημείο K (y = *h*) μαγνητικό πεδίο B_1 από τον νόμο των Biot και Savart για το στοιχειώδες τμήμα d*l* έχουμε:

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin\theta}{r^2} \qquad (1)$$

Όπου r το διάνυσμα από το dl (dl=dx) στο K και π-θ η γωνία μεταξύ τους. Τότε το r και η γωνία θ είναι

$$r = \sqrt{\left(x^2 + h^2\right)} \qquad \text{και} \qquad \sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)}}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) τους πιο πάνω τύπους έχουμε

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dx \cdot h}{(x^2 + h^2) \cdot \sqrt{x^2 + h^2}} \Rightarrow$$

$$dB_1 = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot h}{4\pi} \cdot \frac{dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

Ολοκληρώνοντας την πιο πάνω σχέση γνωρίζοντας ότι

$$\int \frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} = \frac{x}{h^2 \cdot (x^2+h^2)^{1/2}}$$

έχουμε

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot h}{4\pi} \cdot \int_{-l}^{l} \frac{dx}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot h}{4\pi} \cdot \left[\frac{x}{h^2 \cdot \left(x^2+h^2\right)^{1/2}}\right]_{-l}^{l} \Rightarrow$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot h}{4\pi} \cdot \left[\frac{l}{h^2 \cdot \left(l^2+h^2\right)^{1/2}} - \frac{-l}{h^2 \cdot \left(l^2+h^2\right)^{1/2}}\right] \Rightarrow$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left[\frac{l}{h \cdot \left(l^2+h^2\right)^{1/2}}\right]$$

Το μαγνητικό πεδίο στο Κ, όπως προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού, έχει φορά κάθετη στη σελίδα και προς τον αναγνώστη. Ο αγωγός A_3A_4 (με τη βοήθεια του κανόνα του δεξιού χεριού) δίνει στο Κ μαγνητικό πεδίο όσο και ο αγωγός A_1A_2, έτσι $\boldsymbol{B_1} = \boldsymbol{B_2}$.

Ο αγωγός A_2A_3, δίνει στο Κ μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B_3}$ επίσης κάθετο στη σελίδα και με φορά προς τον αναγνώστη το μέτρο του με τη βοήθεια του νόμου των Biot και Savart είναι

$$B_3 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left[\frac{h}{l \cdot \left(l^2+h^2\right)^{1/2}}\right]$$

Ο αγωγός A_4A_1, δίνει στο Κ μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B_4}$ επίσης κάθετο στη σελίδα και με φορά προς τον αναγνώστη και λόγω συμμετρίας έχουμε $\boldsymbol{B_3} = \boldsymbol{B_4}$.

Το ολικό πεδίο στο Κ είναι

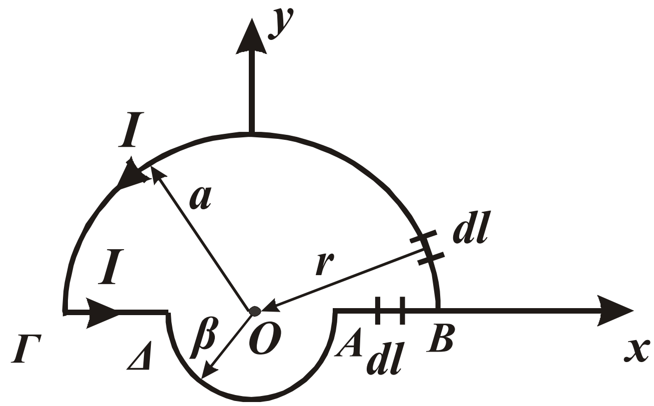
$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi} \cdot \left[\frac{l}{h \cdot \left(l^2+h^2\right)^{1/2}}\right] + \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi} \cdot \left[\frac{h}{l \cdot \left(l^2+h^2\right)^{1/2}}\right] \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi \cdot \left(l^2+h^2\right)^{1/2}} \cdot \left[\frac{l}{h} + \frac{h}{l}\right]$$

κάθετο στη σελίδα και με φορά προς τον αναγνώστη.

10. Το σύρμα του σχήματος διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης Ι. Ένα ηλεκτρικό φορτίο *q* βρίσκεται στο σημείο Ο και έχει ταχύτητα $u = u_0 \hat{y}$. Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται το ηλεκτρικό φορτίο *q*.

Λύση



Το ηλεκτρικό φορτίο *q* δέχεται δύναμη

$$\vec{F} = q \cdot \vec{u} \times \vec{B}$$

Όπου ***u*** η ταχύτητα του ηλεκτρικού φορτίου στη θέση Ο και ***B*** το μαγνητικό πεδίο στο Ο όταν δεν βρίσκεται εκεί το *q*. Απομακρύνουμε το φορτίο *q* από το Ο και προσδιορίζουμε το μαγνητικό πεδίο ***B*** στη θέση Ο λόγω του ρευματοφόρου αγωγού. Τυχαίο στοιχείο d*l* του τμήματος ΑΒ προκαλεί στη θέση Ο μαγνητικό πεδίο ***dB*** = 0 γιατί το **d*l*** βρίσκεται πάνω στην ίδια ευθεία με το Ο και το και ***dl*** x ***r*** =0. Άρα το τμήμα ΑΒ δεν συνεισφέρει στο μαγνητικό πεδίο στη θέση Ο. Για τον ίδιο λόγω ούτε το ΓΔ συνεισφέρει.

Θεωρούμε τώρα το στοιχείο d*l* του τμήματος ΒΓ. Λόγω αυτού έχουμε στο Ο μαγνητικό πεδίο B_1 το οποίο, με τη βοήθεια του κανόνα του δεξιού χεριού, είναι κάθετο στη σελίδα με φορά προς τον αναγνώστη και με το εξής μέτρο :

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin\theta}{r^2} \qquad (1)$$

Η γωνία *θ* που σχηματίζουν μεταξύ τους τα διανύσματα ***r*** και ***dl*** είναι 90^o διότι το ***r*** έχει τη διεύθυνση της ακτίνα και το ***dl*** τη διεύθυνση της εφαπτομένης, ακόμα έχουμε ***r*** = *α*. Τελικά η Εξ. (1) γίνεται:

$$dB_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot \alpha^2} \cdot dl$$

Ολοκληρώνοντας στο ημικύκλιο ΒΓ έχουμε :

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot \alpha^2} \cdot \int_B^\Gamma dl = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot \alpha^2} \cdot \pi \cdot \alpha \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \alpha}$$

Αφού το ολοκλήρωμα του στοιχειώδους μήκους *dl* στο τμήμα ΒΓ δίνει το μήκος του τόξου ΒΓ, ίσο με *πα*.

Θεωρούμε τώρα το στοιχείο ***dl*** του ημικυκλίου ΔΑ. Ο κανόνας του δεξιού χεριού δίνει στο Ο μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B_2}$ κάθετο στη σελίδα με φορά προς τον αναγνώστη. Όπως στο ΒΓ, βρίσκουμε το πεδίο στο Ο λόγω του ΔΑ :

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \beta}$$

Το συνολικό μαγνητικό πεδίο στο Ο είναι τελικά:

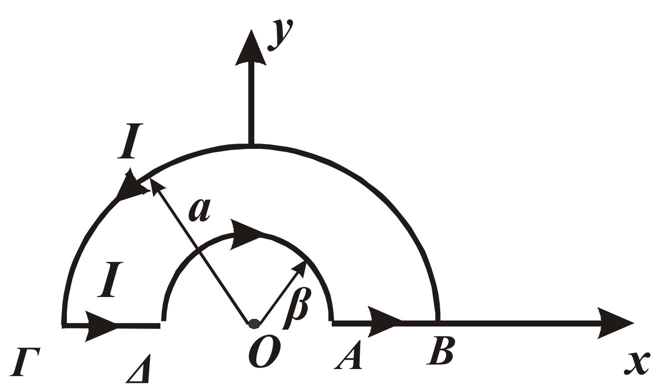
$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \alpha} + \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \beta} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)$$

Υπολογίζουμε τώρα τη δύναμη που δέχεται το φορτίο q από τη σχέση

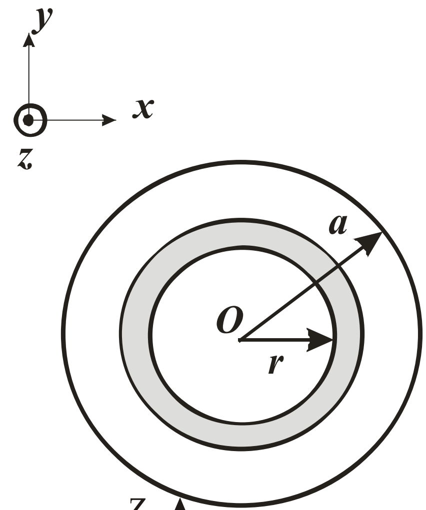
$$\vec{F} = q \cdot \vec{u} \times \vec{B} = q \cdot (u_0 \hat{y}) \times \left[\frac{\mu_0 \cdot I}{4} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \hat{z} \right] = \frac{q \cdot u_0 \cdot \mu_0 \cdot I}{4} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \hat{x}$$

Με διεύθυνση αυτή των θετικών x.

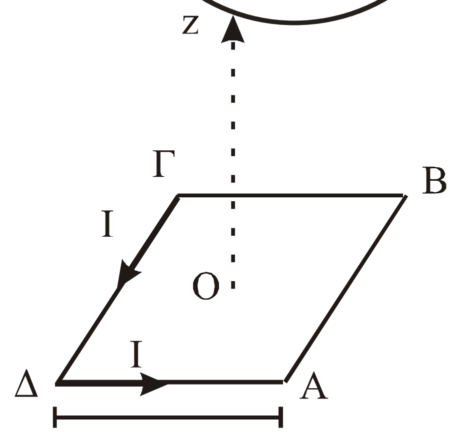
11. Το σύρμα του σχήματος διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης Ι. Ένα ηλεκτρικό φορτίο *q* βρίσκεται στο σημείο Ο και έχει ταχύτητα $u = u_0 \hat{y}$. Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται το ηλεκτρικό φορτίο *q*.



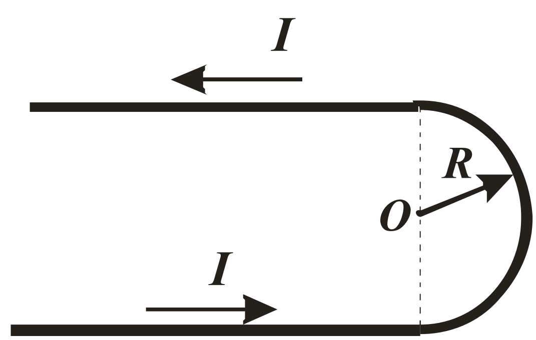
12. **Ένας κυλινδρικός αγωγός έχει ακτίνα *a*, άπειρο αξονικό μήκος κατά z και διαρρέεται από ρεύμα με πυκνότητα $\vec{J} = c \cdot r\hat{z}$ όπου *c* είναι μια σταθερή και *r* η απόσταση του σημείου από τον άξονα z. Να βρεθεί το ρεύμα του αγωγού και το μαγνητικό πεδίο *B* παντού στο χώρο.**



13. **Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα έχει σχήμα τετραγώνου πλευράς α και διαρρέεται από ρεύμα έντασης *I*. Ζητείται το μαγνητικό πεδίο *B* σε τυχαίο σημείο του άξονα Oz που είναι κάθετος στο επίπεδο του τετραγώνου στο κέντρο του O.**

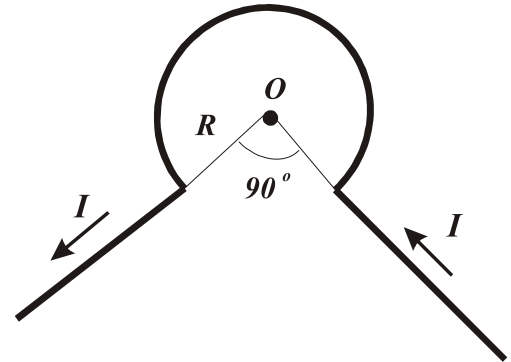


14. **Δίδεται ο ρευματοφόρος αγωγός του σχήματος που αποτελείται από δύο ημιάπειρα τμήματα και ένα ημικυκλικό κέντρου O και ακτίνας R. Διαρρέεται δε από συνεχές ρεύμα σταθερής εντάσεως I. Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο *B* στο κέντρο του ημικυκλίου O.**

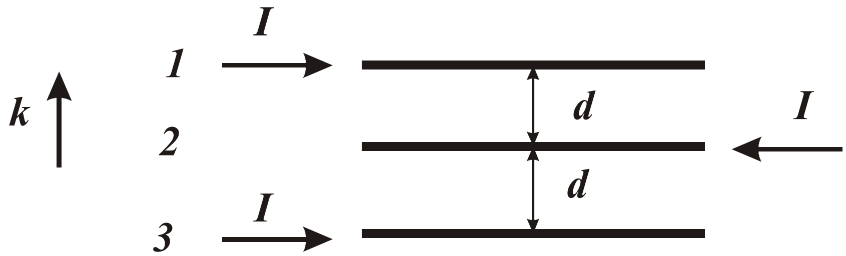


15. **Ο αγωγός του σχήματος διαρρέεται από ρεύμα *I = 40 A*. Βρείτε το πεδίο στο σημείο *O*, όπου *R = 2cm*.**

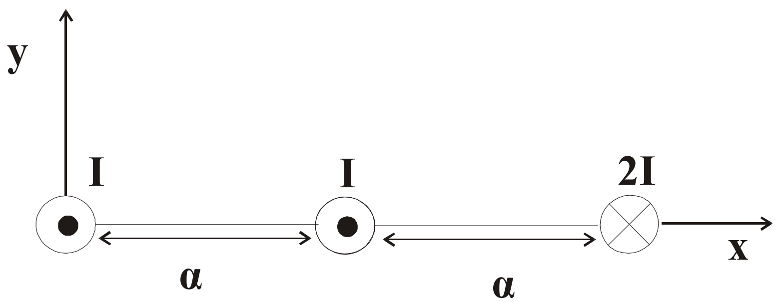
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} T \cdot m / A$



16. **Τρία παράλληλα σύρματα διαρρέονται από ρεύμα *I* το καθένα, όπως δείχνει το σχήμα. Αν η απόσταση ανάμεσα σε γειτονικά σύρματα είναι *d*, υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση της ολικής μαγνητικής δύναμης ανά μονάδα μήκους σε κάθε σύρμα.**



17. **Δίνονται οι τρεις ευθύγραμμοι άπειρου μήκους ρευματοφόροι αγωγοί του σχήματος. Να προσδιοριστεί η θέση στον άξονα x, όπου το ολικό μαγνητικό πεδίο B είναι μηδέν.**



18. **Τέσσερα σύρματα απείρου μήκους που απέχουν ανά δύο απόσταση α =20 cm, σχηματίζουν σε κάτοψη ένα νοητό τετράγωνο διαρρέονται από ίσα συνεχή ρεύματα έντασης I= 20A με φορές όπως στο σχήμα. Να υπολογιστεί η μαγνητική επαγωγή B του μαγνητικού στο σημείο P που αντιπροσωπεύει το κέντρο του νοητού τετραγώνου. (Διαγώνιος τετραγώνου $\sqrt{2} * \alpha$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} T \cdot m / A$)**