

ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ
ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ - ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ
Υπό

Μ. Χανιά

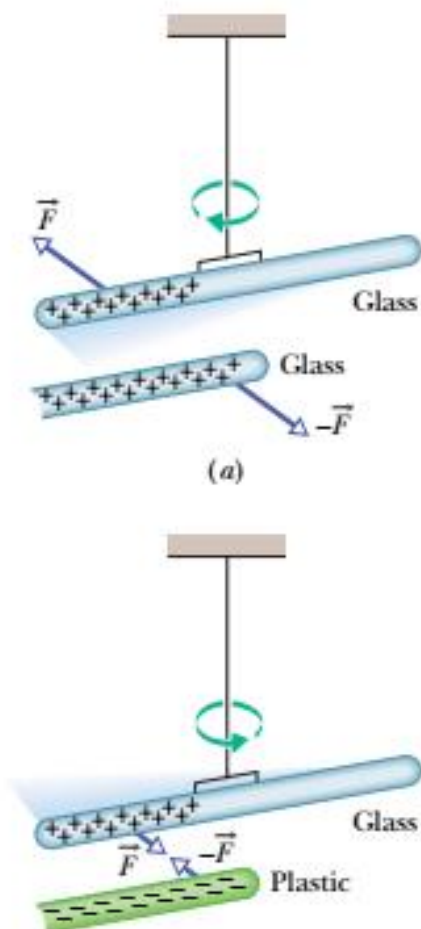
Αν. Καθηγητή

Τμήμα Φυσικής ΔΙ.ΠΑ.Ε.

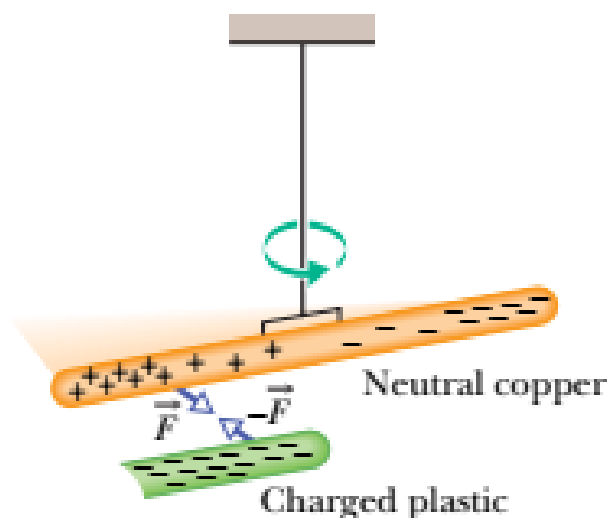
Καβάλα 2020

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ



Υπάρχει μία δύναμη η **ηλεκτρική**, διαφορετικής φύσης από την βαρυτική γιατί είναι και απωστική. Αποδίδουμε τη δύναμη αυτή σε μια ιδιότητα της ύλης **το φορτίο**. Το φορτίο όπως και η μάζα είναι ιδιότητα της ύλης. **Δεν υπάρχει φορτίο χωρίς μάζα αλλά υπάρχει μάζα χωρίς φορτίο**. Οι απωστικές και ελκτικές ηλεκτρικές δυνάμεις αποδίδονται αυθαίρετα σε συνδυασμούς δύο είδη φορτίων το θετικό και το αρνητικό



Το φορτίο αποτελεί θεμελιώδες χαρακτηριστικό των δομικών σωματιδίων της ύλης. Το ηλεκτρικό φορτίο είναι κβαντισμένο. Η **κβάντωση** του φορτίου περιγράφεται από τη σχέση

$$q = N |e^-| \quad (1.1).$$

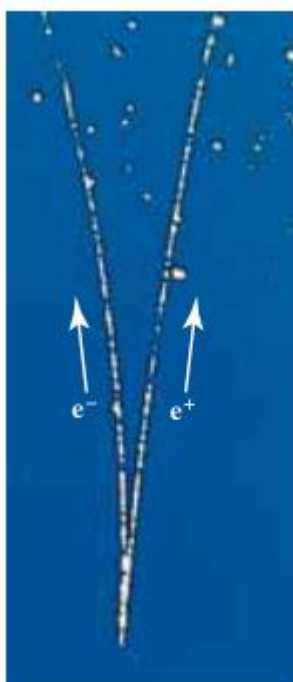
όπου N ακέραιος.

Δηλαδή είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μιας στοιχειώδους ποσότητας φορτίου, του φορτίου του ηλεκτρονίου

$|e^-| = 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$. Το φορτίο του ηλεκτρονίου αυθαίρετα λαμβάνεται σαν αρνητικό. Η μονάδα μέτρησης του ηλεκτρικού φορτίου είναι το 1C.

Η τιμή του φορτίου είναι αναλλοίωτη μετρούμενη από διάφορα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, δηλαδή η τιμή του φορτίου δεν εξαρτάται από το αν το φορτίο κινείται ή ηρεμεί. Το ηλεκτρικό φορτίο υπακούει στην **αρχή της ηλεκτρικής ουδετερότητας**. Σύμφωνα με την

αρχή αυτή το ολικό φορτίο ενός ηλεκτρικά απομονωμένου συστήματος παραμένει σταθερό. Με τον όρο ηλεκτρικά απομονωμένο εννοούμε ότι δεν μπορεί σε αυτό να διεισδύσει φορτισμένο σωματίδιο. **Το φορτίο δεν δημιουργείται ούτε καταστρέφεται μόνο μεταφέρεται.**



Το σημειακό φορτίο είναι μια ιδανική κατάσταση όπως είναι το υλικό σημείο στη μηχανική. Στην πραγματικότητα υπάρχουν κατανομές φορτίου Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις

i) γραμμική πυκνότητα φορτίου λ

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad (1.2)$$

Όπου dq είναι το στοιχειώδες φορτίο ενώ το dl το στοιχειώδες μήκος

ii) επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

$$\sigma = \frac{dq}{dA} \quad (1.3)$$

Όπου dA η στοιχειώδης επιφάνεια.

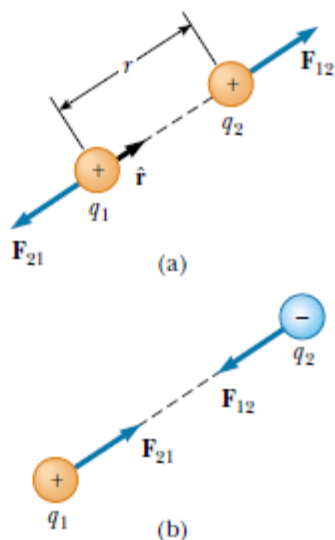
iii) πυκνότητα φορτίων χώρου

$$\rho = \frac{dq}{d\Omega} \quad (1.4)$$

Όπου $d\Omega$ ο στοιχειώδης όγκος.

1.2 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

Η ηλεκτρική δύναμη ασκείται ανάμεσα σε δυο φορτία. Είναι απωστική (Σχήμα 1.1 (α)) εάν είναι ομώνυμα και ελκτική (Σχήμα 1.1 (β)) εάν τα φορτία είναι ετερόνυμα.



Σχήμα 1.1

Για τις ηλεκτρικές δυνάμεις ισχύει ο νόμος του Coulomb

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (1.5)$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2.$$

Όπου ϵ_0 μία σταθερά, η ηλεκτρική διαπερατότητα του κενού.

Οι ηλεκτρικές δυνάμεις είναι κεντρικές και επομένως διατηρητικές. Ισχύει η αρχή της επαλληλίας και η αρχή δράσης αντίδρασης.

Για τις ηλεκτρικές δυνάμεις ισχύει η αρχή της επαλληλίας

$$\vec{F}_{o\lambda} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N \quad (1.6)$$

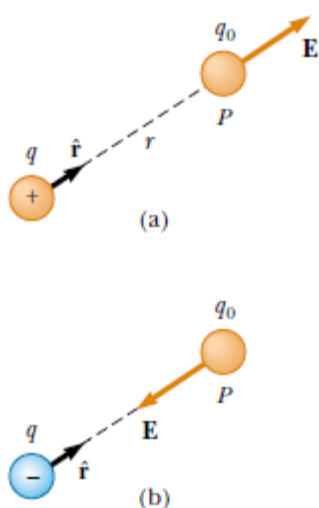
1.3 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΠΕΔΙΟ

Όταν ο χώρος είναι προικισμένος με την ιδιότητα να ασκεί ηλεκτρικές δυνάμεις σε ένα φορτίο που θα βρεθεί μέσα στον χώρο αυτό λέμε ότι είναι ηλεκτρικό πεδίο. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι διανυσματικό πεδίο. Το ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται από το μέγεθος ένταση πεδίου E το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1.7),$$

Όπου q_0 δοκιμαστικό ηλεκτρικό φορτίο δηλαδή σημειακό φορτίο μικρού μεγέθους που βρίσκεται σε ένα σημείο του χώρου. Η σχέση έντασης και δύναμης φαίνεται στο σχήμα 1.2. Εάν το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από σημειακό φορτίο q τότε από τις σχέσεις (1.5) και (1.7) παίρνουμε

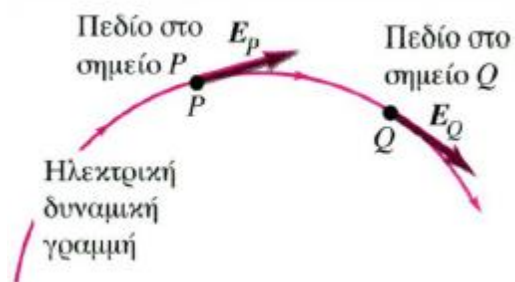
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (1.8)$$



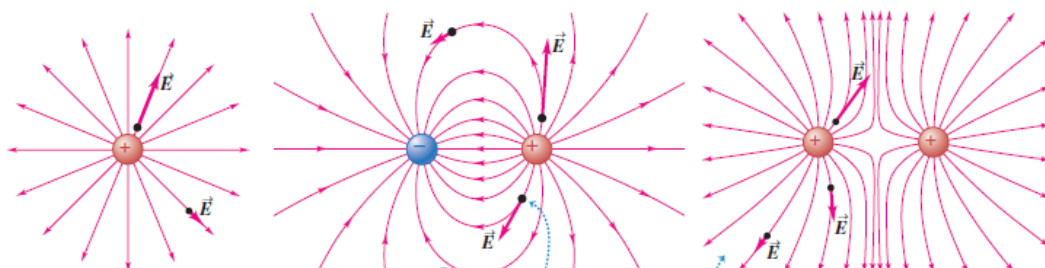
Σχήμα 1.2

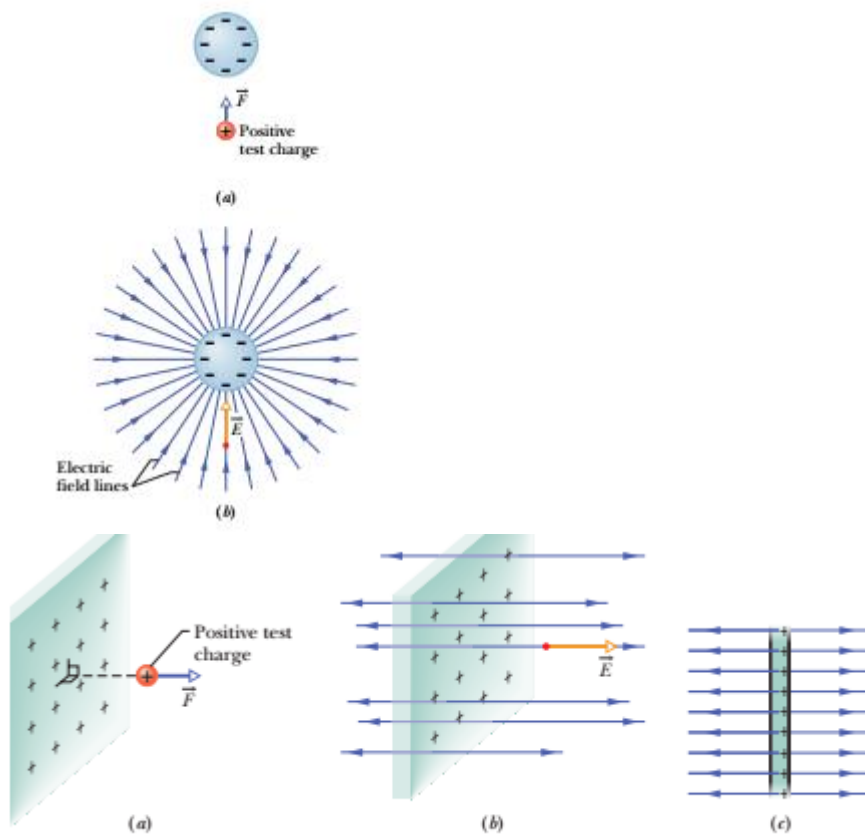
Για να έχουμε εποπτική απεικόνιση του ηλεκτρικού πεδίου χρησιμοποιούμε της ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές. Μία ηλεκτρική δυναμική γραμμή είναι μία φανταστική γραμμή σε κάθε σημείο της οποίας το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίο είναι εφαπτόμενο (Σχήμα 1.3). Οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές μας

δείχνουν την κατεύθυνση στη ηλεκτρικού πεδίου ενώ η απόσταση αναμεσα τους μας δείχνει το μέτρο του E . Ισοδύναμα η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών μας δείχνει εάν το ηλεκτρικό πεδίο είναι ασθενές η ισχυρό σε ένα σημείο του χώρου. Οι δυναμικές ηλεκτρικές γραμμές δεν τέμνονται διότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει μία μοναδική κατεύθυνση. Στο Σχήμα 1.4 παριστάνονται δυναμικές γραμμές για ορισμένες κατανομές φορτίων.



Σχήμα 1.3



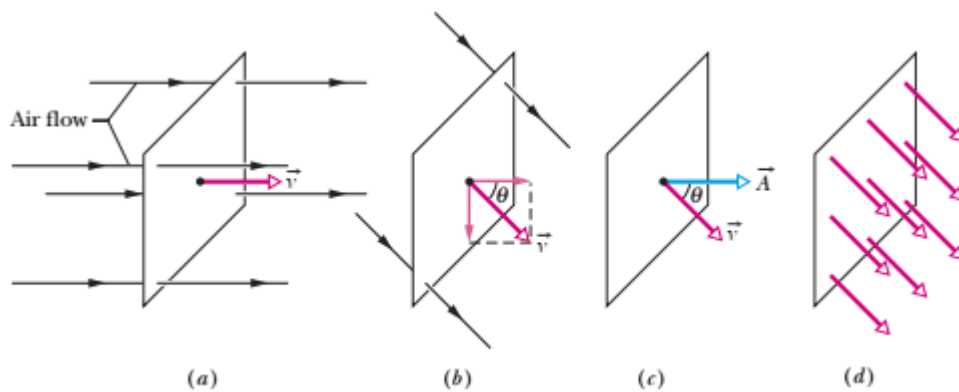


Σχήμα 1.4

Για τις εντάσεις ισχύει η αρχή της επαλληλίας

$$\vec{E}_{ολ} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N \quad (1.9)$$

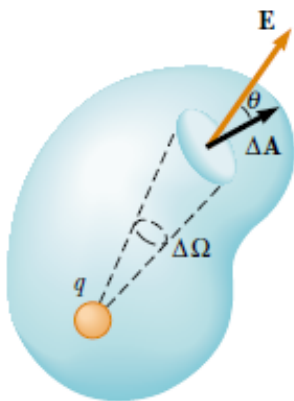
1.4 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS



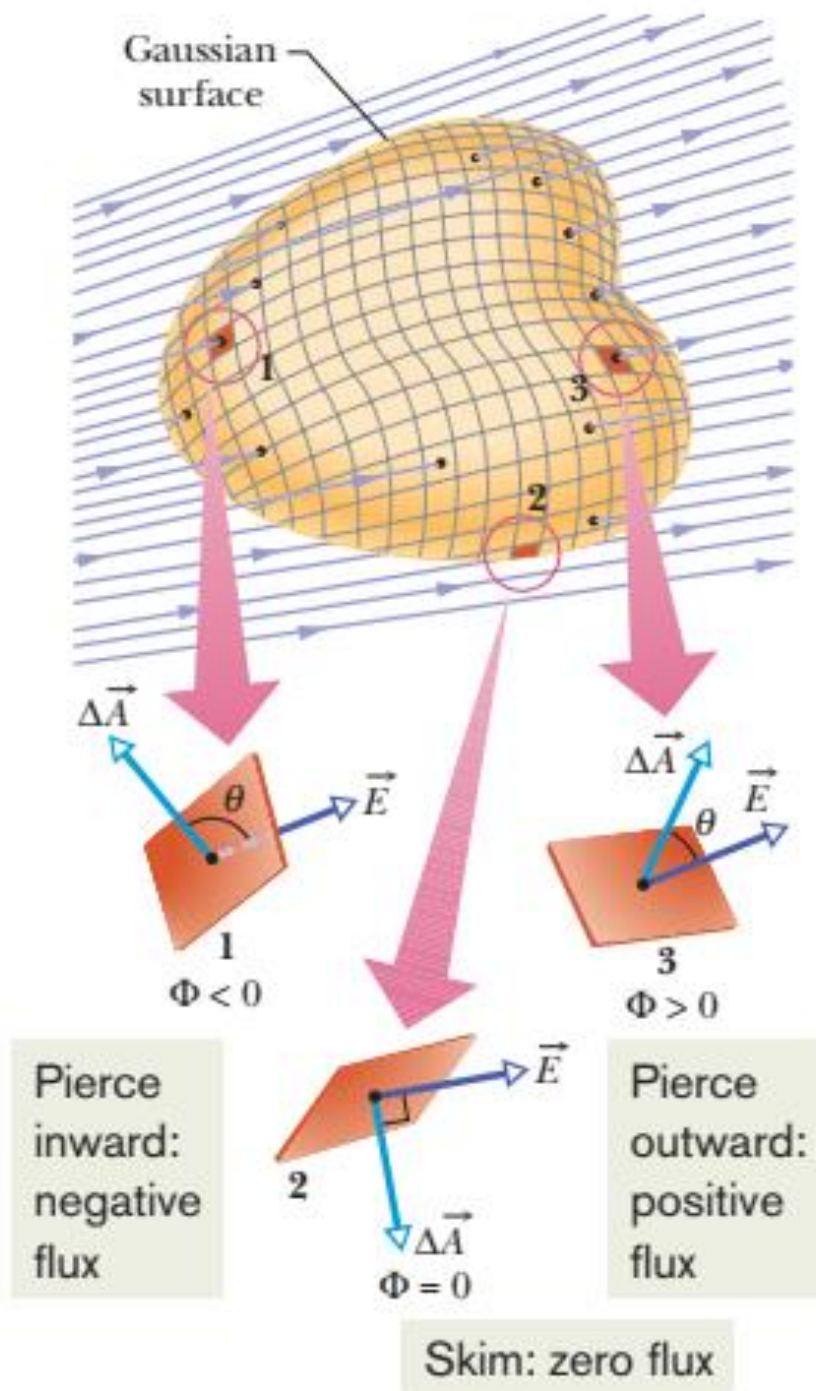
$$\Phi = vA \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{A},$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος αντιμετώπισης των ηλεκτρικών πεδίων είναι με την εφαρμογή του νόμου του Gauss. Σύμφωνα με αυτόν η ροή Φ της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από μία κλειστή επιφάνεια ισούται με το περικλειόμενο φορτίο Q_{encl} από την επιφάνεια (Σχήμα 1.5),

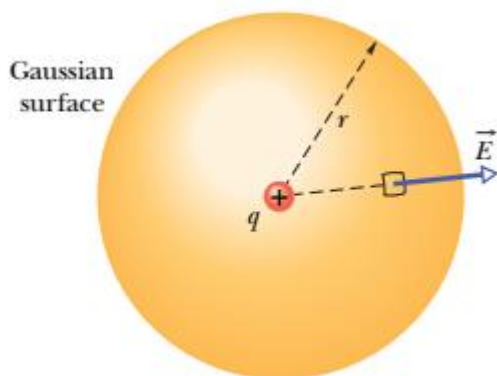
$$\Phi_E = \oiint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} \quad (1.10)$$



Σχήμα 1.5



Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ COULOMB ΑΠΟ ΤΟΝ ΝΟΜΟ ΤΟΥ GAUSS



$$\oiint \vec{E} d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \epsilon_0 \oiint E dA = q$$

$$\rightarrow \epsilon_0 E \iint dA = q \rightarrow \epsilon_0 E 4\pi r^2 = q$$

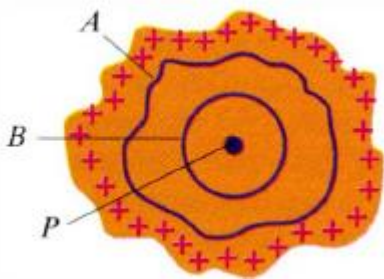
$$\rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Εφαρμογές του νόμου του Gauss

- I) Σε ένα φορτισμένο αγωγό που είναι σε ηλεκτροστατική ισορροπία τα φορτία κατανέμονται στην επιφάνεια του. Στο εσωτερικό του αγωγού δεν υπάρχει φορτίο.

Απόδειξη

Αφού ο αγωγός είναι σε ηλεκτροστατική ισορροπία αναγκαστικά στο εσωτερικό του ισχύει $E=0$. Διαφορετικά εάν $E \neq 0$ τότε τα φορτία θα κινούνται υπό την επίδραση της ηλεκτρικής δύναμης $F=qE$ και έτσι ο αγωγός δεν θα ήταν σε ηλεκτρική ισορροπία. Τελικά σε κάθε σημείο στο εσωτερικό του αγωγού $E=0$. Από τον νόμο του Gauss αφού $E=0$ και το περικλειόμενο φορτίο θα είναι μηδέν. Έτσι αναγκαστικά το φορτίο κατανέμεται στην επιφάνεια του αγωγού (Σχήμα 1.6).

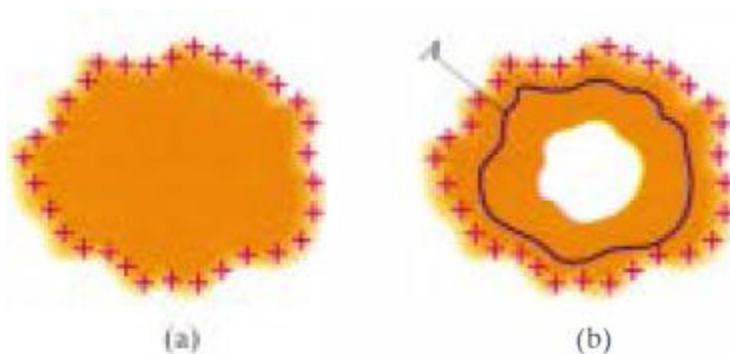


Σχήμα 1.6

II) Σε ένα αγωγό με κοιλότητα το $E=0$ μέσα στην κοιλότητα

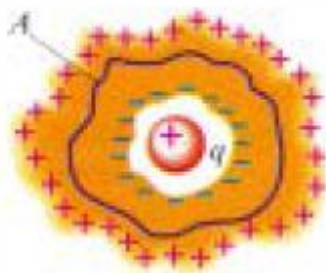
Απόδειξη

Εάν στην κοιλότητα δεν υπάρχει φορτίο τότε με την βοήθεια μιας επιφάνειας Gauss που περικλείει την κοιλότητα έχουμε $E=0$ σε κάθε σημείο της γκαουσιανής επιφάνειας. Οπότε $Q_{\text{encl}}=0$ που περιλαμβάνει και τυχόν φορτίο στην επιφάνεια της κοιλότητας. Άρα αφού $Q_{\text{encl}}=0$ δεν υπάρχει φορτίο στην επιφάνεια της κοιλότητας. Αφού και στο εσωτερικό της κοιλότητας δεν υπάρχει φορτίο τότε από το νόμο του Gauss προκύπτει ότι το $E=0$ στο εσωτερικό της κοιλότητας (Σχήμα 1.7).



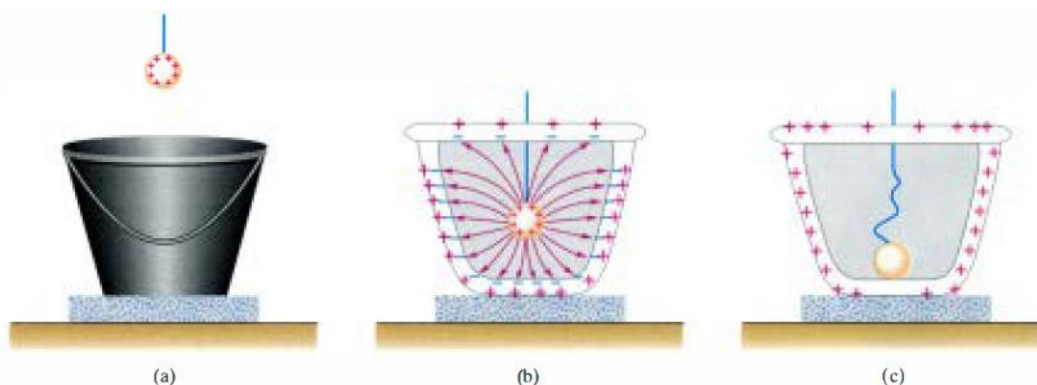
Σχήμα 1.7

Στη συνέχεια τοποθετούμε φορτίο q στο εσωτερικό της κοιλότητας. Δημιουργούμε όπως πριν μία επιφάνεια Gauss στο εσωτερικό του αγωγού. Επάνω της $E=0$ άρα και το περικλειόμενο φορτίο από την επιφάνεια θα είναι $Q_{\text{encl}}=0$. Για να συμβεί αυτό δημιουργείται ένα ολικό φορτίο $-q$ στην επιφάνεια της κοιλότητας και σύμφωνα με την αρχή της διατήρησης του φορτίου θα πρέπει να εμφανιστεί ένα φορτίο $+q$ στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού (Σχήμα 1.8). Εάν ο αγωγός ήταν φορτισμένος με φορτίο Q τότε το ολικό φορτίο στην επιφάνεια του θα είναι $Q+q$.



Σχήμα 1.8

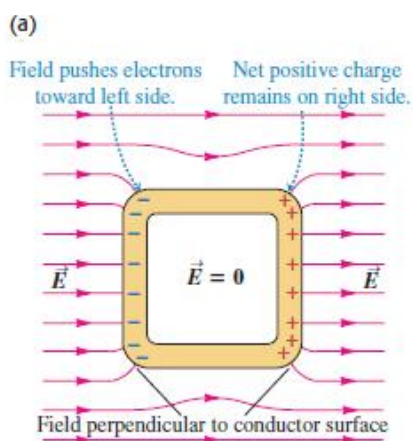
Ερώτηση 1: Γιατί στο Σχήμα 1.9.(c) η αρχικά φορτισμένη σφαίρα εκφορτίζεται;



Σχήμα 1.9

III) Κλωβός Faraday

Από την στιγμή που στο εσωτερικό ενός αγωγού το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν και ο αγωγός εκτεθεί σε ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο θα αναπτυχθούν τέτοιοι μηχανισμοί έτσι ώστε στο εσωτερικό του το ηλεκτρικό πεδίο να ισούται με μηδέν. Συγκεκριμένα το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο αναδιατάσσει τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού δημιουργώντας ένα αρνητικό φορτίο στην μία επιφάνεια του αγωγού και ένα θετικό φορτίο στην άλλη επιφάνεια του αγωγού. Αυτή η ανακατανομή του φορτίου δημιουργεί ένα πρόσθετο ηλεκτρικό πεδίο έτσι ώστε η επαλληλία ανάμεσα στο εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο και το πρόσθετο ηλεκτρικό πεδίο να δημιουργεί στο εσωτερικό του αγωγού μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο (Σχήμα 1.10)



Σχήμα 1.10

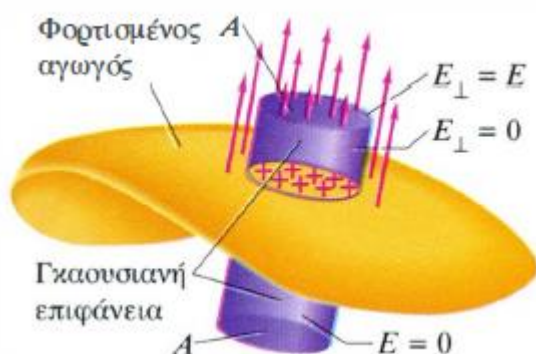
Ερώτηση 2 :Γιατί το ασφαλέστερο σημείο είναι να παραμείνουμε στο εσωτερικό του αυτοκινήτου όταν βρεθούμε σε καταιγίδα με κεραυνούς;



IV) Σχέση ανάμεσα στην E και την σ σε ένα σημείο ακριβώς έξω από την επιφάνεια ενός αγωγού

Το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια ενός αγωγού που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού. Αυτό είναι συνέπεια του ότι ο αγωγός βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία. Εάν το ηλεκτρικό πεδίο δεν ήταν κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού θα μπορούσε να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες μία κάθετη και μία παράλληλη στην επιφάνεια του αγωγού. Η παράλληλη συνιστώσα θα έθετε σε κίνηση τα φορτία (ηλεκτρόνια) του αγωγού και έτσι δεν θα βρισκόταν σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας όπως αρχικά υποθέσαμε.

Κατασκευάζουμε μία Γκαουσιανή κυλινδρική επιφάνεια με βάση A που βρίσκεται στο εσωτερικό του αγωγού και βάση A που βρίσκεται έξω από τον αγωγό (Σχήμα 1.11).



Σχήμα 1.11

Από τον ορισμό της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου (σχέση 1.3) προκύπτει ότι το φορτίο στην επιφάνεια του αγωγού θα είναι

$$Q = \sigma A \quad (1.11)$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss για τον κύλινδρο έχουμε

$$\Phi = \overrightarrow{E_{\kappa}^{\xi}} \vec{A} + \overrightarrow{E_{\kappa}^{\sigma}} \vec{A} + \overrightarrow{E_{\kappa} A_{\text{παραπ}}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.12)$$

Επειδή στο εσωτερικό του αγωγού το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό και επειδή το διάνυσμα της παράπλευρης επιφάνειας είναι κάθετο στο E_{κ} ο τρίτος όρος είναι μηδενικός οπότε καταλήγουμε στην σχέση

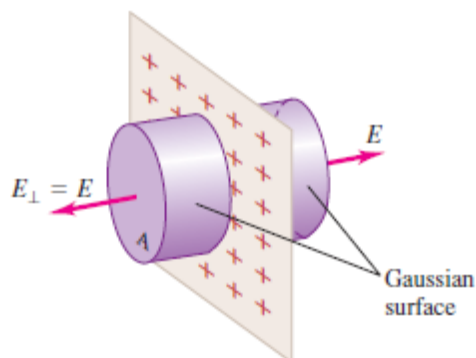
$$E_{\kappa} A = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.13)$$

Επειδή $E = E_{\kappa}$ και με βάση την σχέση (1.9) τελικά προκύπτει

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.14)$$

V) Ένταση ηλεκτρικού πεδίου E ενός ομοιόμορφα φορτισμένου επίπεδου αγωγού απείρων διαστάσεων

Στο Σχήμα 1.12 παριστάνεται ένας αγωγός σε μορφή λεπτού φύλλου άπειρης επιφάνειας.



Σχήμα 1.12

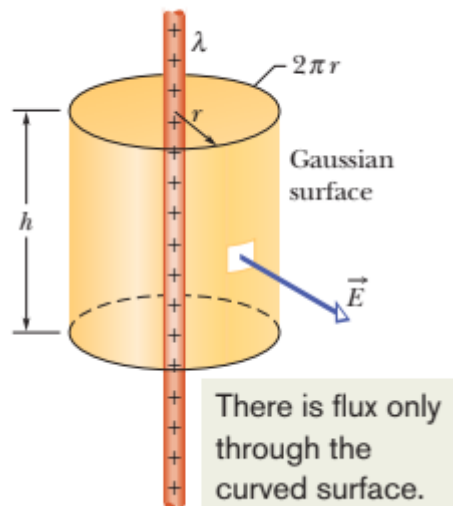
Το ηλεκτρικό πεδίο όπως έχουμε αναφέρει θα είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού. Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss για την Γκαουσιανή επιφάνεια του σχήματος 1.12

$$\Phi = EA + EA = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (1.15)$$

Από την 1.15 προκύπτει

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.16)$$

Ηλεκτρικό πεδίο Γραμμικής κατανομής Φορτίου



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Το έργο που παράγει η ηλεκτρική δύναμη για να μετακινήσει σημειακό φορτίο q' από το σημείο Α στο σημείο Β δίνεται από τη σχέση

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F dr = \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dr = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \quad (2.1)$$

Ισχύει

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta U = -[U_B - U_A] \quad (2.2).$$

Από (2.1) και (2.2)

$$U_A - U_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r_A} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r_B} \quad (2.3)$$

Από την (2.3) λαμβάνουμε

$$U_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r_A} \quad (2.4)$$

$$U_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r_B} \quad (2.5)$$

Εάν η δυναμική ενέργεια στο άπειρο $r_B \rightarrow \infty$ είναι μηδέν τότε η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια σε μία θέση r από ένα σημείο αναφοράς δίνεται από τη σχέση

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r} \quad (2.6)$$

ως προς την δυναμική ενέργεια στο άπειρο που την θεωρήσαμε μηδενική.

Εάν ορίσουμε ένα νέο μέγεθος, τον λόγο της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας προς το φορτίο, ένα ανηγμένο δηλαδή μέγεθος ως προς το φορτίο, το μέγεθος αυτό ορίζεται σαν το **ηλεκτρικό δυναμικό V** .

$$V = \frac{U}{q'} \quad (2.7)$$

Μονάδα μέτρησης είναι το 1 Volt (V),

$$1V=1J/1C$$

Από την 2.7

$$U = q'V, \text{ για } q = e \text{ έχουμε } U = 1eV = 1.602 \times 10^{-19} J$$

Μονάδα ενέργειας το 1eV

Επειδή μόνο οι διαφορές της δυναμικής ενέργειας έχουν σημασία έπεται ότι μόνο οι διαφορές δυναμικού έχουν φυσική σημασία. Για αυτό μιλάμε για **διαφορά δυναμικού ή τάση**. Πολλές φορές γίνεται η διάκριση ανάμεσα στην **μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού $\Delta V = V_b - V_a$** κατά την κίνηση ενός φορτίου από ένα αρχικό σημείο a σε ένα τελικό σημείο b και την **διαφορά δυναμικού $V_{ab} = V_a - V_b$** . Το τελευταίο ονομάζεται και **το δυναμικό του a ως προς το b**. Το σημείο στο οποίο το ηλεκτρικό δυναμικό μηδενίζεται λαμβάνεται αυθαίρετα. Το σημείο αυτό συνήθως είναι ένα σημείο απομακρυσμένο στο άπειρο ή η επιφάνεια της Γης (**Γείωση**).

Έχουμε

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta U = q' \int_A^B E dr \rightarrow -\frac{\Delta U}{q'} = \int_A^B E dr \rightarrow \Delta V = -\int_A^B E dr \quad (2.8)$$

Η (2.8) μπορεί να γραφεί ως,

$$\int_A^B dV = -\int_A^B E dr \rightarrow \mathbf{dV = -E dr} \quad (2.9)$$

και τελικά

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \quad (2.10)$$

Από τη σχέση 2.8

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B E dr$$

όταν $V_A > V_B$ ή $V_A - V_B > 0$ ή $-(V_A - V_B) < 0$ ή $(V_B - V_A) < 0$ δηλαδή $-\Delta V > 0$ και ισοδύναμα $-\Delta U > 0$ τότε $W_{A \rightarrow B} > 0$ δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο παράγει θετικό έργο.

Ένα θετικό φορτίο τείνει να πέσει από περιοχή υψηλού δυναμικού σε περιοχή χαμηλού δυναμικού.

Η σχέση (2.10) ισχύει για ακτινικό πεδίο. Στην γενικότερη περίπτωση η σχέση που συνδέει το ηλεκτρικό δυναμικό με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι η

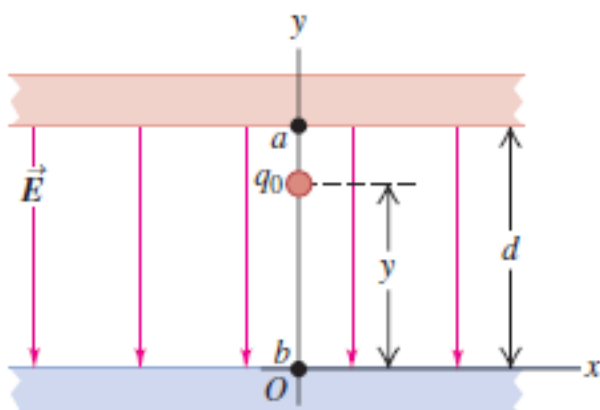
$$\mathbf{E} = -\vec{\nabla}V = -gradV \quad (2.11)$$

$$\text{Όπου } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \quad (2.12),$$

είναι ο τελεστής κλίση ή grad ή ανάδελτα ή nabla.

Εφαρμογή 1 Να βρεθεί η διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο παράλληλες ομοιόμορφα φορτισμένες με αντίθετο φορτίο μεταλλικές πλάκες .

Η διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 2.1



Σχήμα 2.1

Από την σχέση 2.1 ολοκληρώνοντας λαμβάνουμε

$$\int_a^b dV = - \int_a^b \vec{E} d\vec{r} \rightarrow V_b - V_a = -\vec{E} \int_a^b d\vec{r} \rightarrow V_b - V_a = E(\hat{j})(0 - d\hat{j}) \rightarrow V_b - V_a = -Ed \rightarrow V_a - V_b = Ed$$

(2.13)

Από την σχέση 2.13 προκύπτει

$$V_{ab} = Ed \text{ ή}$$

$$E = \frac{V_{ab}}{d} \quad (2.14)$$

Εφαρμογή 2 Η επιφάνεια ενός αγωγού είναι ισοδυναμική επιφάνεια

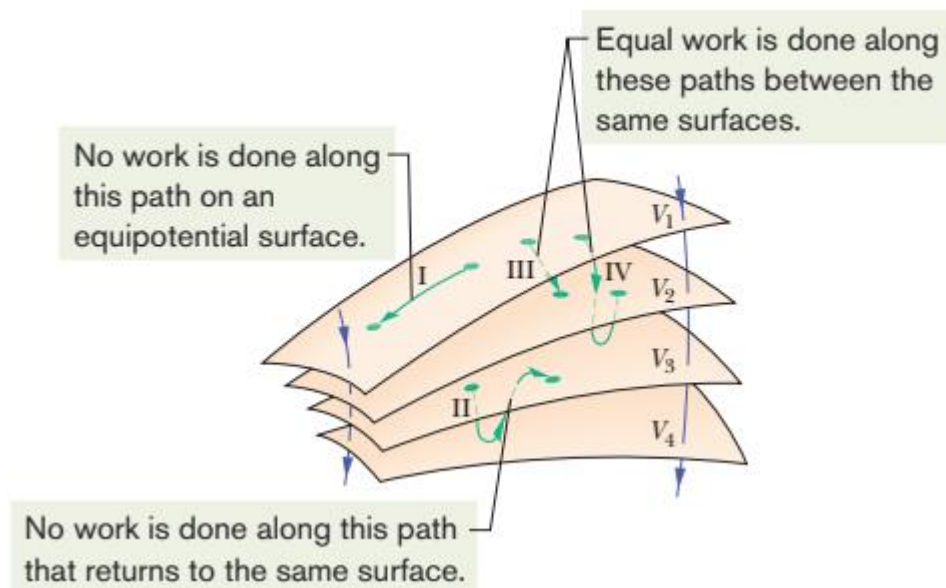
Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετη στην επιφάνεια του φορτισμένου αγωγού επομένως δεν υπάρχει βαθμίδα δυναμικού. Ισχύει $dV=0$. Σαν συνέπεια των ανωτέρω οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στις ισοδυναμικές επιφάνειες.

Εφαρμογή 3 Κάθε σημείο ενός αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία έχει το ίδιο δυναμικό με εκείνο της επιφάνειάς του.

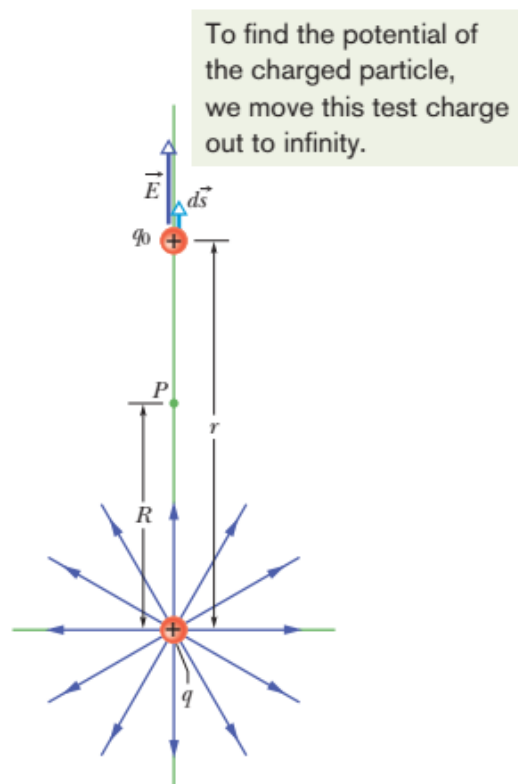
Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό ομοιόμορφα φορτισμένου αγωγού είναι μηδέν. Τότε με εφαρμογή της σχέσης 2.10

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dr} \hat{r}$$

προκύπτει ότι σε δύο σημεία του αγωγού πρέπει να ισχύει $dV=0$ δηλαδή $V_a=V_b$



ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ



$$E = -\frac{dV}{dr} \rightarrow dV = -E dr \rightarrow \int_i^{\infty} dV = -\int_R^{\infty} E dr \rightarrow V_f - V_i = -\int_R^{\infty} E dr$$

Για $V_f=0$, στο ∞

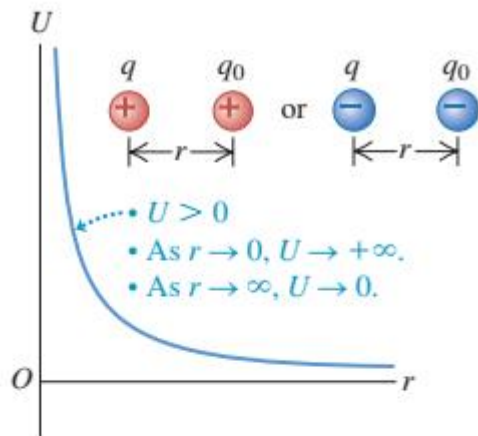
$V_i=V$, στο R

$$\begin{aligned}
 V &= \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} \rightarrow V \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r^{-1}}{-2+1} \right]_R^{\infty} \rightarrow V \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R} \right] \rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R}
 \end{aligned}$$

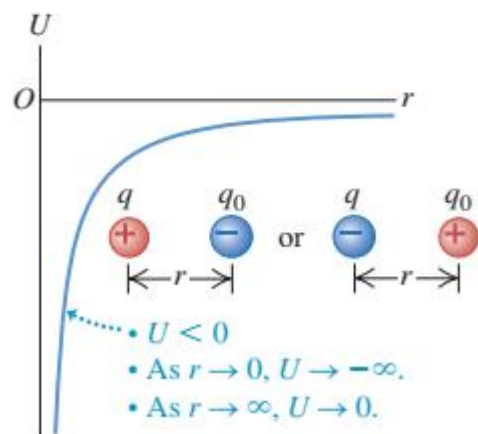
Γενικεύοντας

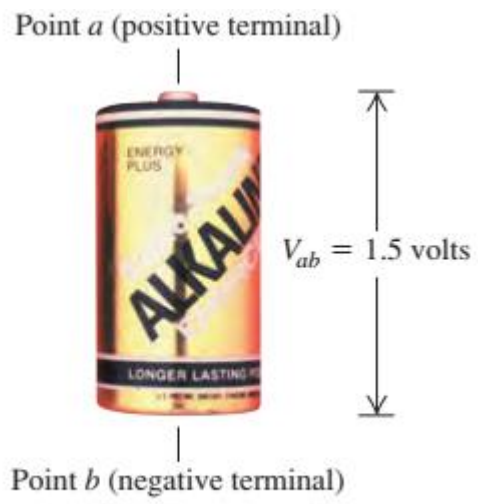
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$



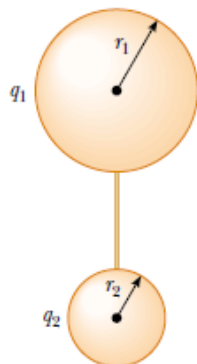
(b) q and q_0 have opposite signs.





2.1 Δυναμικό ακίδων – Ηλεκτρική διάσπαση

Εάν φέρουμε δύο φορτισμένες σφαίρες σε επαφή με την βοήθεια ενός σύρματος (Σχήμα 2.2)



Σχήμα 2.2

τότε αυτές μετά την ανακατανομή φορτίου θα αποκτήσουν κοινό ηλεκτρικό δυναμικό. Έτσι,

$$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r_1} q_1 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r_2} q_2 \rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (2.15)$$

Για τις εντάσεις θα ισχύει,

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r_1^2} \quad (2.16),$$

Και

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 r_2^2} \quad (2.17).$$

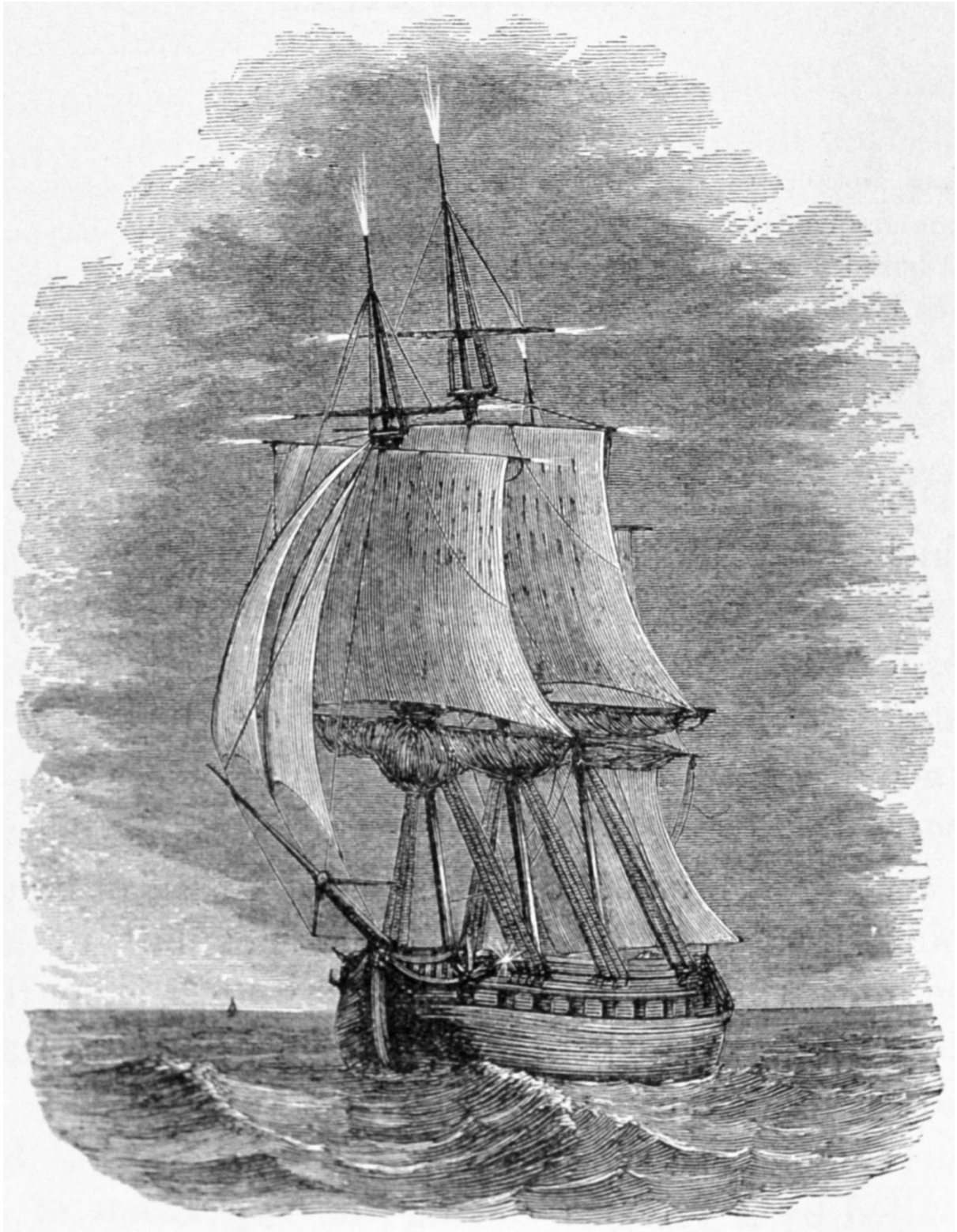
Διαιρώντας κατά μέλη τις (2.16) και (2.17) παίρνουμε

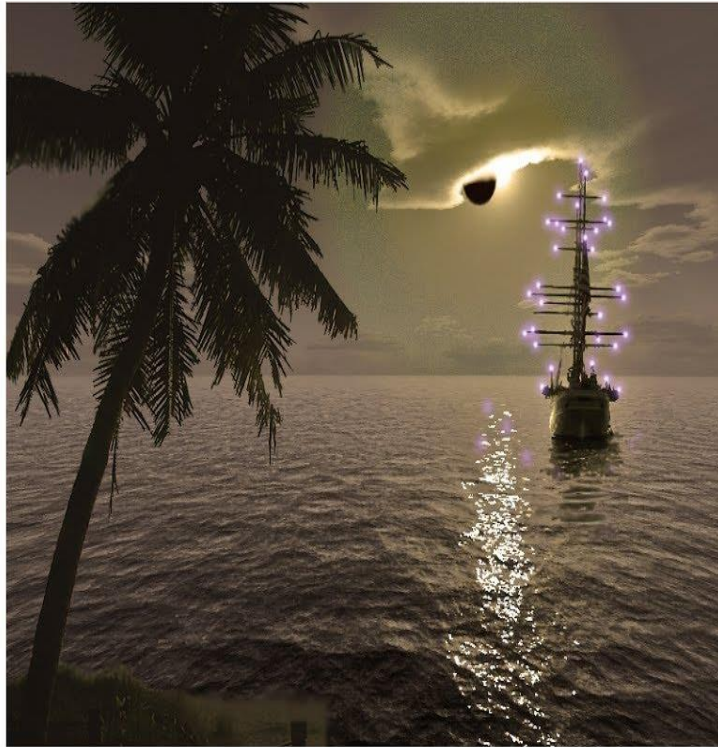
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.18)$$

Από την (2.18) προκύπτει ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι μεγαλύτερη στην σφαίρα με την μεγαλύτερη ακτίνα καμπυλότητα $\kappa = \frac{1}{R}$ (μικρότερη ακτίνα). Με άλλα λόγια οι αγωγοί με την μεγαλύτερη ακτίνα καμπυλότητας π.χ. ακίδες για το ίδιο δυναμικό έχουν μεγαλύτερη ένταση ηλεκτρικού πεδίου. Επειδή στην επιφάνεια των αγωγών ισχύει η σχέση 1.22 οι αγωγοί με την μεγαλύτερη ακτίνα καμπυλότητας π.χ. ακίδες θα εμφανίζουν μεγαλύτερη πυκνότητα φορτίου από τους αγωγούς με μικρότερη ακτίνα

καμπυλότητας. Αυτό το εκμεταλλευόμαστε στην κατασκευή αλεξικέραυνων που καταλήγουν σε ακίδα και το αποφεύγουμε στις κεραίες που πρέπει να καταλήγουν σε μία μικρή σφαίρα.

Στην περίπτωση που η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου γίνει πολύ μεγάλη στην άκρη μιας ακίδας τότε δημιουργείται σπινθήρας και το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **εκφόρτιση κορόνας**. Αυτό συμβαίνει γιατί ο αέρας που είναι διηλεκτρικό εάν βρεθεί σε ηλεκτρικό, πεδίο μεγαλύτερο από μία χαρακτηριστική τιμή που λέγεται **διηλεκτρική αντοχή** μετατρέπεται από μονωτής σε αγωγό. Έτσι υπό την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου ελευθερώνονται ηλεκτρόνια από τα μόρια του αέρα με αποτέλεσμα να έχουμε επιταχυνόμενα φορτία που εκπέμπουν ακτινοβολία. Το φαινόμενο κατά το οποίο ένας μονωτής υπό την επίδραση ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου μετατρέπεται σε αγωγό ονομάζεται **ηλεκτρική διάσπαση** ή ηλεκτρική κατάρρευση (electricbreakdown). Η τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου για την οποία υφίσταται ηλεκτρική διάσπαση το διηλεκτρικό ονομάζεται **διηλεκτρική αντοχή** του διηλεκτρικού E_b .

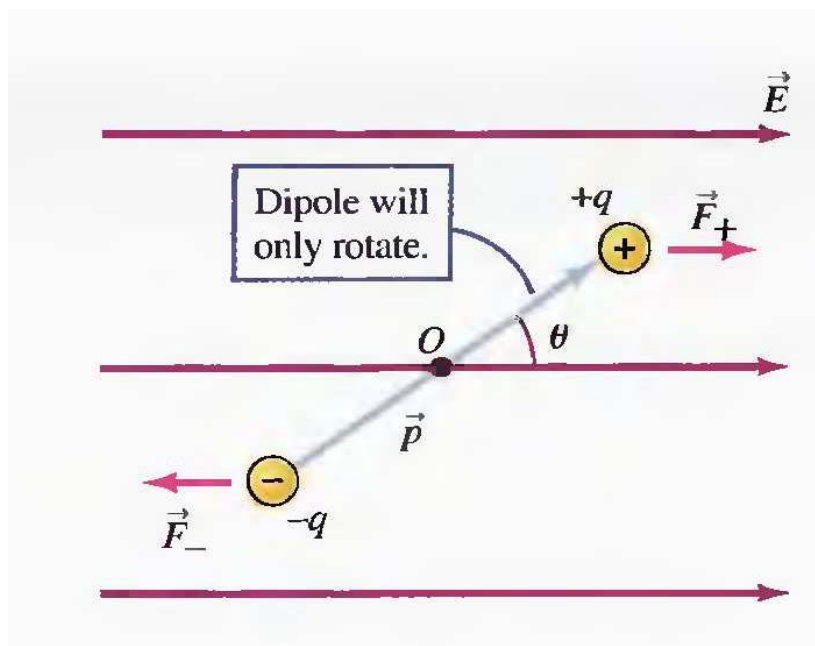




Ερώτηση 3 Να βρεθεί το μέγιστο ηλεκτρικό δυναμικό που μπορεί να βρεθεί μία μεταλλική σφαίρα ακτίνας 1cm (Δίνεται διηλεκτρική αντοχή του αέρα $E_b=3 \times 10^6 \text{Vm}^{-1}$)

2.2 Ηλεκτρικό δίπολο

Ένα σύστημα δυο ίσων και αντίθετων φορτίων που απέχουν απόσταση L και είναι στερεωμένα με ένα μονωτικό υλικό χαρακτηρίζεται σαν ηλεκτρικό δίπολο (Σχήμα -2.3)



Σχήμα 2.2

2.2.1 Μηχανική ροπή ηλεκτρικού δίπολου

Εάν θεωρήσουμε ότι το ηλεκτρικό δίπολο βρίσκεται σε ένα ηλεκτρικό πεδίο έντασης \vec{E} όπως το σχήμα 2.2 τότε στο θετικό φορτίο θα ασκείται δύναμη \vec{F}_+ και στο αρνητικό φορτίο δύναμη \vec{F}_- . Η κάθε δύναμη θα προκαλεί μηχανική ροπή ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον του διπόλου. Έτσι θα έχουμε για την μηχανική ροπή της δύναμης \vec{F}_+ ,

$$\vec{\tau}_1 = \vec{l}_1 \times \vec{F}_+ = \vec{l}_{1x} \times \vec{F}_+ + \vec{l}_{1y} \times \vec{F}_+ = l_1 \cos\theta \hat{i} \times qE \hat{i} + l_1 \sin\theta \hat{j} \times qE \hat{i} = -l_1 qE \sin\theta \hat{k} = -\frac{L}{2} qE \sin\theta \hat{k} \quad (2.19)$$

Ομοίως για την μηχανική ροπή της δύναμης \vec{F}_- .

$$\vec{\tau}_2 = \vec{l}_2 \times \vec{F}_- = \vec{l}_{2x} \times \vec{F}_- + \vec{l}_{2y} \times \vec{F}_- = -l_2 \cos\theta \hat{i} \times (-qE \hat{i}) + (-l_2 \sin\theta \hat{j}) \times (-qE \hat{j}) = -l_1 qE \sin\theta \hat{k} = -\frac{L}{2} qE \sin\theta \hat{k} \quad (2.20)$$

Οπότε η συνολική μηχανική ροπή θα είναι

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = -qLE \sin\theta \hat{k} \quad (2.21)$$

Εάν ορίσουμε σαν **διπολική ροπή** ηλεκτρικού διπόλου το διανυσματικό μέγεθος

\vec{p} , και το \vec{L} είναι διάνυσμα με μέτρο L και κατεύθυνση από το αρνητικό στο θετικό φορτίο τότε η διπολική ροπή δίνεται από τη σχέση

$$\vec{p} = q\vec{L} \quad (2.22)$$

τότε η σχέση (2.21)

είναι το εξωτερικό γινόμενο των p, E
 έτσι τελικά η μηχανική ροπή δίνεται από την

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (2.23).$$

2.2.2 Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ηλεκτρικού δίπολου

Όταν ένα ηλεκτρικό δίπολο περιστρέφεται υπό την επίδραση ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου το πεδίο παράγει έργο επάνω στο δίπολο. Από αυτό το έργο μπορούμε να βρούμε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια που έχει το δίπολο ευρισκόμενο μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο.

Το έργο που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στο δίπολο για να το στρέψει από την γωνία θ_0 στην θ είναι

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \vec{\tau} d\vec{\theta} \quad (2.24)$$

όμως

$$d\vec{\theta} = d\theta \hat{k} \quad (2.25)$$

Από (2.23), (2.24) και (2.25)

έχουμε

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} -pE \sin\theta d\theta = pE [\cos\theta - \cos\theta_0] \quad (2.26)$$

Ισχύει

$$W = -\Delta U = -(U - U_0) \rightarrow (U - U_0) = -W = -pE [\cos\theta - \cos\theta_0] \quad (2.27)$$

Εάν θεωρήσουμε στην γωνία $\theta_0 = 90^\circ$ ή $U_0 = 0$ τότε από την (2.27) έχουμε

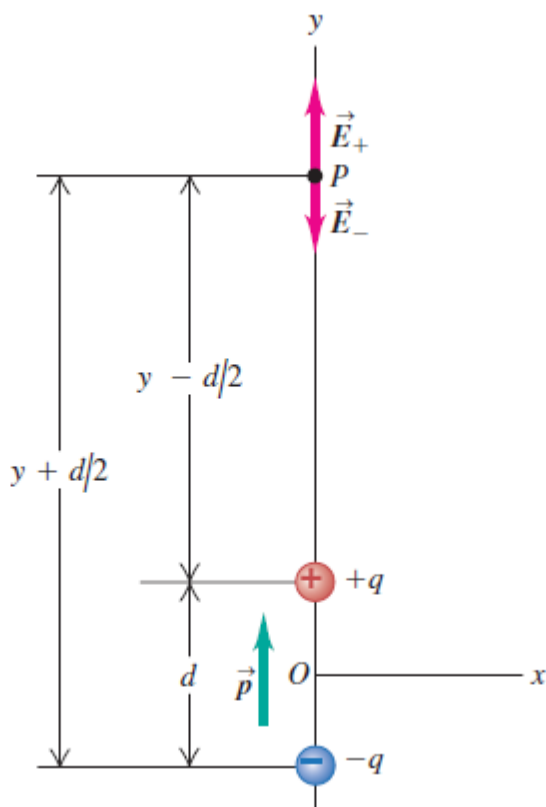
$$U = -pE \cos\theta \quad (2.28)$$

Τελικά η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρικού διπόλου όταν βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο E είναι

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (2.29)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα ηλεκτρικό δίπολο σε ένα σημείο P το οποίο βρίσκεται στον άξονα του διπόλου (Σχήμα 2.3) σε πολύ μεγάλη απόσταση από το μέσο του διπόλου έτσι ώστε η απόσταση αυτή να είναι μεγαλύτερη από την απόσταση των δύο φορτίων που συνιστούν το δίπολο δίνεται από τη σχέση

$$E_y = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 y^3} \quad (2.30)$$



Σχήμα 2.3.

Το σημαντικό είναι ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ελαττώνεται αντιστρόφως ανάλογα του y^3 . Η ίδια εξάρτηση ισχύει για οποιαδήποτε άλλη θέση του σημείου P αλλά περιγράφεται με πιο περίπλοκη σχέση.

Άσκηση 2.1

Το ηλεκτρικό δυναμικό μετρήθηκε και βρέθηκε ότι μπορεί να περιγραφεί από την συνάρτηση $V(x,y,z)=3xy^2 - 5yx^3 - 2zx^2$. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο με συντεταγμένες (2,3,1) και η δύναμη που θα δεχτεί ένα φορτίο $1\mu\text{C}$ που θα βρεθεί στη θέση αυτή.

Λύση

Με εφαρμογή της σχέσης (2.12)

$$\mathbf{E} = -[(3y^2 - 15yx^2 - 4zx)\hat{i} + (6xy - 5x^3)\hat{j} + (-2x^2)\hat{k}] \quad (1)$$

Στο σημείο με συντεταγμένες (2,3,1) η (1) γίνεται

$$\mathbf{E}_{(2,3,1)} = 161\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k} \quad (2)$$

Και η δύναμη $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$, είναι

$$\mathbf{F} = 161x10^{-6}\hat{i} + 4x10^{-6}\hat{j} + 8x10^{-6}\hat{k}$$

Με μέτρο

$$F = \sqrt{(161x10^{-6})^2 + (4x10^{-6})^2 + (8x10^{-6})^2}\text{N}$$

Άσκηση 2.2

Μια σφαιρική κατανομή φορτίου δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο του οποίου το δυναμικό σε απόσταση r από το κέντρο της δίνεται από τη σχέση

$$V(r) = A \sin(r) e^{-Br}$$

όπου $A=0.1\text{N/m}$ και $B=2\text{cm}$. Θεωρώντας ότι το ηλεκτρικό πεδίο που προέρχεται από την κατανομή είναι ακτινικό να βρείτε α) Την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο της κατανομής β) αυτή η κατανομή φορτίου οφείλεται σε μεταλλικό αγωγό ή σε ένα μονωτή;

Λύση

Με εφαρμογή της σχέσης (2.10)

Έχουμε

$$E = -e^{-Br} [a \cos(r) - ab \sin(r)] \quad (1)$$

Για $r \rightarrow 0$ έχουμε $E=A$ δηλαδή $E \neq 0$ άρα η κατανομή φορτίου οφείλεται σε μονωτή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΠΥΚΝΩΤΕΣ

Ως χωρητικότητα C ενός αγωγού χαρακτηρίζουμε την ικανότητα του να συγκρατεί φορτίο Q όταν βρίσκεται σε δυναμικό V . Η χωρητικότητα του αυξάνεται ένα πλησιάζει σε αυτόν άλλος αγωγός αντίθετα φορτισμένος. Ισχύει

$$C = \frac{Q}{V} \quad (3.1),$$

Σε μονάδες F (Farad)

Ένα σύστημα δύο αγωγών με ίσο και αντίθετο φορτίο καλείται πυκνωτής. Ο πυκνωτής είναι μία συσκευή που αποθηκεύει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια και φορτίο. Οι αγωγοί ονομάζονται οπλισμοί του πυκνωτή. Η χωρητικότητα πυκνωτή δίδεται από τη σχέση

$$C = \frac{Q}{V_a - V_b} \quad (3.2),$$

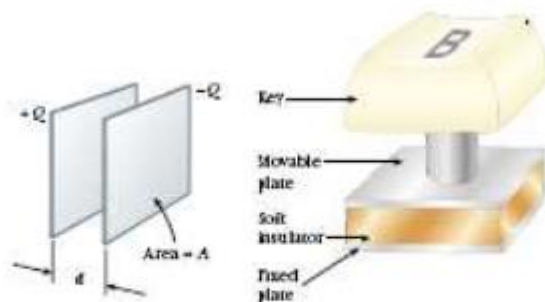
Όπου Q θετικό φορτίο, V_a , V_b τα δυναμικά του θετικού και αρνητικού οπλισμού αντίστοιχα.

Η χωρητικότητα των πυκνωτών εξαρτάται μόνο από τις γεωμετρικές τους διαστάσεις π.χ η χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή που έχει οπλισμούς εμβαδού A που απέχουν απόσταση d δίνεται από τη σχέση (3.3)

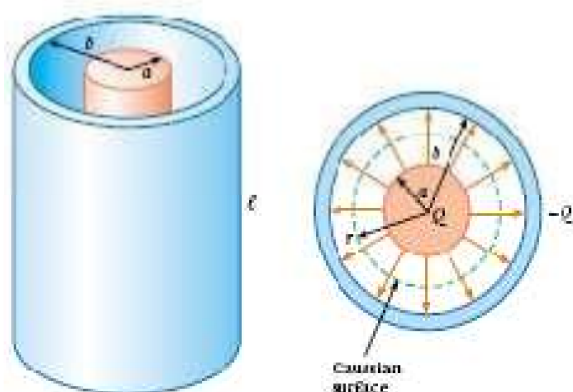
$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (3.3)$$

Ανάμεσα στους οπλισμούς ενός πυκνωτή τοποθετούμε διηλεκτρικό για τους εξής λόγους

1. Για να αυξηθεί η διηλεκτρική αντοχή του πυκνωτή
2. Για να αποκτήσει μηχανική αντοχή
3. Για να αυξηθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή



Σχήμα 3.1 Επίπεδος πυκνωτής



Σχήμα 3.2 Κυλινδρικός πυκνωτής

3.2 Διηλεκτρική σταθερά

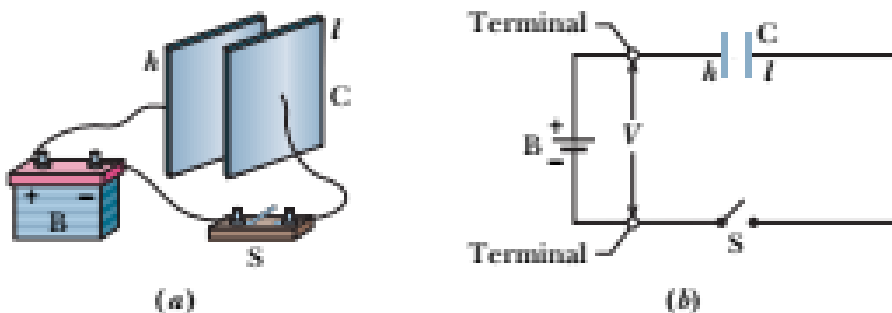
Τα διηλεκτρικά χαρακτηρίζονται ως προς τις ηλεκτρικές τους ιδιότητες από τα μεγέθη διηλεκτρική σταθερά και ηλεκτρική διαπερατότητα.

Εάν C_0 είναι η χωρητικότητα, V_0 , η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς και E_0 η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε πυκνωτή χωρίς διηλεκτρικό, ενώ C, V, E είναι τα αντίστοιχα μεγέθη όταν ο πυκνωτής έχει διηλεκτρικό τότε ισχύει

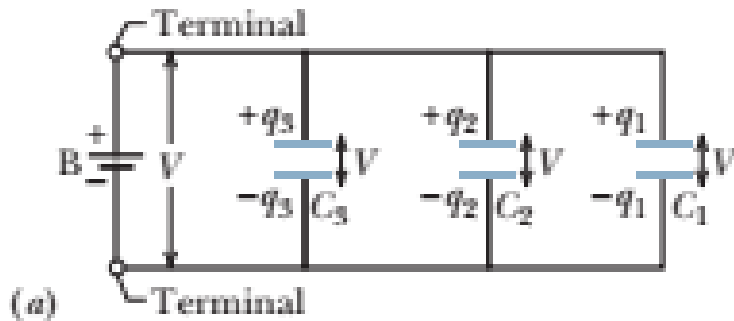
$$K_e = \frac{C}{C_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{E}{E_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (3.4)$$

Όπου K_e η διηλεκτρική σταθερά του πυκνωτή, και ϵ η ηλεκτρική διαπερατότητα του διηλεκτρικού. Η ϵ είναι σημαντικό μέγεθος γιατί όλοι οι νόμοι του ηλεκτρισμού εφαρμόζονται στο μέσο αν αντί της ϵ_0 βάλουμε την ϵ . Η ηλεκτρική διαπερατότητα του διηλεκτρικού εκφράζει πόσο “διαπερατό” είναι ένα διηλεκτρικό στο ηλεκτρικό πεδίο. Η ϵ που εξαρτάται από τις μικροσκοπικές ιδιότητες του μέσου συνδέεται με το μακροσκοπικό μέγεθος K_e που προσδιορίζεται πειραματικά μετρώντας την διαφορά δυναμικού χωρίς και με διηλεκτρικό και εφαρμόζοντας την σχέση (3.4). Ειδικά ο νόμος του Gauss στην περίπτωση διηλεκτρικού διατυπώνεται ως εξής

$$\oiint \vec{E} d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon} \quad (3.5)$$



ΠΥΚΝΩΤΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ

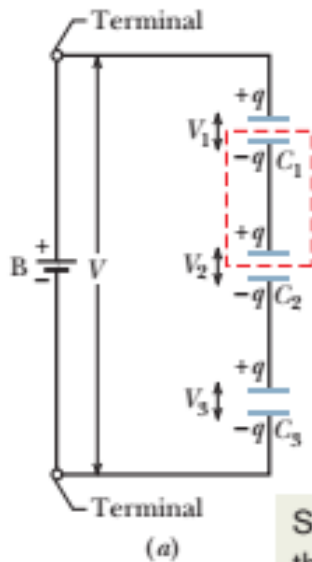


$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V, \quad \text{and} \quad q_3 = C_3 V.$$

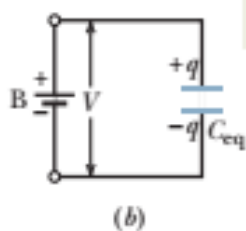
$$C_{\text{eq}} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 + C_3,$$

$$C_{\text{eq}} = \sum_{j=1}^n C_j \quad (n \text{ capacitors in parallel}).$$

ΠΥΚΝΩΤΕΣ ΣΕ ΣΕΙΡΑ



Series capacitors and their equivalent have the same q ("seri-q").



$$V_1 = \frac{q}{C_1}, \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \quad \text{and} \quad V_3 = \frac{q}{C_3}.$$

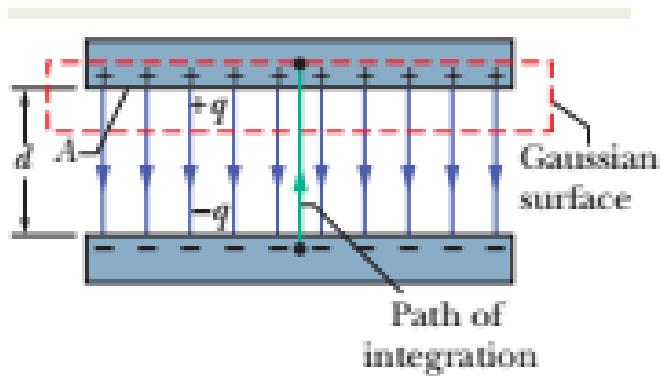
$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right).$$

$$C_{\text{eq}} = \frac{q}{V} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3},$$

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \quad (n \text{ capacitors in series}).$$

ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΠΥΚΝΩΤΗΣ



$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Άσκηση 3.1 : Επίπεδος πυκνωτής με $d=1\text{cm}$ βρίσκεται σε διαφορά δυναμικού 29KV . Στον πυκνωτή εισάγουμε γυαλί πάχους $l=2\text{mm}$ που εφαρμόζει πλήρως στους οπλισμούς . Πότε ο αέρας ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή θα υποστεί διάτρηση πριν η μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού; (Διηλεκτρική σταθερά αέρα $K=1$, Διηλεκτρική σταθερά γυαλιού $K_g=6.5$, διηλεκτρική αντοχή αέρα $E_b=30 \times 10^4 \text{Vm}^{-1}$)

Λύση

Πριν την εισαγωγή $E=V/d=29\text{KV/cm} < 30\text{KV/cm}$, άρα δεν υφίσταται διάτρηση.

Μετά την εισαγωγή έχουμε δύο πυκνωτές σε σειρά. Ένας με διηλεκτρικό τον αέρα πάχους $d-l$ και ο άλλος με διηλεκτρικό το γυαλί πάχους l . Αμφότεροι με εμβαδό οπλισμών A . Ζητάμε το ηλεκτρικό πεδίο E_1 ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή με τον αέρα για να το συγκρίνουμε με την διηλεκτρική αντοχή του αέρα. Ισχύει

$$E_1 = \frac{V_1}{d-l} \text{ (1) και } C_1 = \frac{Q}{V_1} \rightarrow V_1 = \frac{Q}{C_1} \text{ (2). Από (1) και (2) παίρνουμε}$$

$$E_1 = \frac{Q}{C_1(d-l)} \text{ (3). Ισχύει για την ολική χωρητικότητα του συστήματος σε σειρά}$$

$$C_{ολ} = \frac{Q}{V} \text{ (4) Από (3) και (4) παίρνουμε, } E_1 = \frac{VC_{ολ}}{C_1(d-l)} \text{ (5), όπου } C_{ολ} = C_1 + C_2 \text{ (6),}$$

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{A}{d-l} \text{ (7), } C_2 = \epsilon \frac{A}{l} \text{ (8), } K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \text{ (9). Από (5),(6),(7),(8),(9) βρίσκουμε,}$$

$E_1 = 34.9\text{KV/cm} > E_b$, δηλαδή θα έχουμε διάτρηση.

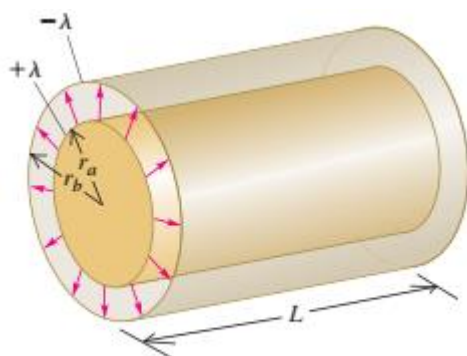
ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΣ ΠΥΚΝΩΤΗΣ

Άσκηση 3.2 : Να βρεθεί η χωρητικότητα ενός ομοαξονικού καλωδίου (κυλινδρικός πυκνωτής, Σχήμα 3.2) μήκους L , εσωτερικής ακτίνας a , εξωτερικής ακτίνας b , και γραμμικής πυκνότητας φορτίου λ που είναι σταθερή.

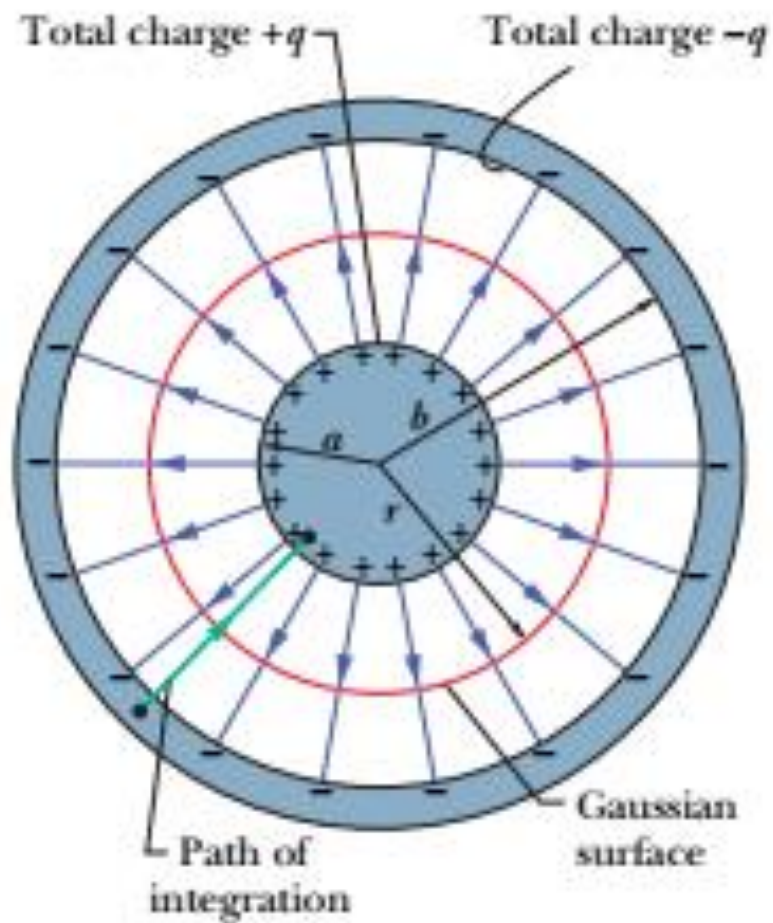
Λύση

Βρίσκουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Θεωρούμε μια κυλινδρική επιφάνεια Gauss ακτίνας r , $a < r < b$. Για λόγους συμμετρίας το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην παράλληλη επιφάνεια του πυκνωτή και ακτινικό. Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι,

$\Phi = \oint E dA = \frac{Q}{\epsilon_0} = E 2\pi r L \rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L}$ (1). Ισχύει για την γραμμική πυκνότητα φορτίου, $\lambda = \frac{Q}{L}$ (2). Από (1) και (2), $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ (3). Επίσης, $E = -\frac{dV}{dr} \rightarrow dV = -E dr$ (4). Ολοκληρώνοντας την (4) έχουμε $\int_a^b dV = -\int_a^b E dr \rightarrow V_b - V_a = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln a - \ln b) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{b}$ (5). Η χωρητικότητα θα είναι, $C = \frac{Q}{V_a - V_b}$ (6). Από (5) και (6), $C = \frac{Q}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{b}} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{b}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}$ (7), Από την (7) προκύπτει ότι η χωρητικότητα εξαρτάται από τις γεωμετρικές διαστάσεις.



ΣΦΑΙΡΙΚΟΣ ΠΥΚΝΩΤΗΣ



$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b - a} \quad (\text{spherical capacitor}).$$

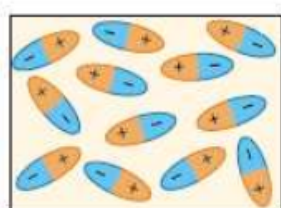
$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{a}{1 - a/b}.$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{a}{1 - a/b}. \quad b \rightarrow \infty$$

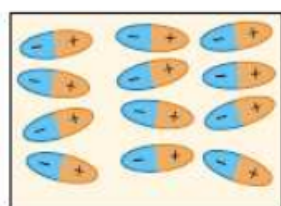
$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (\text{isolated sphere}).$$

ΠΟΛΩΣΗ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ

Τα μόρια των διηλεκτρικών μπορεί να έχουν μόνιμη διπολική ροπή τότε λέμε ότι είναι πολικά μορια. Τα πολικά μόρια απουσία ηλεκτρικού πεδίου έχουν τυχαίο προσανατολισμό (Σχήμα 3.3 .α). Όταν όμως βρεθούν μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}_0 οι

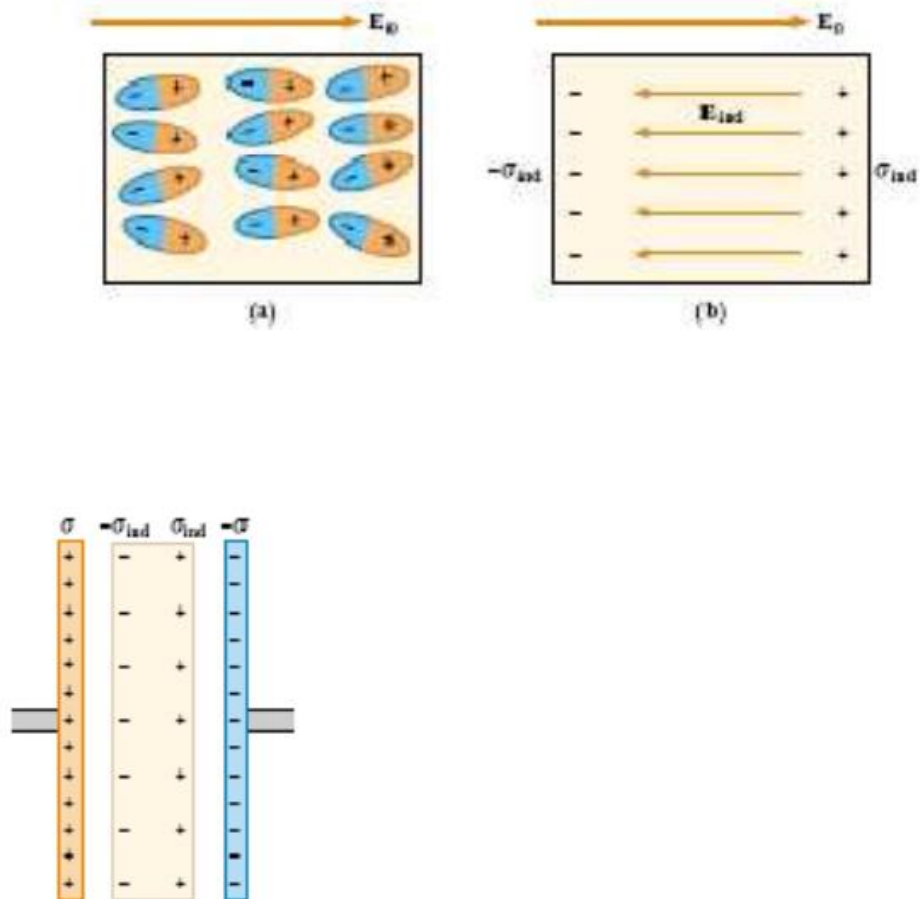


(a)

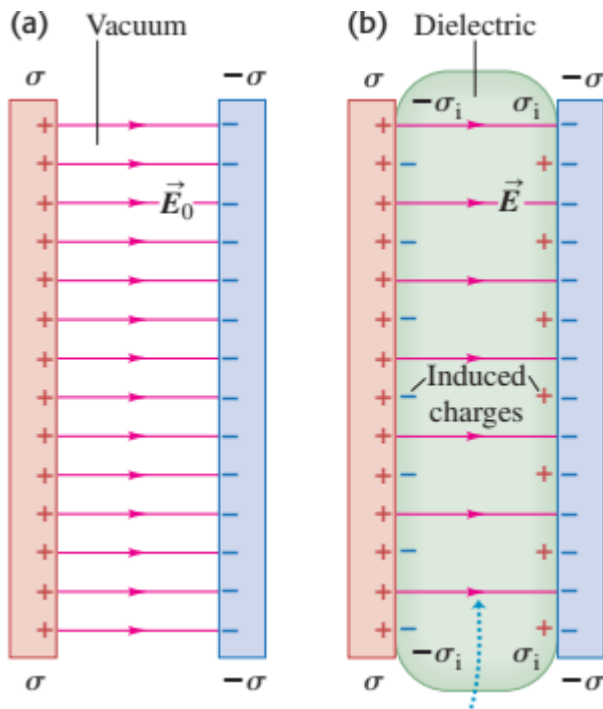


(b)

διπολικές τους ροπές τείνουν να προσανατολιστούν μέσα στο εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο (Σχήμα 3.3 b) και να γίνουν παράλληλες με το \mathbf{E}_0 . Το ίδιο συμβαίνει και στα μη πολικά μόρια τα οποία υπό την επίδραση του πεδίου αποκτούν διπολική ροπή και μετά προσανατολίζονται και να γίνουν παράλληλες με το \mathbf{E}_0 .



Σχήμα 3.4



$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}_{ind} \rightarrow E\hat{i} = E_0\hat{i} - E_{ind}\hat{i} \rightarrow$$

$$E = E_0 - E_{ind}$$

Επίσης

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

και

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_{ind}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma_{ind}}{\epsilon_0}$$

Ισχύει

$$K_e = \frac{E_0}{E} = \frac{\frac{\sigma}{\epsilon_0}}{\frac{\sigma - \sigma_{ind}}{\epsilon_0}} \rightarrow \sigma_{ind} = \sigma \left(1 - \frac{1}{K_e} \right)$$

- Εάν δεν υπάρχει διηλεκτρικό τότε $K_e = 1$ και $\sigma_{ind} = 0$
- Εάν το διηλεκτρικό αντικατασταθεί με ηλεκτρικό αγωγό Τότε στο εσωτερικό του αγωγού $E = 0$ άρα

$$\sigma_{ind} = \sigma$$

Δηλαδή το επιφανειακό φορτίο που επάγεται στον αγωγό είναι ίσο και αντίθετο με το φορτίο των οπλισμών του πυκνωτή ώστε το ηλεκτρικό πεδίο να μηδενίζεται μέσα στον αγωγό

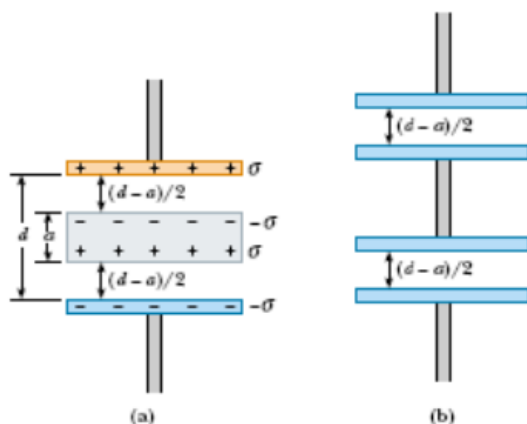
Άσκηση 3.3

Ένα φορτισμένο μονωτικό σώμα έλκει κομμάτια χαρτιού με ηλεκτροστατική δύναμη 2N. Εάν το σώμα αυτό τοποθετηθεί α) Μέσα σε μια μεταλλική σφαίρα Πόση θα είναι η δύναμη αυτή και γιατί ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας β) Εάν το χαρτί τοποθετηθεί μέσα σε μια μεταλλική σφαίρα Πόση θα είναι τότε η δύναμη; (Και στις δύο περιπτώσεις η σχετική απόσταση χαρτιού – φορτισμένου σώματος παραμένει η ίδια) γ) Εξηγήστε γιατί τα αφόρτιστα σώματα έλκονται πάντα από τα φορτισμένα

Λύση (α) $F=2N$ γιατί εξ επαγωγής θα φορτιστή η επιφάνεια της σφαίρας (β) $F=0N$ γιατί στο εσωτερικό του αγωγού $E=0$. (γ) Λόγω πόλωσης του διηλεκτρικού

Άσκηση 3.4

Το σχήμα -1 (α) δείχνει ένα πυκνωτή με διηλεκτρικό πάχους a οπλισμούς εμβαδού A



και απόσταση οπλισμών d . Απουσία διηλεκτρικού εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού $V_0 = 100V$. Τότε η πηγή αφαιρείται και εισάγεται η πλάκα του διηλεκτρικού. Εάν $A=100\text{cm}^2, d=1\text{cm}, a=0.5\text{cm}, K=7$ Να βρεθούν α) Η χωρητικότητα πριν την εισαγωγή του διηλεκτρικού β) Το φορτίο των οπλισμών γ) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο διάκενο δ) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο διηλεκτρικό ε) την διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς στ) Η χωρητικότητα παρουσία της πλάκας.

$$\text{A) Πριν την εισαγωγή } C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = 8.9 \text{ pF}$$

$$\text{B) } q = C_0 V_0 = 8.9 \times 10^{-10} \text{ C}$$

$$\text{Γ) } E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 A} = 10^4 \text{ Vm}^{-1}$$

$$\text{Δ) } E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{q}{K \epsilon_0 A} = 0.14^4 \text{ Vm}^{-1}$$

Ε)

Εάν V_1 είναι το δυναμικό της επάνω επιφάνειας του διηλεκτρικού και V_2 το δυναμικό της κάτω επιφάνειας τότε μπορούμε να γράψουμε

$$V_a - V_b = V_a - V_1 - V_2 + V_2 - V_b = E_0(d-a)/2 + E_a + E_0(d-a)/2 = 57 \text{ V},$$

Διότι οι επιφάνειες του διηλεκτρικού απέχουν κατά $(d-a)/2$ η κάθε μία από τους οπλισμούς του πυκνωτή.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'.$$

$$W = \int dW = \frac{1}{C} \int_0^q q' dq' = \frac{q^2}{2C}.$$

$$U = \frac{q^2}{2C} \quad (\text{potential energy}).$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \quad (\text{potential energy}).$$

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{CV^2}{2Ad}.$$

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{V}{d} \right)^2.$$

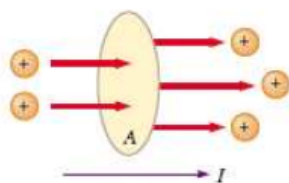
$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (\text{energy density}).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΝΕΧΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ

4.1 Ένταση ρεύματος

Σαν ηλεκτρικό ρεύμα χαρακτηρίζουμε την προσανατολισμένη κίνηση φορτίων. Ποσοτικά περιγράφεται από το μέγεθος ένταση ρεύματος που είναι ο ρυθμός με τον οποίο τα φορτία διέρχονται μέσα από μία επιφάνεια (Σχήμα 4.1)



Σχήμα 4.1

Οι εκφράσεις για την ένταση του ρεύματος είναι,

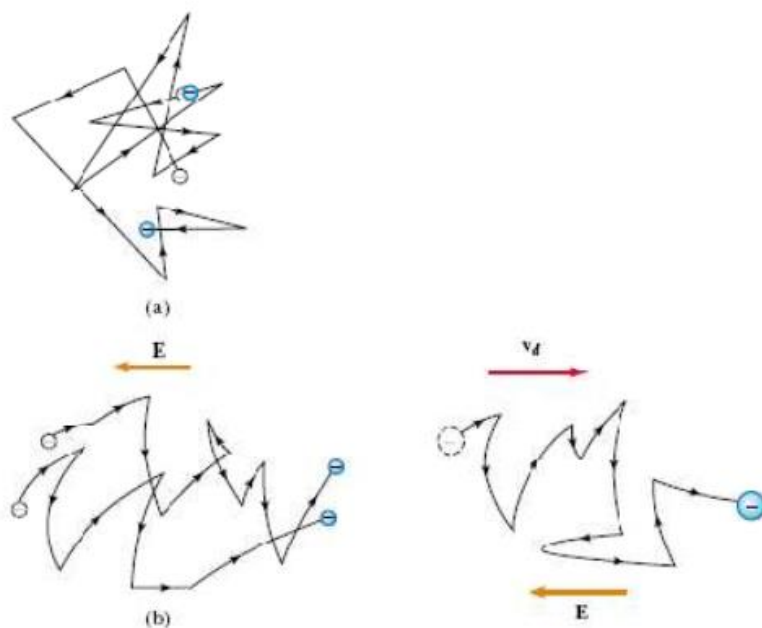
$$I_{av} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (4.1),$$

Όπου I_{av} είναι η μέση τιμή της έντασης, ΔQ το φορτίο που διέρχεται από επιφάνεια S σε χρόνο Δt . Εάν οι μεταβολές είναι απειροστές έχουμε την στιγμιαία ένταση ρεύματος,

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (4.2)$$

Μονάδα έντασης ρεύματος είναι το $1A=1Cs^{-1}$. Η συμβατική φορά του ρεύματος είναι η φορά της ροής θετικού φορτίου.

Στους μεταλλικούς αγωγούς τα κινούμενα φορτία είναι τα ηλεκτρόνια. Τα ηλεκτρόνια όταν στον αγωγό δεν εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού ή ισοδύναμα όταν δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο σε αυτούς, εκτελούν θερμική κίνηση με μεγάλη θερμική ταχύτητα $v_{th} \sim 10^6 ms^{-1}$. Η κίνηση αυτή είναι τυχαία μη προσανατολισμένη και στατιστικά το ηλεκτρόνιο παραμένει στην ίδια θέση (Σχήμα 4.2 (α)). Η κίνηση αυτή των ηλεκτρονίων είναι ανάλογη της κίνησης Brown των αερίων. γι αυτό προσομοιάζεται με ένα ηλεκτρονικό νέφος. Όταν εφαρμοστεί ηλεκτρικό πεδίο στα άκρα του αγωγού τα ηλεκτρόνια δέχονται δύναμη επιταχύνονται και συγκρούονται με τα άτομα του



Σχήμα 4.2

Έστω ο αγωγός του σχήματος 4.3. Θεωρούμε ότι αυτός έχει συγκέντρωση φορτισμένων φορέων n ,

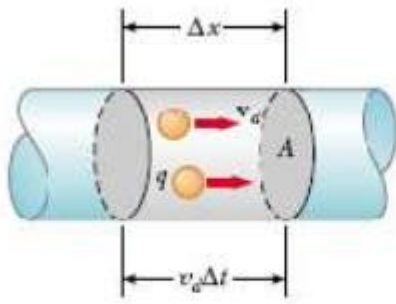
$$n = \frac{\text{αριθμός φορτισμένων φορέων}}{\text{όγκος}} \quad (4.3)$$

Το φορτίο που θα διέρχεται από την διατομή του αγωγού σε χρόνο Δt θα είναι

$\Delta Q = q \times \text{αριθμός φορτισμένων φορέων}$ (4.4), όπου q το φορτίο κάθε φορέα. Από (4.3) και (4.4) έχουμε,

$\Delta Q = qn \times \text{όγκος}$ (4.5). Η μέση ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος θα είναι

$$I_{av} = \frac{qn \times \text{όγκος}}{\Delta t} = \frac{qnA l}{\Delta t} = \frac{qnA v_d \Delta t}{\Delta t} = qn v_d A \quad (4.5)$$



Σχήμα 4.3

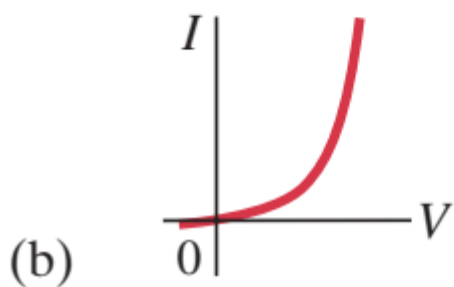
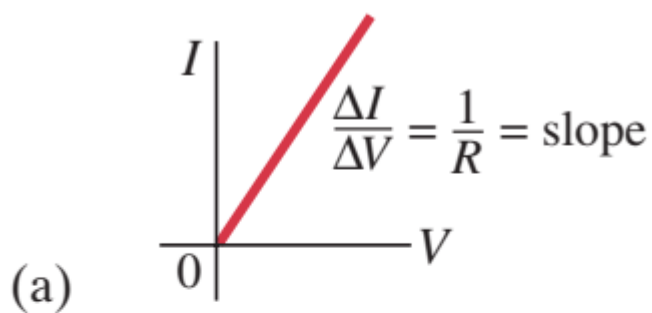
$$J = \frac{i}{A},$$

$$\vec{J} = (ne)\vec{v}_d.$$

$$I = \frac{V}{R}$$

$$V = IR.$$

R=σταθερη-→Νόμος του Ohm



$$1 \text{ ohm} = 1 \Omega = 1 \text{ volt per ampere} \\ = 1 \text{ V/A.}$$

Αγωγιμότητα $G = \frac{1}{R}$ σε (Siemens)

$$R = \rho \frac{\ell}{A},$$

, ρ είναι η ειδική αντίσταση σε (Ωm) ή (Ωcm)

TABLE 18-1 Resistivity and Temperature Coefficients (at 20°C)

Material	Resistivity, ρ ($\Omega \cdot \text{m}$)	Temperature Coefficient, α ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)
<i>Conductors</i>		
Silver	1.59×10^{-8}	0.0061
Copper	1.68×10^{-8}	0.0068
Gold	2.44×10^{-8}	0.0034
Aluminum	2.65×10^{-8}	0.00429
Tungsten	5.6×10^{-8}	0.0045
Iron	9.71×10^{-8}	0.00651
Platinum	10.6×10^{-8}	0.003927
Mercury	98×10^{-8}	0.0009
Nichrome (Ni, Fe, Cr alloy)	100×10^{-8}	0.0004
<i>Semiconductors[‡]</i>		
Carbon (graphite)	$(3-60) \times 10^{-5}$	-0.0005
Germanium	$(1-500) \times 10^{-3}$	-0.05
Silicon	0.1-60	-0.07
<i>Insulators</i>		
Glass	10^9-10^{12}	
Hard rubber	$10^{13}-10^{15}$	

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \text{ ειδική αγωγιμότητα σε } (\Omega\text{m})^{-1} \text{ ή σε } (\Omega\text{cm})^{-1}$$

$$\rho_T = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

$$T_0 = 0 \text{ } ^{\circ}\text{C} \text{ ή } T_0 = 20 \text{ } ^{\circ}\text{C}$$

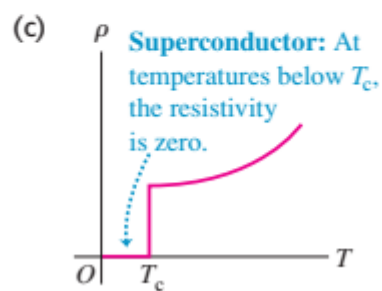
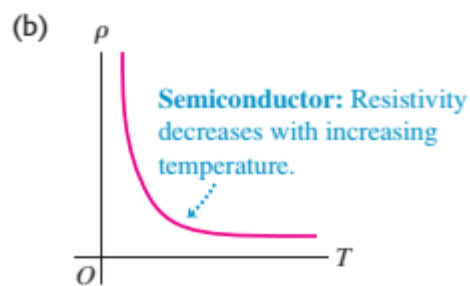
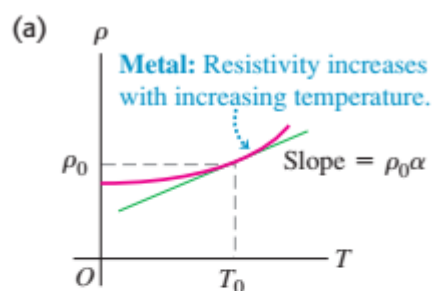
α είναι ο θερμικός συντελεστής ειδικής αντίστασης

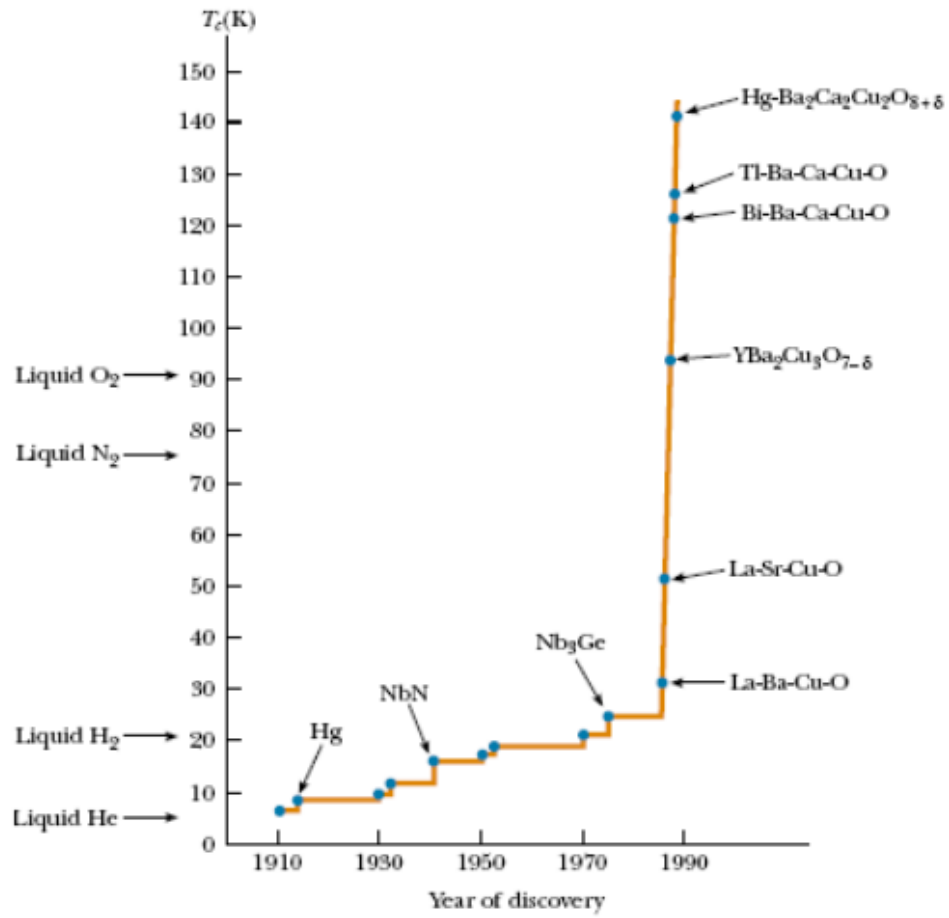
Constantan

55%Cu-45%Ni, $\alpha=0$

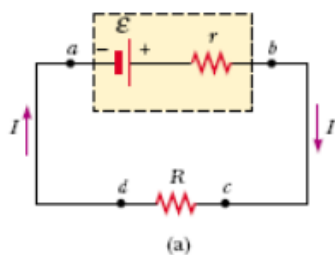
$$\alpha = \frac{\Delta\rho}{\rho_0\Delta T}$$

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)].$$





Ηλεκτρεγερτική δύναμη E



Σχήμα 4.6

Η δράση της μπαταρίας περιγράφεται από το έργο που παράγει επί του φορτίου για να το μεταφέρει από το χαμηλότερο στο υψηλότερο δυναμικό δια το φορτίου από την Ηλεκτρεγερτική της δύναμη E (HEA ή EMF). Αφού η E περιγράφει το έργο ανά μονάδα φορτίου θα έχει μονάδες ηλεκτρικού δυναμικού Volt (V) στο SI. Επίσης τα φορτία που διέρχονται δια μέσου της μάζας της θα συναντάνε αντίσταση r κατά την κίνηση τους, η οποία λέγεται εσωτερική αντίσταση της μπαταρίας (Σχήμα 4.6). Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα άκρα της μπαταρίας που λέγονται και πόλοι ονομάζεται πολική τάση π.χ V_{ab} . Η ιδανική μπαταρία έχει $r=0\Omega$. Ανάλογα με το αν το κύκλωμα είναι ανοιχτό ή κλειστό έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις

I Ιδανική μπαταρία με ΗΕΔ $E, r=0$

Α) Ανοιχτό κύκλωμα

Πολική τάση $V_{ab}=E$ Β) Κλειστό κύκλωμα με αντίσταση R Πολική τάση $V_{ab}=E$ **II Πραγματική μπαταρία με ΗΕΔ E, r**

Α) Ανοιχτό κύκλωμα

Πολική τάση $V_{ab}=E$ Β) Κλειστό κύκλωμα με αντίσταση R **Πολική τάση $V_{ab}=E-Ir$ (4.18),**Όπου I το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα,

$$I = \frac{E}{R+r} \quad (4.19),$$

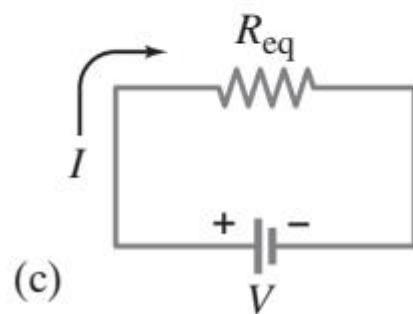
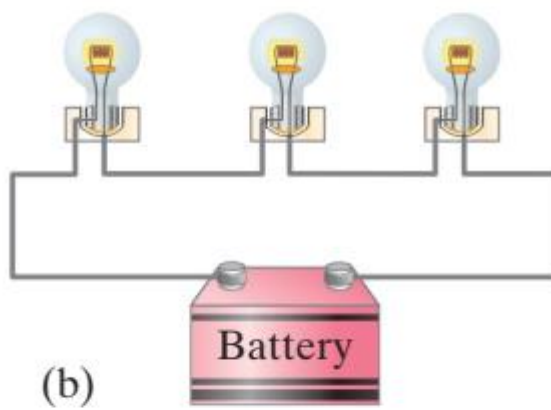
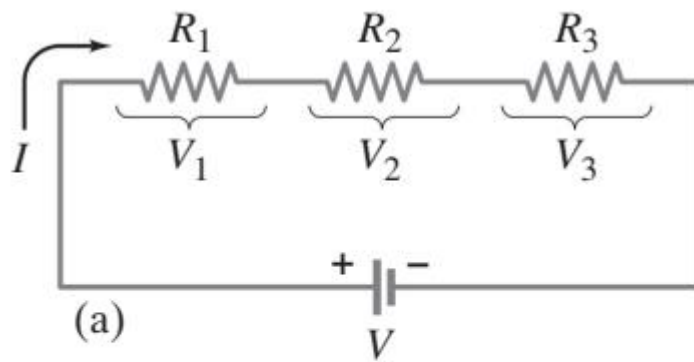
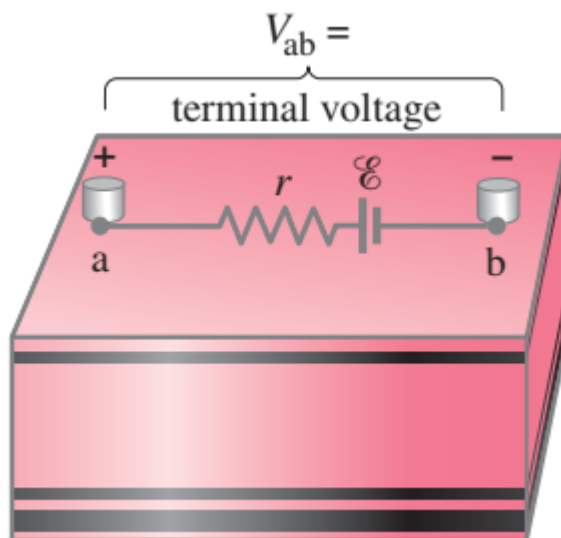
Δηλαδή $V_{ab} < E$ Εάν η ολική αντίσταση είναι $R_{ολ}$, τότε

$$I = \frac{E}{R_{ολ}+r} \quad (4.21)$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

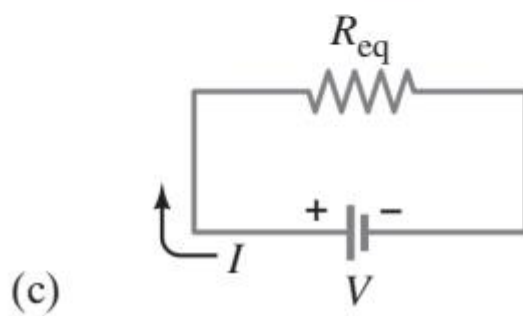
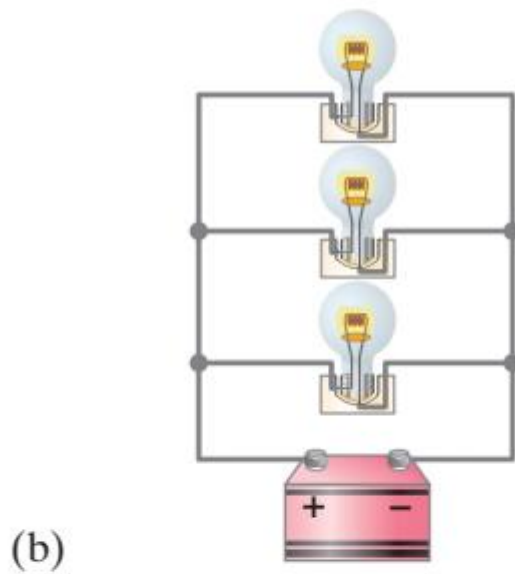
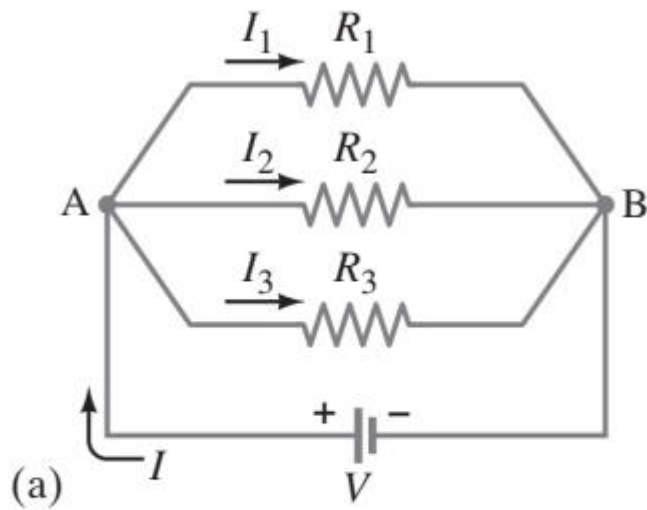
$$I = \frac{E}{R_{ολ} + r}$$

$$V_{ab} = E - Ir$$



$$V = V_1 + V_2 + V_3 = IR_1 + IR_2 + IR_3.$$

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3.$$



$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

$$I_1 = \frac{V}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V}{R_2}, \quad \text{and} \quad I_3 = \frac{V}{R_3}.$$

$$I = \frac{V}{R_{\text{eq}}}.$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$\frac{V}{R_{\text{eq}}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3}.$$

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

4.4 Ηλεκτρική ενέργεια και Ισχύς

Εάν θεωρήσουμε το κύκλωμα του σχήματος 4.6 τότε το φορτίο κατά την κίνηση του από το υψηλότερο δυναμικό στο χαμηλότερο μέσω της αντίστασης R χάνει ενέργεια $\Delta U = q\Delta V$ (4.22). Ο ρυθμός απώλειας ενέργειας δηλαδή η ισχύς,

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{q\Delta V}{\Delta t} = I\Delta V \quad (4.23)$$

Αυτή είναι η ισχύς που μεταφέρει η μπαταρία στην αντίσταση που διαρρέεται με ρεύμα I και στα άκρα της η μεταβολή του δυναμικού είναι ΔV . Η σχέση (4.23) ισχύει όχι μόνο για μεταλλικό αγωγό αλλά για οποιαδήποτε συσκευή που διαρρέεται από ρεύμα I και στα άκρα της η μεταβολή του δυναμικού είναι ΔV . Ειδικά για μεταλλικό αγωγό η ενέργεια αυτή μετατρέπεται εξ' ολοκλήρου σε θερμότητα (Joule) και η καταναλισκόμενη ισχύς δίνεται από τον τύπο

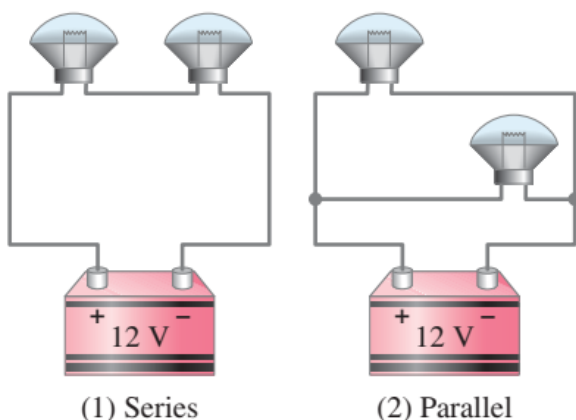
$$P = I^2 R \quad (4.24) \quad \text{ή} \quad P = \frac{\Delta V^2}{R} \quad (4.25)$$

Η ισχύς που παρέχει η πηγή είναι,

$P = EI$ (4.26). Έτσι το ενεργειακό ισοζύγιο για κύκλωμα του σχήματος 4.6

$$EI = I^2 R + I^2 r \quad (4.26).$$

Πότε φωτοβολούν περισσότερο οι όμοιες λάμπες;



Η E είναι ιδανική ($r=0$), οπότε $V_{ab}=E$

Σε σειρά :

$$P_1 = P_2 = P = I^2 R \quad (1)$$

$$R_{ολ} = R + R = 2R \quad (2)$$

$$I = \frac{V}{R_{ολ}} = \frac{V}{2R} \quad (3)$$

Από (1) και (3),

$$P = \frac{V^2}{4R}$$

$$P_1=P_2=P=V^2/4R \quad (4)$$

Παράλληλα

$$P'_1 = P'_2 = P' = \frac{V^2}{R} \quad (5)$$

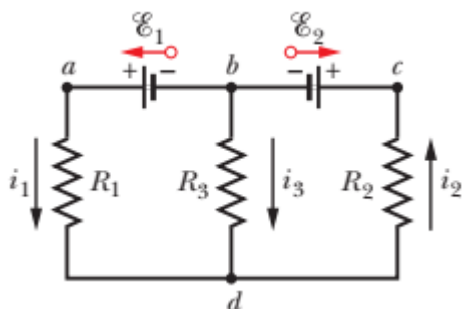
από (4) και (5) $P' > P$

NOMOI TOY KIRCHHOFF

Από την αρχή διατήρησης του φορτίου

Κανόνας των κόμβων ή νόμος των ρευμάτων

$$\Sigma I = 0 \quad (\text{για καθέναν κόμβο}).$$



Σημείο b

$$i_2 = i_1 + i_3$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας

Κανόνας των βρόχων

$$\Sigma V = 0 \quad (\text{για καθέναν κλειστό βρόχο}).$$

Όταν διερχόμαστε δια μέσου πηγής από $-$ σε $+$, το δυναμικό αυξάνεται και η ΗΕΔ θεωρείται θετική.

Όταν διερχόμαστε δια μέσου πηγής από $+$ σε $-$, το δυναμικό μειώνεται και η ΗΕΔ θεωρείται αρνητική.

(Εξοδος από θετικό πόλο ΗΕΔ λαμβάνεται θετική)

Όταν διερχόμαστε από αντιστάτη κατά την φορά του ρεύματος που καθορίσαμε στην αρχή το IR θεωρείται αρνητικό διότι το ρεύμα ακολουθεί την φορά ελάττωσης του δυναμικού και κατέρχεται.

Το αντίθετο συμβαίνει όταν διερχόμαστε από αντιστάτη με φορά αντίθετη με την φορά του ρεύματος

Κίνηση παράλληλη με το ρεύμα λαμβάνεται σαν $-IR$

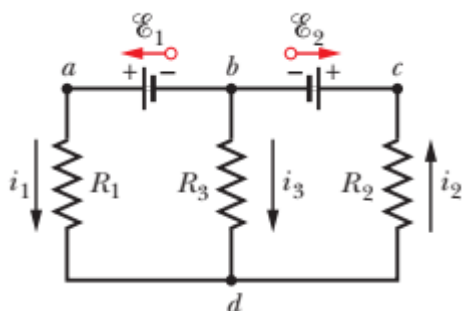
ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΚΑΝΟΝΑ ΤΩΝ ΒΡΟΧΩΝ

$$\sum E = \sum IR$$

(Εξοδος από θετικό πόλο ΗΕΔ λαμβάνεται θετική)

Κίνηση παράλληλη με το ρεύμα λαμβάνεται σαν $+IR$

Βρόχος abd – Διαγραφή αντίθετη με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού



Βρόχος abd – Διαγραφή αντίθετη με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού

Βρόχος bdc – Διαγραφή αντίθετη με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού

$$\mathcal{E}_1 - i_1 R_1 + i_3 R_3 = 0.$$

Έναλλακτικά

$$\sum E = \sum IR$$

$$E_1 = i_1 R_1 - i_3 R_3 \rightarrow E_1 - i_1 R_1 + i_3 R_3 = 0$$

$$-i_3 R_3 - i_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0.$$

Άσκηση 4.1

Μία ιδανική μπαταρία με ΗΕΔ 12V συνδέεται σε σειρά με θερμίστορ στα άκρα του οποίου η $V_\theta = aI + bI^2$, με $a=4\Omega$ και $b=1.2\Omega A^{-1}$ και με αντίσταση $R=6\Omega$. Να βρεθεί το ρεύμα που διαρέει το κύκλωμα και η αντίσταση του θερμίστορ.

Λύση

Το ρεύμα $I = \frac{E}{R_{ολ}}$ (1), και $R_{ολ}=R+R_{\theta}$ (2). Η R_{θ} βρίσκεται από τη σχέση

$$R_{\theta} = \frac{V_{\theta}}{I} = \frac{aI+bI^2}{I} = a + bI \quad (3). \text{ Από (1),(2),(3)}$$

$I = \frac{E}{R+R_{\theta}} = \frac{E}{R+a+bI} \rightarrow bI^2 + I(R+a) - E = 0$ (4) Από την (4) προκύπτουν δύο ρίζες $I_1=1.06\text{A}$ και $I_2=-9.3\text{A}$. Λόγω φοράς του ρεύματος επιλέγουμε την I_1 και η R_{θ}

$$R_{\theta}=a+bI_1$$

Άσκηση 4.2

Ένας πυκνωτής με φορτίο Q , διηλεκτρικό διηλεκτρικής σταθεράς K και ειδικής αντίστασης ρ , υφίσταται διάσπαση και διαρρέετε από ρεύμα . Να βρεθεί το ρεύμα διαρροής.

Λύση

Ισχύει στα άκρα του διηλεκτρικού $V_{ab}=IR(1)$ Επίσης $C = \frac{Q}{V_{ab}}$ (2), $R = \rho \frac{l}{A}$ (3), $C = \epsilon \frac{A}{l}$ (4), $K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ (5)

Όπου l η απόσταση ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή.

Από (1),(2),(3),(4),(5)

$$I=I = \frac{Q}{\rho \epsilon_0 K}$$

Άσκηση 4.3

Ο ορισμός του θερμικού συντελεστή ειδικής αντίστασης δίνεται από τη σχέση 4.16.

α) Εάν το α είναι σταθερό και πολύ μικρότερο από $(T-T_0)^{-1}$ τότε να αποδειχθεί η σχέση (4.15). Ισχύσει η προσέγγιση $e^x = 1 + x$, για μικρό x .

β) Εάν ο θερμικός συντελεστή ειδικής αντίστασης α εξαρτάται με τη σχέση $\alpha = -nT^{-1}$ όπου T η θερμοκρασία σε Κ, n μία σταθερά να βρεθεί η εξάρτηση της ρ από την θερμοκρασία.

Λύση

$$\alpha) \text{ Από την 4.16 προκύπτει, } \alpha dT = \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow \int_{T_0}^T \alpha dT = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow \alpha \int_{T_0}^T dT = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow \alpha(T - T_0) = \ln \frac{\rho}{\rho_0} \rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = e^{\alpha(T-T_0)} \rightarrow \rho = \rho_0 e^{\alpha(T-T_0)} \quad (1).$$

Για μικρό εύρος $(T-T_0)$, ισχύει η προσέγγιση,

$$e^{\alpha(T-T_0)} = 1 + \alpha(T - T_0) \quad (2). \text{ Από (1) και (2) προκύπτει}$$

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha(T - T_0)).$$

β) Έχουμε

$$-\frac{n}{T} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \rightarrow -\frac{n dT}{T} = \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow -n \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow -n \ln \frac{T}{T_0} \rightarrow \ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln \left(\frac{T_0}{T} \right)^n \rightarrow \rho = \frac{\rho_0 T_0^n}{T^n} \quad (3)$$

Εάν θέσουμε $b = \rho_0 T_0^n$ τότε η (3) γίνεται $\rho = b T^{-n}$, που είναι η εξάρτηση της ειδικής αντίστασης με την θερμοκρασία για τους ημιαγωγούς.

Άσκηση 4.4

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα μακρύ κυλινδρικό αγωγό του οποίου ο θερμικός συντελεστής της αντίστασης στους 30°C να είναι κοντά στο μηδέν. Εάν ένας τέτοιος αγωγός κατασκευάζεται από διαδοχικούς δίσκους Fe και C, ποιος είναι ο λόγος του πάχους των δίσκων εάν θεωρήσουμε ότι έχουν την ίδια διάμετρο; (

$$\text{Δίνεται } \rho_{\text{Fe}}^{30} = 10^{-7} \Omega\text{m}, \alpha_{\text{Fe}} = 5 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, \rho_{\text{C}}^{30} = 3.5 \times 10^{-5} \Omega\text{m}, \alpha_{\text{Fe}} = -5 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Λύση

$R_{ολ} = R_{Fe} + R_C = \rho_{Fe} \frac{l_{Fe}}{A} + \rho_C \frac{l_C}{A}$ (1). Εάν $a=0$ τότε $R = R_0(1+a\Delta T) = R_0$. Έτσι εμείς θέλουμε

$$\frac{dR_{ολ}}{dT} = 0 \rightarrow \frac{dR_{ολ}}{dt} = \frac{l_{Fe}}{A} \frac{d\rho_{Fe}}{dT} + \frac{l_C}{A} \frac{d\rho_C}{dT} \rightarrow l_{Fe} \frac{d\rho_{Fe}}{dT} + l_C \frac{d\rho_C}{dT} = 0 \quad (2)$$

Ισχύει,

$d\rho_C = \rho_{0C} a_C dT$ (3) και $d\rho_{Fe} = \rho_{0Fe} a_{Fe} dT$ (4). Από (2), (3), (4) έχουμε,

$$l_{Fe} \frac{\rho_{0Fe} a_{Fe} dT}{dT} + l_C \frac{\rho_{0C} a_C dT}{dT} = 0 \rightarrow l_{Fe} \rho_{0Fe} a_{Fe} + l_C \rho_{0C} a_C = 0 \rightarrow l_{Fe} \rho_{0Fe} a_{Fe} = -l_C \rho_{0C} a_C \rightarrow \frac{l_{Fe}}{l_C} = -\frac{\rho_{0C} a_C}{\rho_{0Fe} a_{Fe}} \quad (5). \text{ Ισχύει}$$

$$\rho_{Fe}^{30} = \rho_{0Fe} (1 + a_{Fe} dT) = \rho_{0Fe} (1 + a_{Fe} 30^{\circ}C) \quad (6)$$

$$\rho_C^{30} = \rho_{0C} (1 + a_C dT) = \rho_{0C} (1 + a_C 30^{\circ}C) \quad (7).$$

Από την 6 προκύπτει

$$\rho_{0Fe} = \frac{\rho_{Fe}^{30}}{(1 + a_{Fe} 30^{\circ}C)} \quad (8)$$

$$\rho_{0C} = \frac{\rho_C^{30}}{(1 + a_C 30^{\circ}C)} \quad (9)$$

Από (5),(8),(9) βρίσκεται ο λόγος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Στην αρχαιότητα παρατηρήθηκε το φαινόμενο κάποια ορυκτά να εμφανίζουν μεταξύ τους ελκτικές και απωστικές δυνάμεις ανάλογα με τον προσανατολισμό τους. Επίσης παρουσίαζαν ελκτικές δυνάμεις στον σίδηρο. Τα ορυκτά αυτά ονομάστηκαν μαγνήτες επειδή βρέθηκαν στην Μαγνησία της Μ. Ασίας και οι δυνάμεις που σχετίζονται με τους μαγνήτες ονομάστηκαν μαγνητικές δυνάμεις.

Επομένως υπάρχει εκτός της βαρυτικής και της ηλεκτρικής δύναμης μία άλλη δύναμη η μαγνητική. Ο χώρος ο οποίος είναι προικισμένος να ασκεί μαγνητικές δυνάμεις ονομάζεται μαγνητικό πεδίο. Όπως παρατηρήθηκε η Γη ασκεί μαγνητικές δυνάμεις σε μαγνητικές βελόνες. Το 1819 ο Hans Cristian Oersted παρατήρησε ότι ρευματοφόρος αγωγός ασκεί μαγνητικές δυνάμεις σε μαγνητική βελόνα και ότι ανάλογες δυνάμεις ασκούνται μεταξύ ρευματοφόρων αγωγών. Συνέπεια των πειραμάτων του Oersted ήταν να συνδεθούν οι μαγνητικές δυνάμεις και το μαγνητικό πεδίο με κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο. Έτσι κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο ευρισκόμενο μέσα σε μαγνητικό πεδίο δέχεται μαγνητική δύναμη. Επίσης κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο δημιουργεί μαγνητικό πεδίο.

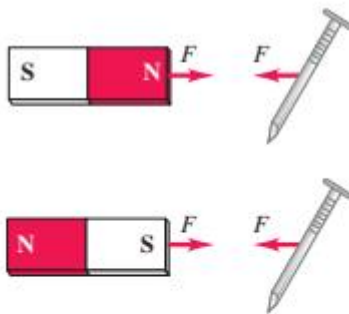
(a) Opposite poles attract.



(b) Like poles repel.

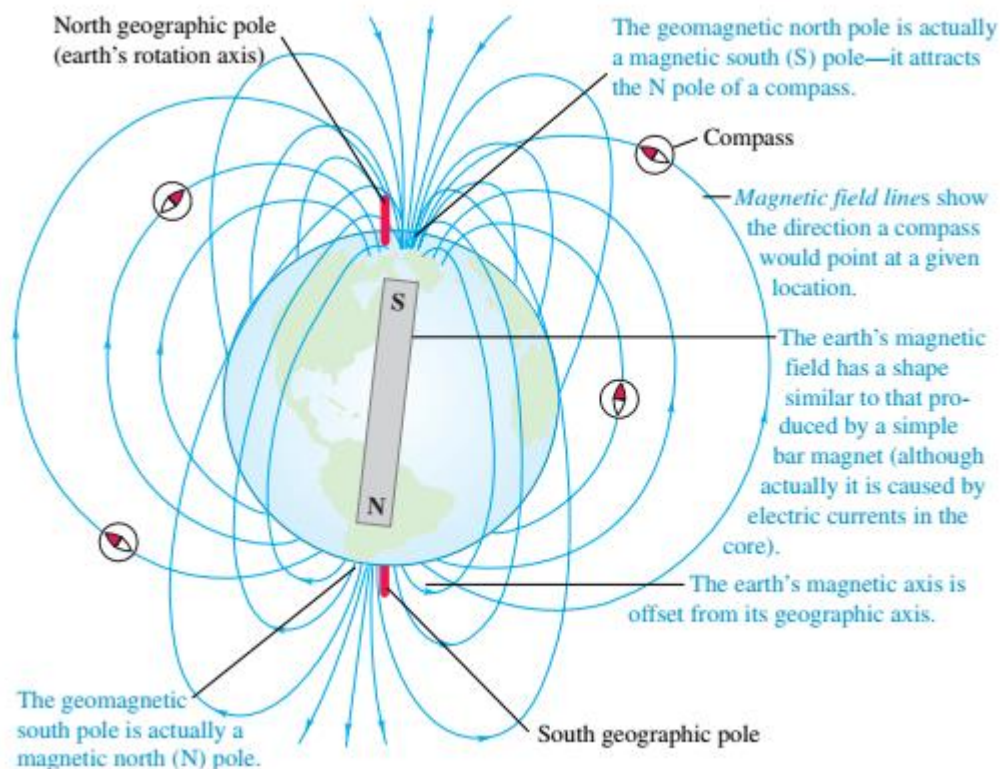


(a)



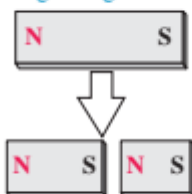
(b)





In contrast to electric charges, magnetic poles always come in pairs and can't be isolated.

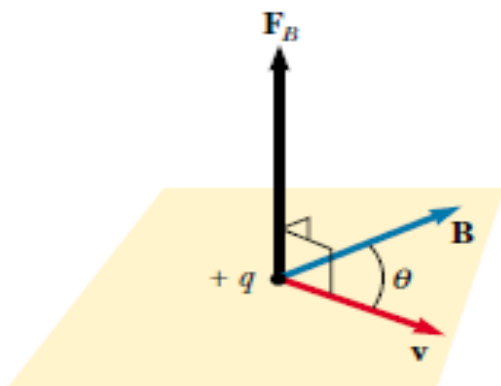
Breaking a magnet in two ...



... yields two magnets, not two isolated poles.

5.1 Μαγνητική Δύναμη

Έστω φορτίο q κινείται σε μαγνητικό πεδίο B με ταχύτητα v . Η μαγνητική δύναμη που δέχεται θα είναι (Σχήμα 5.1)



Σχήμα 5.1

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B};$$

(5.1)

με μέτρο

$$F_B = qvB\sin(\theta) \quad (5.2)$$

Εάν η ταχύτητα είναι κάθετη με το διάνυσμα B τότε η δύναμη παίρνει την μέγιστη τιμή

$$F_B = qvB \quad (5.3)$$

(a)

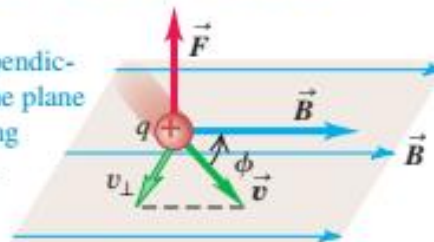
A charge moving **parallel** to a magnetic field experiences **zero magnetic force**.



(b)

A charge moving at an angle ϕ to a magnetic field experiences a magnetic force with magnitude $F = |q|v_{\perp}B = |q|vB \sin \phi$.

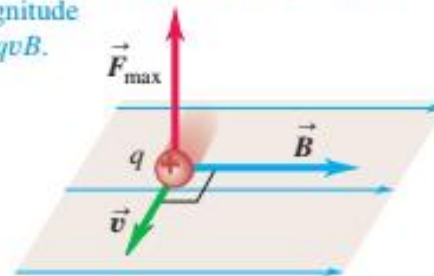
\vec{F} is perpendicular to the plane containing \vec{v} and \vec{B} .

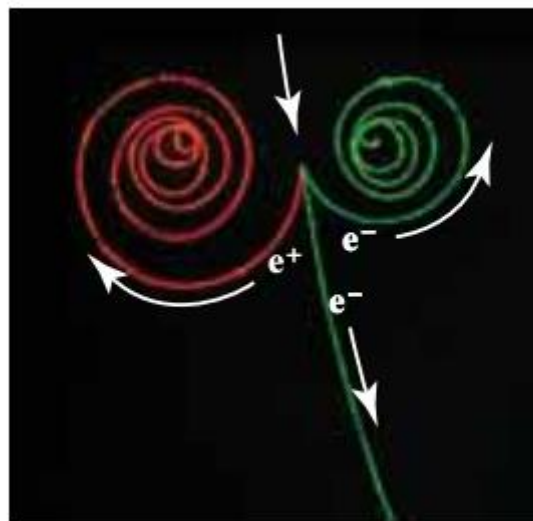
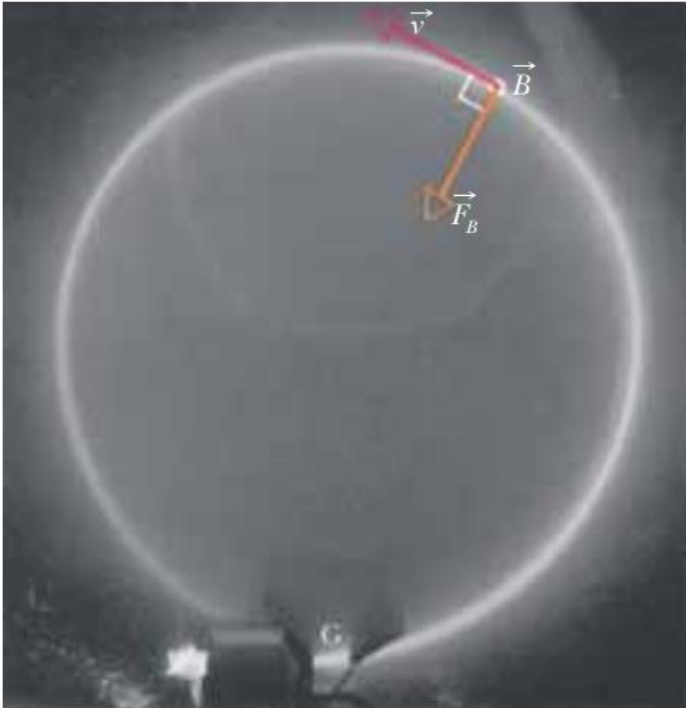


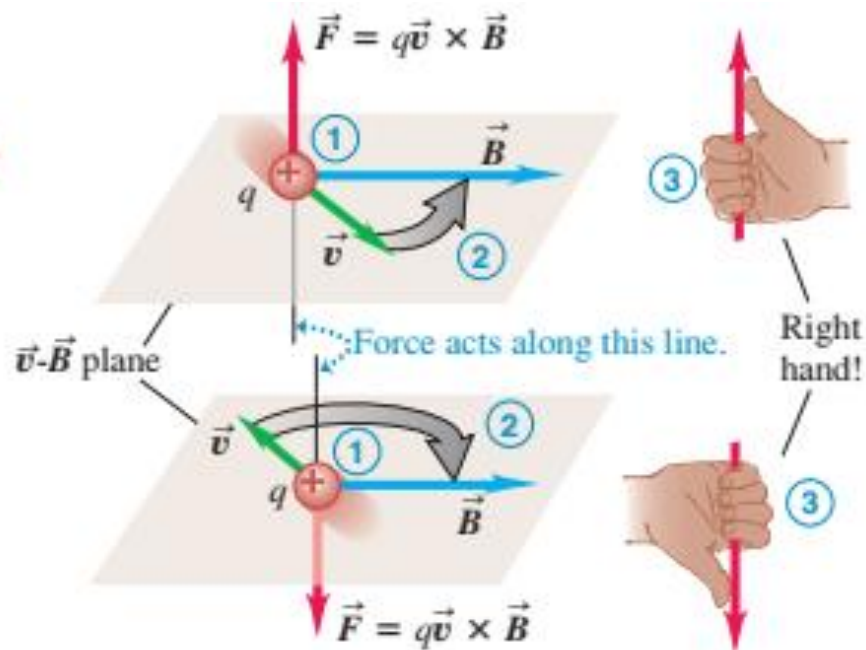
(c)

A charge moving **perpendicular** to a magnetic field experiences a maximal magnetic force with magnitude

$$F_{\max} = qvB.$$

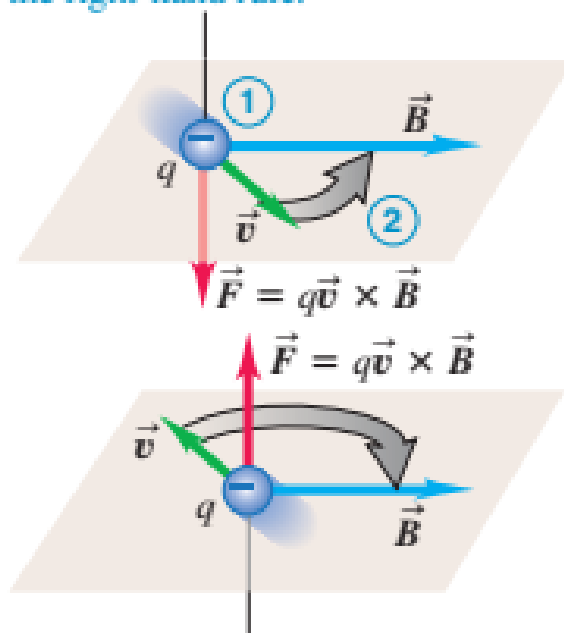


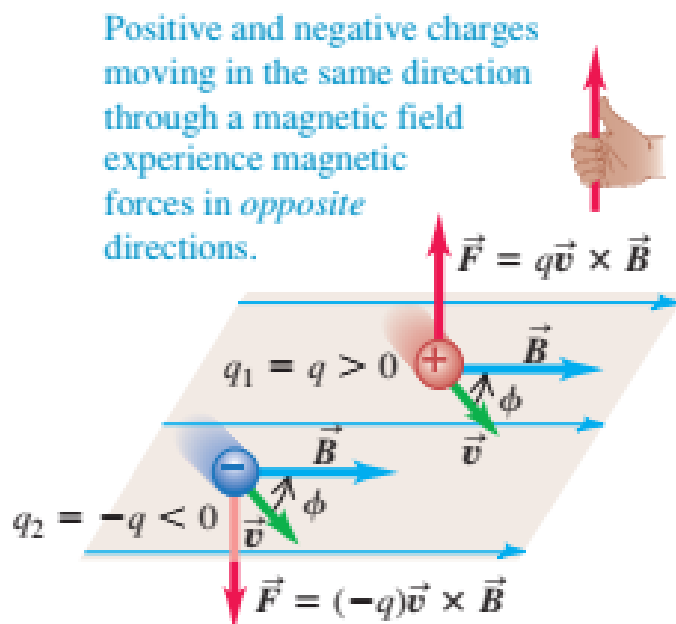




(b)

If the charge is negative, the direction of the force is *opposite* to that given by the right-hand rule.





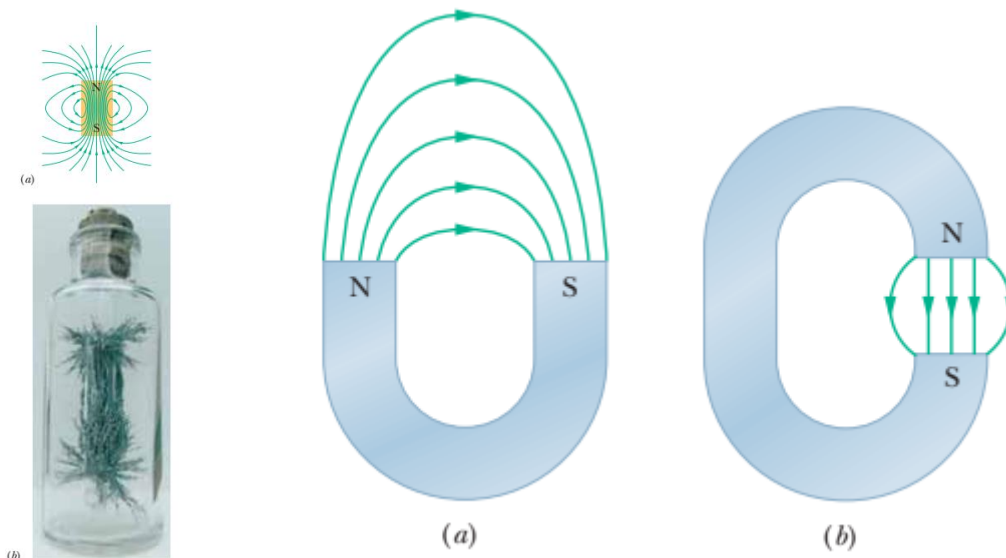
ενώ εάν είναι παράλληλη η δύναμη μηδενίζεται. Από τη σχέση (5.3) προκύπτει για το μαγνητικό πεδίο B ,

$$B = \frac{F}{qv} \quad (5.4)$$

Μονάδα μαγνητικού πεδίου είναι το 1T (Tesla) που ορίζεται από τη σχέση (5.4)

$1\text{T} = 1\text{NC}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s} = \text{NA}^{-1}\text{m}^{-1}$. Παλαιότερη μονάδα του μαγνητικού πεδίου είναι το 1Gauss. Ισχύει $1\text{T} = 10^4\text{Gauss}$.

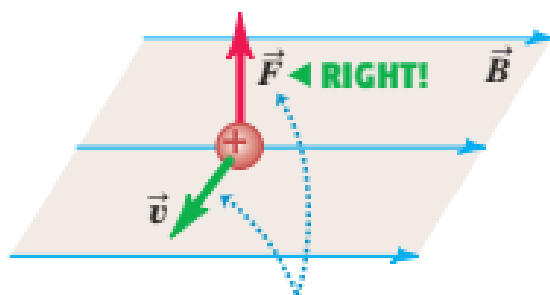
Το γεγονός ότι η μαγνητική δύναμη είναι πάντα κάθετη στη διεύθυνση της κίνησης σημαίνει ότι για τα στατικά μαγνητικά πεδία το έργο που παράγει η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι μηδέν



27.12 Magnetic field lines are *not* “lines of force.”



Magnetic field lines are *not* “lines of force.”
The force on a charged particle is not along the direction of a field line.



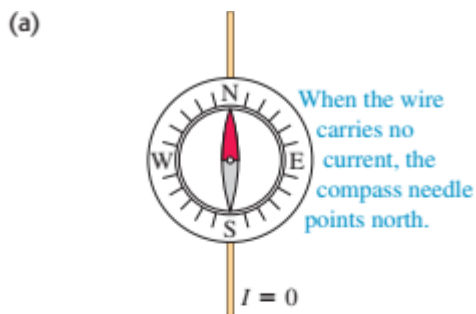
The direction of the magnetic force depends on the velocity \vec{v} , as expressed by the magnetic force law $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

Εάν ένα φορτίο κινούμενο με ταχύτητα v και βρίσκεται ταυτόχρονα σε ηλεκτρικό πεδίο έντασης E και σε μαγνητικό πεδίο B τότε η συνολική δύναμη που δέχεται είναι

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (5.5)$$

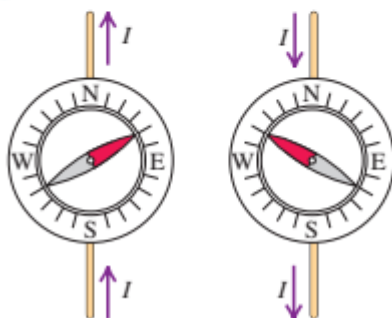
Η συνολική δύναμη λέγεται δύναμη Lorenz. Έτσι το φορτίο q δέχεται την ηλεκτρική δύναμη γιατί "είναι" φορτίο και την μαγνητική γιατί κινείται με ταχύτητα ολίσθησης v

ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ OERSTED



(b)

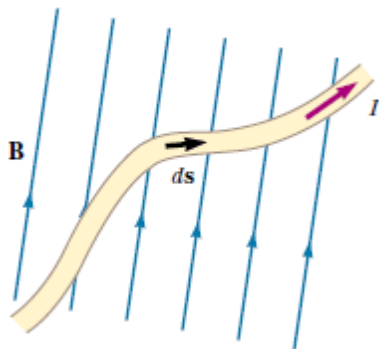
When the wire carries a current, the compass needle deflects. The direction of deflection depends on the direction of the current.



Εάν θεωρήσουμε ένα ρευματοφόρο αγωγό στοιχειώδους μήκους ds που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I και βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο B τότε η στοιχειώδης μαγνητική δύναμη που δέχεται δίνεται από τη σχέση (Σχήμα 5.2).

$$d\vec{F} = Id\vec{s} \times \vec{B} \quad (5.6)$$

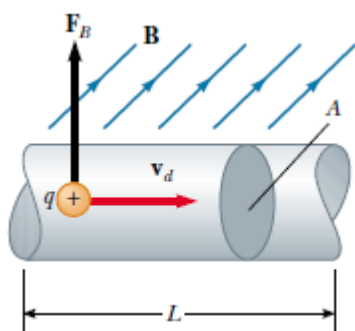
Το μέγεθος ds λαμβάνεται σαν διάνυσμα μέτρου ίσο με το μήκος του σύρματος και κατεύθυνση την φορά του ρεύματος.



Σχήμα 5.2

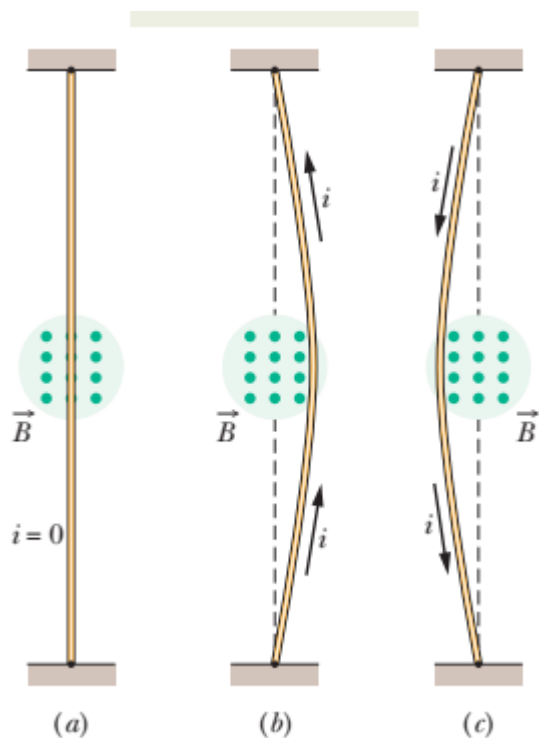
Εάν θεωρήσουμε ένα ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό μήκους L που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I και βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο B (Σχήμα 5.3). τότε η μαγνητική δύναμη που δέχεται δίνεται από τη ολοκλήρωση της σχέσης (5.6)

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} \quad (3.7)$$



Σχήμα 5.3

Το μέγεθος L λαμβάνεται σαν διάνυσμα μέτρου ίσο με το μήκος του σύρματος και κατεύθυνση την φορά του ρεύματος.



$$d\vec{F}_B = i d\vec{L} \times \vec{B},$$

5.2 Μαγνητική Ροή

Ανάλογα με την ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από μία επιφάνεια A ορίζεται και η αντίστοιχη μαγνητική ροή.

$$\Phi_B = \vec{B} \vec{A} \quad (5.8)$$

Μονάδα μαγνητικής ροής είναι το 1W (Weber),

$$1W = 1T1m^2$$

Ο αντίστοιχος νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό δίνεται από τη σχέση

$$\Phi_B = \oiint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (5.9)$$

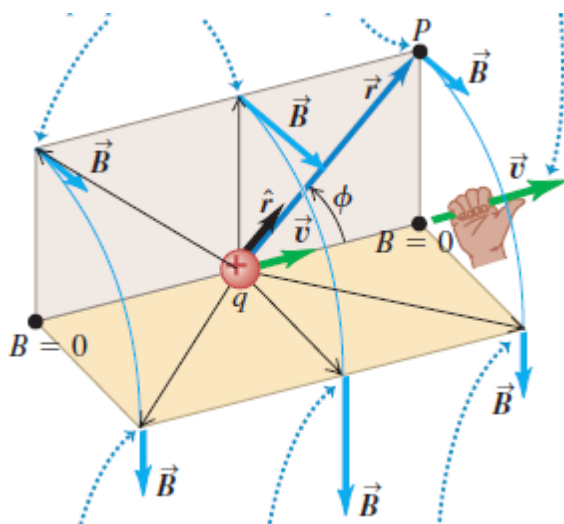
Το δεύτερο μέλος της σχέσης (5.9) είναι μηδέν. Αυτό είναι συνέπεια του ότι στη φύση δεν έχουν ανακαλυφθεί μαγνητικά μονόπολα.

Όπως αναφέρθηκε πριν η αιτία του μαγνητικού πεδίου είναι το κινούμενο φορτίο. Το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο \vec{B} σε ένα σημείο του χώρου P με διάνυσμα θέσης \vec{r} , που δημιουργείται από ένα φορτίο που κινείται με σταθερή ταχύτητα \vec{v} (Σχήμα 5.4)

δίνεται από τον νόμο **των Biot και Savart**

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad (5.10)$$

όπου μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού.

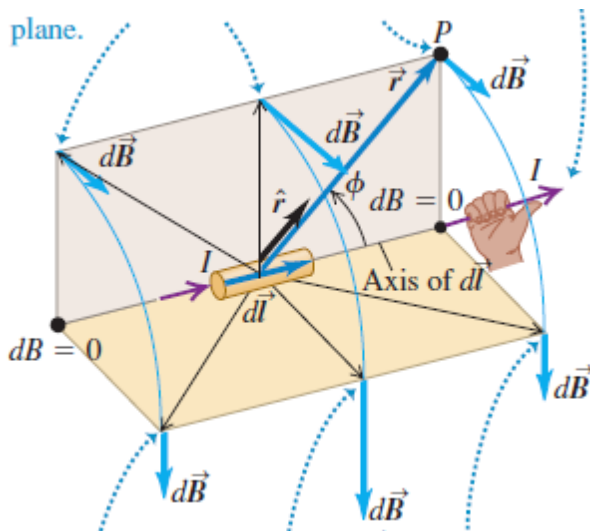


Σχήμα 5.4

Εάν θεωρήσουμε ένα ρευματοφόρο αγωγό στοιχειώδους μήκους dl που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I (Σχήμα 5.4) τότε το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο $d\vec{B}$ σε ένα σημείο του χώρου P με διάνυσμα θέσης \vec{r} , προκύπτει ως εξής.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (5.11)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

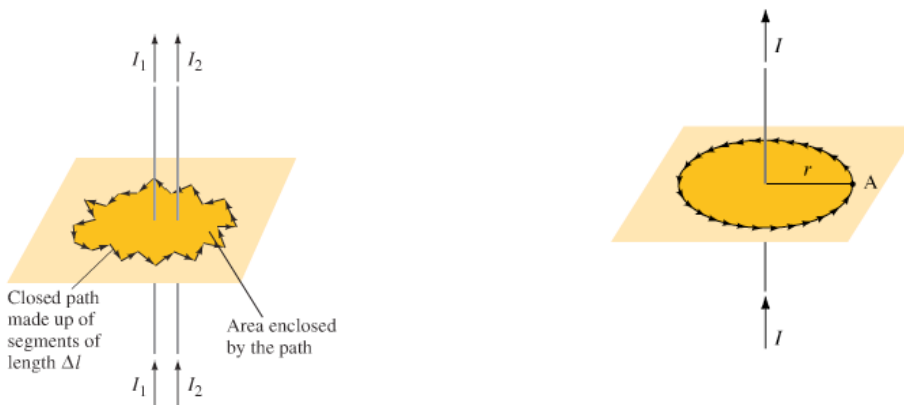


Σχήμα 5.4

5.3 Νόμος του Ampere

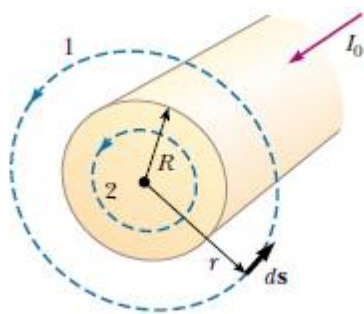
Επειδή ο νόμος των Biot και Savart είναι δύσχρηστος για τον υπολογισμό των μαγνητικών πεδίων χρησιμοποιούμε αντί αυτού τον νόμο του Ampere (Σχήμα 5.5)

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I \quad (5.12)$$



Ο νόμος του Ampere δηλώνει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γύρω από μία κλειστή καμπύλη που οριοθετεί μία επιφάνεια είναι ανάλογο της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος που περνάει μέσα από την επιφάνεια που οριοθετείται από την κλειστή καμπύλη.

Παράδειγμα εφαρμογής του νόμου του Ampere είναι ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου σε απόσταση r από ρευματοφόρο αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I_0 . (Σχήμα 5.6)



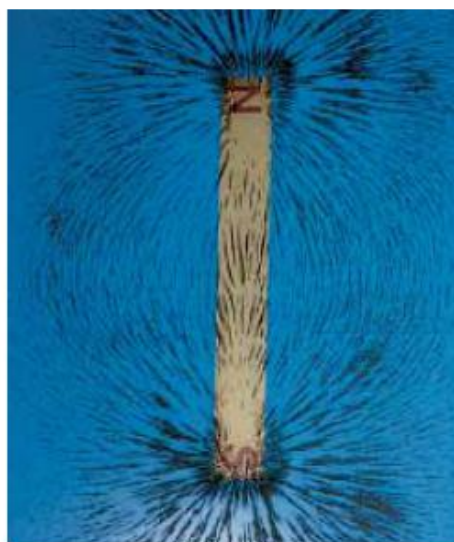
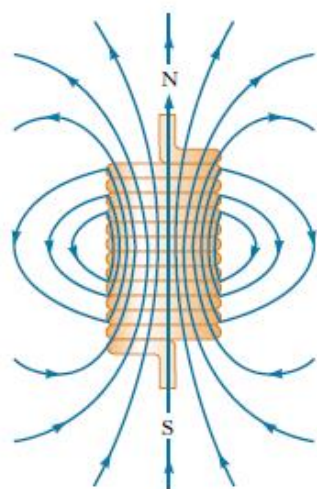
Σχήμα 3.6

$$\oint B ds = B \oint ds = B 2\pi r = \mu_0 I_0 \quad (5.13)$$

Από την (3.1.3) έχουμε

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad (5.14)$$

Εάν ένα σύρμα τυλιχθεί για να σχηματίσει σωληνοειδές πηνίο (Σχήμα 5.6)



Σχήμα 3.6

τότε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του πηνίου που διαρρέεται από ρεύμα I δίνεται από τη σχέση

$$B = \mu_0 n I \quad (5.15)$$

Όπου n είναι ο αριθμός των σπειρών ανά μονάδα μήκους.

Άσκηση 5.1

Δύο φορτία q_1 και q_2 κινούνται κατά την θετική κατεύθυνση x ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων xyz , με ταχύτητες v_1 και v_2 αντίστοιχα. Σε μια χρονική στιγμή η στιγμιαία θέση τους είναι τέτοια ώστε να απέχουν μεταξύ τους απόσταση r .

Να βρεθούν οι μαγνητικές δυνάμεις που ασκούνται ανάμεσα τους.

Λύση

Τα δύο φορτία σε μία χρονική στιγμή απέχουν κάθετη απόσταση r

Η μαγνητική δύναμη F_1 που θα δεχθεί το φορτίο 1 λόγω του μαγνητικού πεδίου B_2 που δημιουργεί το κινούμενο φορτίο 2 είναι

$$\mathbf{F}_1 = q_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2 \quad (1)$$

Το μαγνητικό πεδίο B_2 δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 q_2 v_2 x \mathbf{j}}{4\pi r^2} \quad (2).$$

Από (1) και (2) προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= q_1 \mathbf{v}_1 x \left[\frac{\mu_0 q_2 v_2 x \mathbf{j}}{4\pi r^2} \right] = \frac{q_1 q_2 \mu_0}{4\pi r^2} [\mathbf{v}_1 x (v_2 x \mathbf{j})] = \\ &= \frac{q_1 q_2 \mu_0}{4\pi r^2} [v_1 \mathbf{i} x (v_2 \mathbf{i} x \mathbf{j})] = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2}{4\pi r^2} [\mathbf{i} x (\mathbf{i} x \mathbf{j})] = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2}{4\pi r^2} (\mathbf{i} x \mathbf{k}) = \\ &= \frac{\mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2}{4\pi r^2} \mathbf{j} \quad (3) \end{aligned}$$

Ομοίως η δύναμη F_2 που δέχεται το φορτίο q_2 λόγω του μαγνητικού πεδίου λόγω του μαγνητικού πεδίου B_1 που δημιουργεί το κινούμενο φορτίο 1 είναι

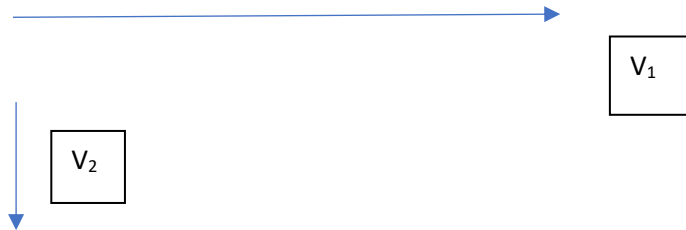
$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2}{4\pi r^2} \mathbf{j} \quad (4)$$

Άσκηση 5.2

Ένα φορτία q_1 κινείται κατά την θετική κατεύθυνση x ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων xyz , με ταχύτητα v_1 , ενώ ένα άλλο φορτίο q_2 κινείται με ταχύτητα v_2 κατά την αρνητική κατεύθυνση του άξονα y . Σε μια χρονική στιγμή η στιγμιαία θέση τους είναι τέτοια ώστε να απέχουν μεταξύ τους απόσταση r .

Να βρεθούν οι μαγνητικές δυνάμεις που ασκούνται ανάμεσα τους.

(Τα διανύσματα σημειώνονται με έντονα γράμματα BOLD)



Λύση

Τα δύο φορτία σε μία χρονική στιγμή απέχουν κάθετη απόσταση r

Το μαγνητικό πεδίο στην θέση που βρίσκεται το φορτίο q_1 λόγω της κίνησης του φορτίου q_2 είναι

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{j}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2 v_2 (-\mathbf{j}) \times \mathbf{j}}{r^2} = \mathbf{0} \quad (1),$$

άρα δεν υπάρχει μαγνητική δύναμη στο φορτίο q_1 .

Δηλαδή $\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$ (2)

Η μαγνητική δύναμη \mathbf{F}_2 που θα δεχθεί το φορτίο q_2 λόγω του μαγνητικού πεδίου \mathbf{B}_1 που δημιουργεί το κινούμενο φορτίο q_1 είναι

$$\mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1 \quad (3)$$

Το μαγνητικό πεδίο \mathbf{B}_1 δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 \mathbf{v}_1 \times (-\mathbf{j})}{r^2} = \frac{\mu_0 q_1 v_1 [i \times (-\mathbf{j})]}{4\pi r^2} = -\frac{\mu_0 q_1 v_2}{4\pi r^2} \mathbf{k} \quad (4).$$

Από (3) και (4),

$$\mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{v}_2 \times \frac{\mu_0 q_1 v_1}{4\pi r^2} (-\mathbf{k}) = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2 (-\mathbf{j}) \times (-\mathbf{k})}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2 \mathbf{i}}{4\pi r^2} \quad (5)$$

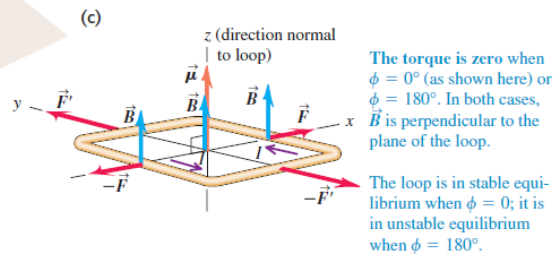
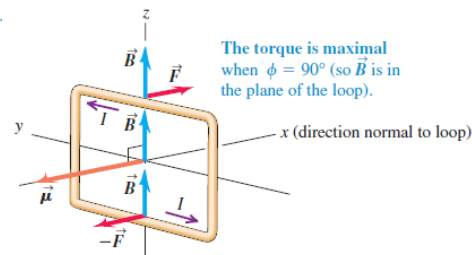
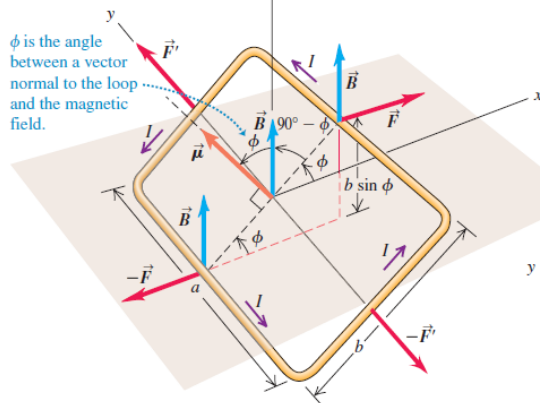
Όπως προκύπτει από τις σχέσεις (2) και (5) ενώ το φορτίο q_2 δέχεται μαγνητική δύναμη το φορτίο q_1 δεν δέχεται. **Φαίνεται να η αρχή δράσης αντίδρασης δηλαδή ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα να παραβιάζεται. Ο τρίτος νόμος στην μηχανική είναι ισοδύναμος με την αρχή διατήρησης της ορμής. Όταν τώρα είναι ταυτόχρονα παρόντα το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ο συνδυασμός αυτών των πεδίων μεταφέρει ορμή. για τον λόγο αυτό ένα ληφθεί υπόψιν αυτή η ορμή των πεδίων η αρχή διατήρησης της ορμής δεν παραβιάζεται.**

5.4 Δύναμη και ροπή σε κλειστό βρόχο ρεύματος

Στο σχήμα 3.7 ένας τετραγωνικός βρόχος διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα μέσα σε ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο.

The two pairs of forces acting on the loop cancel, so no net force acts on the loop.

However, the forces on the a sides of the loop (\vec{F} and $-\vec{F}$) produce a torque $\tau = (Iba)(b \sin \phi)$ on the loop.



Η συνισταμένη των δυνάμεων πάνω στο βρόχο είναι μηδέν

$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad (5.16)$$

Αλλά η συνολική μηχανική ροπή δεν είναι μηδέν. Η μηχανική ροπή $\vec{\tau}$ δίνεται από την σχέση

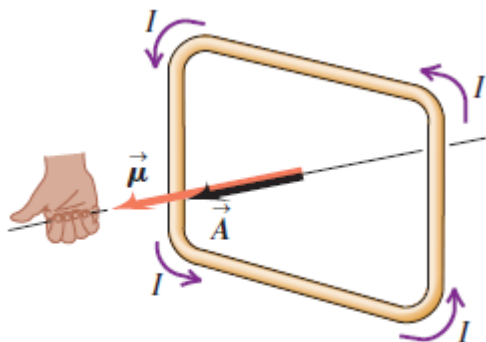
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (5.17)$$

Όπου μ είναι ένα μέγεθος που ονομάζεται **μαγνητική ροπή** ή **μαγνητική διπολική ροπή** του βρόχου και είναι το ισοδύναμο του ηλεκτρικού διπόλου στον μαγνητισμό. Αυτή ορίζεται ως (Σχήμα 5.8)

$$\vec{\mu} = I\vec{A}$$

$$, p = lq$$

$$, \tau = r \times F$$



Σχήμα 5.8

Με μέτρο

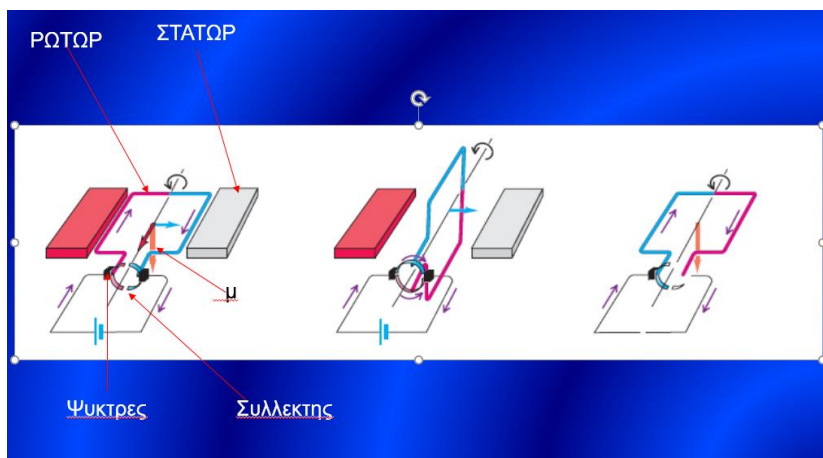
$$\mu = IA \quad (5.19)$$

όπου I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον βρόχο και A η επιφάνεια που ορίζει ο βρόχος.

Το μέτρο της μηχανικής ροπής δίνεται από τη σχέση

$$\tau = IAB \sin \varphi \quad (5.20)$$

Εφαρμογή της μαγνητικής ροπής έχουμε στον ηλεκτροκινητήρα συνεχούς ρεύματος. Η λειτουργία του παριστάνεται στο σχήμα 5.9.



Σχήμα 5.9.

Ένας κλειστός αγωγίμος βρόχος διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα ευρισκόμενος μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Ο κινούμενος βρόχος ονομάζεται ρωτορ. Στον ρωτορα υπάρχουν εγκοπές παράλληλα με την επιφάνεια του στις οποίες είναι στερεωμένοι μονωμένοι χάλκινοι αγωγοί. Αυτοί διαρρέονται από ρεύμα που περνά από δύο ψυκτρες από γραφίτη όταν αυτές κάνουν επαφή με ένα κύλινδρο τον συλλέκτη. Επειδή το ρεύμα είναι σταθερό ο ρωτορας λόγω της μηχανικής ροπής θα βρεθεί στην ενδιάμεση θέση κατακόρυφα και θα ταλαντώνεται γύρω από αυτή την θέση. Όμως όταν τα δύο τμήματα του συλλέκτη έρχονται σε επαφή με των αγωγό δεν υπάρχει διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα δύο τμήματα του συλλέκτη, στιγμιαία διακόπτεται το ρεύμα, μηδενίζεται η μηχανική ροπή αλλά λόγω αδράνειας ο ρωτορ συνεχίζει να περιστρέφεται και το ρεύμα αρχίζει πάλι να διαρρέει τον βρόχο έτσι ώστε τελικά βρόχος να περιστρέφεται.

Μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί μία σπείρα

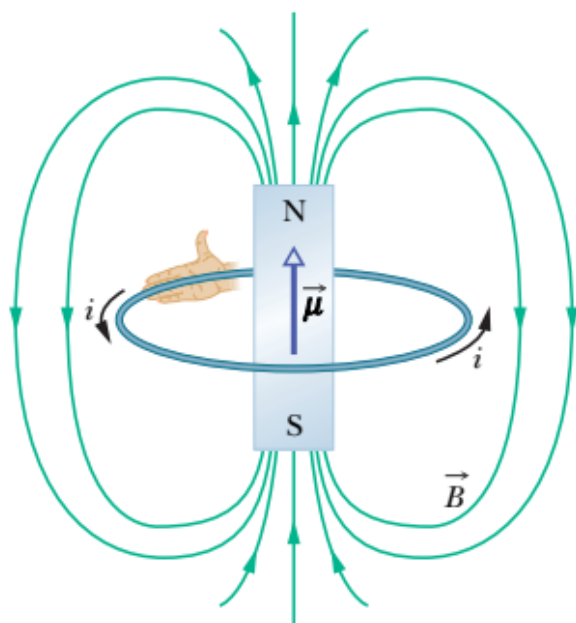
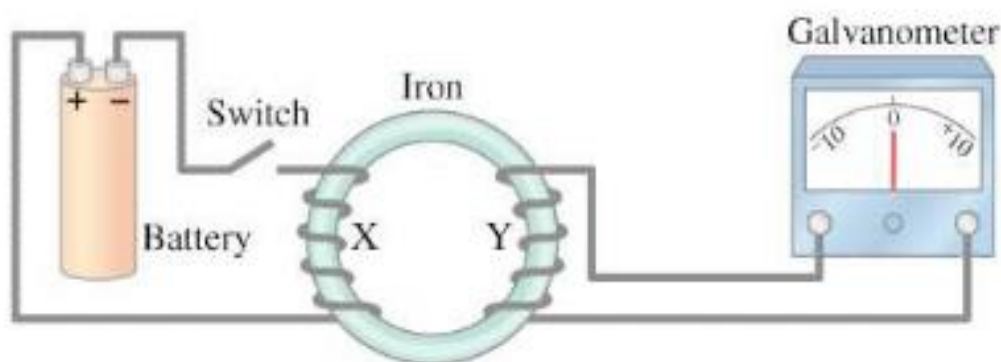


Fig. 29-21 A current loop produces a magnetic field like that of a bar magnet and thus has associated north and south poles. The magnetic dipole moment $\vec{\mu}$ of the loop, its direction given by a curled–straight right-hand rule, points from the south pole to the north pole, in the direction of the field \vec{B} within the loop.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

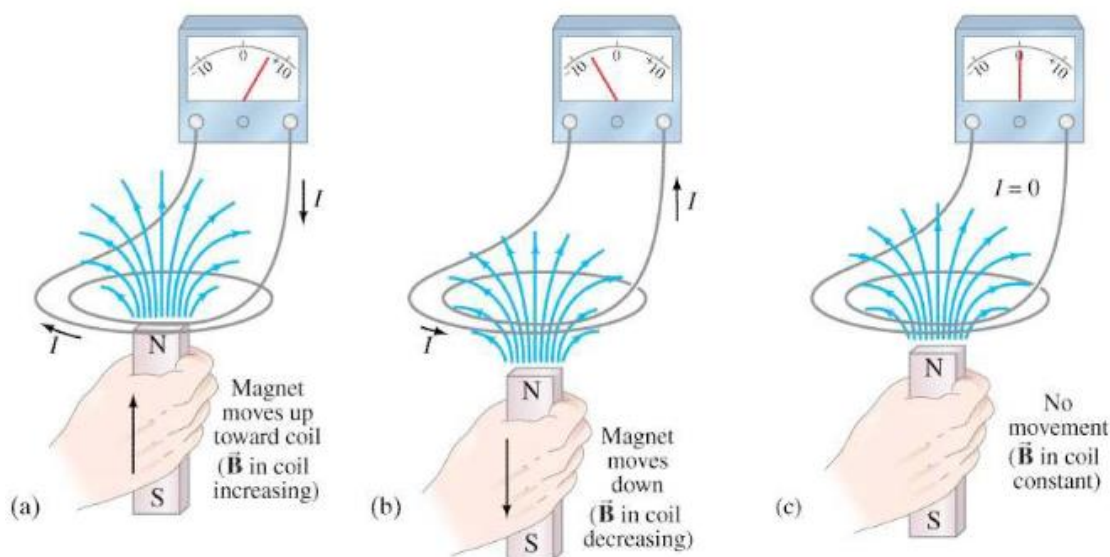
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Το 1830 ο Michael Faraday παρατήρησε η μεταβολή του ηλεκτρικού ρεύματος προκαλεί μεταβολή μαγνητικού πεδίου σε ένα πρωτεύον πηνίο. Αυτή η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου και όσο διαρκεί αυτή προκαλεί – επάγει ένα ηλεκτρικό ρεύμα στο δευτερεύον πηνίο (Σχήμα 6.1).



Σχήμα 4.1

Ανάλογα φαινόμενα έχουμε όταν μεταβληθεί η ροή των μαγνητικών γραμμών μέσα από ένα αγωγίμο βρόχο (Σχήμα 6.2).



Σχήμα 6.2.

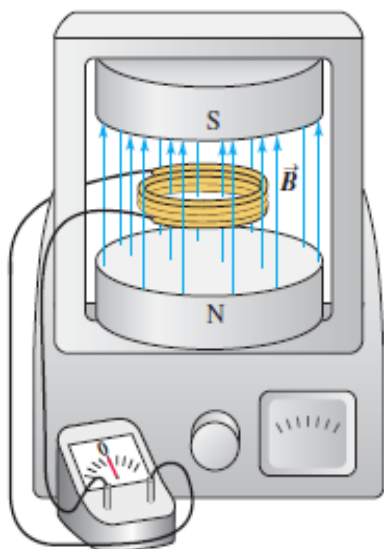
Αυτό το ρεύμα ονομάζεται **επαγόμενο ρεύμα** ή **ρεύμα εξ επαγωγής** και η ΗΕΔ που προκαλεί αυτό το επαγόμενο ρεύμα **επαγόμενη ΗΕΔ** ή **ΗΕΔ εξ επαγωγής**.

6.1 Ο νόμος του Faraday

Στο Σχήμα 4.3 παριστάνεται ένα πηνίο μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο. Επαγόμενο ρεύμα μπορεί να προκληθεί.

1. Από μεταβολή της έντασης του ρεύματος
2. Από μεταβολή του μαγνητικού πεδίου
3. Από αλλαγή του σχήματος του πηνίου
4. Με μετακίνηση του πηνίου μέσα στο μαγνητικό πεδίο
5. Με στροφή του πηνίου μέσα στο μαγνητικό πεδίο
6. Με πρόσθεση ή αφαίρεση σπειρών στο πηνίο.
7. Το επαγόμενο ρεύμα δεν εξαρτάται από το υλικό του πηνίου πάρα μόνο από το σχήμα του και το μαγνητικό πεδίο.

$$\Phi = BA \cos \varphi$$



$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{dB}{dt} A \cos \varphi + B \frac{dA}{dt} \cos \varphi + BA \frac{d\cos \varphi}{dt}$$

Μεταβολή Μαγνητικού Πεδίου Μεταβολή Επιφάνειας Στροφή Επιφάνειας

Τα ανωτέρω αποτελέσματα ο Faraday τα συνόψισε στην σχέση

$$E = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (6.2).$$

Η σχέση 4.2 αποτελεί τον **νόμο του Faraday** για την ηλεκτρομαγνητική επαγωγή. Ο νόμος επαγωγής του Faraday ορίζει ότι

Η επαγόμενη σε ένα κύκλωμα ΗΕΔ ισούται με το αρνητικό του ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής ροής που διαπερνά το κύκλωμα.

$$E = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

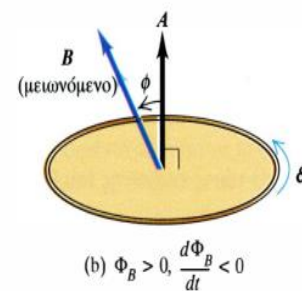
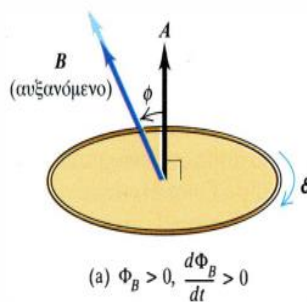
Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει τον **νόμο του Lenz**. Σύμφωνα με το νόμο του Lenz κάθε επαγωγικό φαινόμενο τείνει να αντιστεθεί στο φαινόμενο που το προκάλεσε. Αυτό είναι απόρροια της αρχής διατήρησης της ηλεκτρικής ενέργειας. Ο νόμος του Lenz ορίζει ότι

Η φορά οποιουδήποτε μαγνητικό φαινομένου επαγωγής είναι τέτοια ώστε να αντιστεθεί στο αίτιο που το προκάλεσε.

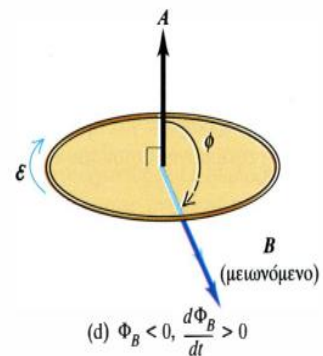
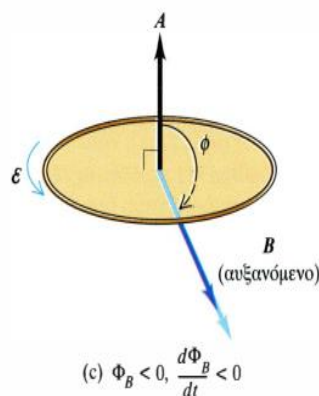
- Εάν το αίτιο είναι η κίνηση αγωγού μέσα σε μαγνητικό πεδίο τότε η φορά του επαγόμενου ρεύματος θα είναι τέτοια ώστε η αναπτυσσόμενη μαγνητική δύναμη να έχει κατεύθυνση αντίθετη της κίνησης του αγωγού.
- Εάν το αίτιο είναι η μεταβαλλόμενη ροή σε ακίνητο κύκλωμα το ρεύμα δημιουργεί το δικό του μαγνητικό πεδίο. Αυτό το πεδίο θα έχει αντίθετη κατεύθυνση από το αρχικό μαγνητικό πεδίο αν το αρχικό πεδίο αυξάνει και την ίδια κατεύθυνση αν το αρχικό πεδίο μειώνεται.
- Για να υπάρξει επαγόμενο ρεύμα, απαιτείται πλήρες κύκλωμα. Αν ένας αγωγός δεν σχηματίζει πλήρες κύκλωμα, τότε μπορούμε να το συμπληρώσουμε νοητά μεταξύ των άκρων του αγωγού και να χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Lenz για να καθορίσουμε τη φορά του ρεύματος. Τότε μπορούμε να βρούμε την πολικότητα στα άκρα του αγωγού που είναι ανοικτό κύκλωμα.

ΦΟΡΑ ΕΠΑΓΟΜΕΝΗΣ ΗΕΔ

1. Ορίζουμε την θετική κατεύθυνση του διανύσματος A που καθορίζει την επιφάνεια.
2. Το πρόσημο της μαγνητικής ροής και του ρυθμού μεταβολής της καθορίζεται από της κατευθύνσεις του A και B
3. $E = -\frac{d\Phi}{dt}$, $E > 0$ φορά αντίθετη των δεικτών, $E < 0$ φορά ίδια με των δεικτών

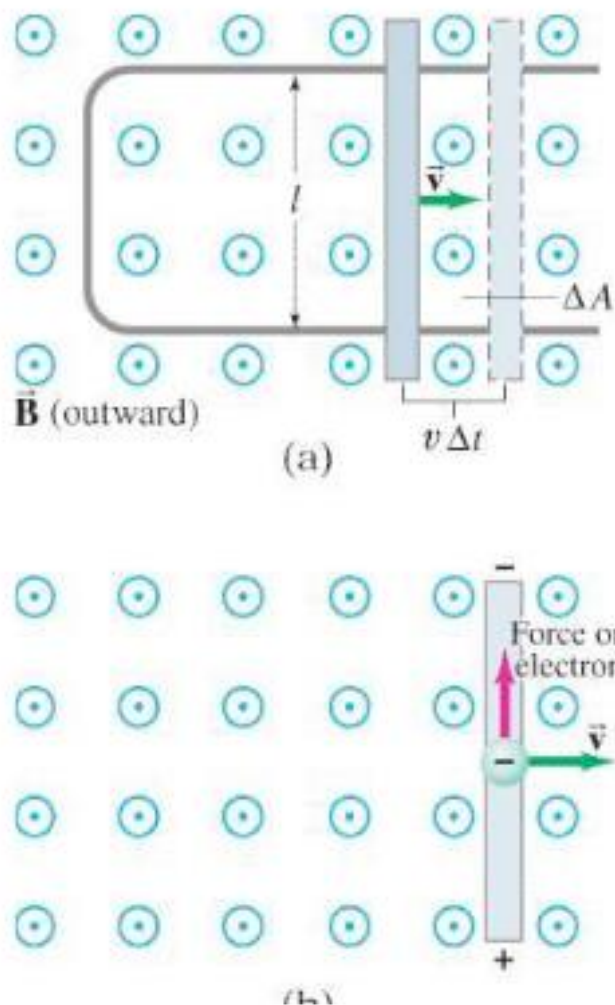


30-4 Η μαγνητική ροή είναι (a) θετική και αυξάνει, (b) θετική και μειώνεται, (c) αρνητική και μειώνεται και (d) αρνητική και αυξάνει. Άρα η Φ_B αυξάνει στις περιπτώσεις (a) και (d) και μειώνεται στις (b) και (c). Στις (a) και (d) οι ΗΕΔ είναι αρνητικές (έχουν τη φορά των δεικτών του ρολογιού αν τις παρατηρήσουμε από πάνω), ενώ στις (b) και (c) είναι θετικές (έχουν φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού).



6.2 Επαγόμενη ΗΕΔ λόγω κίνησης.

ΗΕΔ εξ επαγωγής μπορεί να προκληθεί λόγω της κίνησης ενός αγωγού μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Η διαδικασία παριστάνεται στο Σχήμα 4.4.



Σχήμα 6.4

Καθώς η ράβδος κινείται πάνω στον αγώγιμο δρόμο σχήματος U η επιφάνεια μεταβάλλεται άρα μεταβάλλεται και η μαγνητική ροή μέσα από την επιφάνεια. Μπορούμε να γράψουμε

$$E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{BdA}{dt} = -\frac{Blvdt}{dt} = -Bvl \quad (6.3)$$

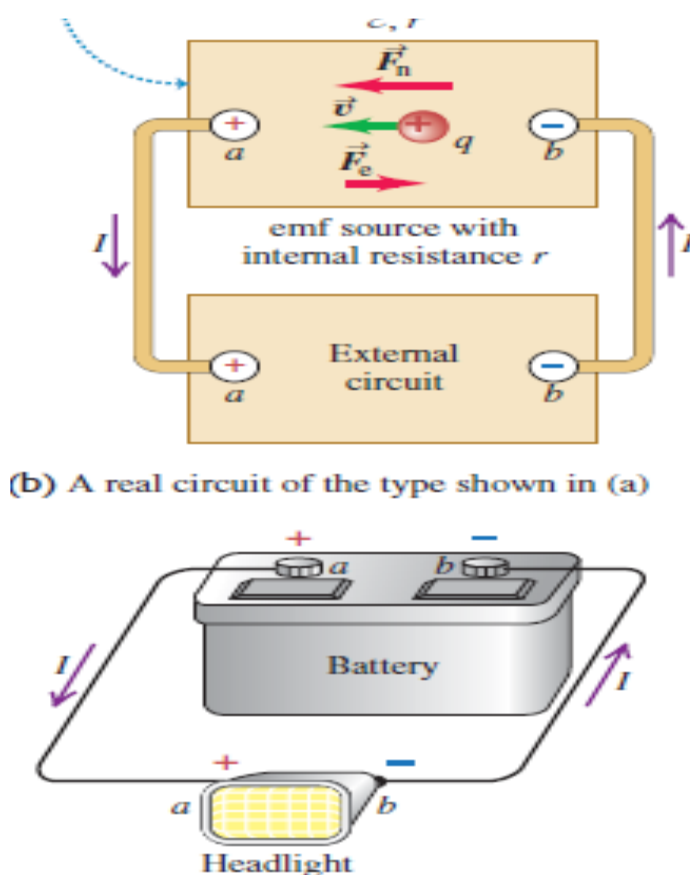
Το (-) στην σχέση 4.3 θα καθορίσει την πολικότητα της E σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz.

6.3 Επαγόμενη ANTI ΗΕΔ σε ηλεκτροκινητήρα

Κατά την λειτουργία του ο ηλεκτροκινητήρας παράγει αντι ΗΕΔ. Σε μία πηγή τάσης με εσωτερική αντίσταση r η διαφορά δυναμικού ή πολική τάση V_{ab} ΗΕΔ της πηγής δίνεται από την σχέση

$$V_{ab} = E - Ir \quad (6.4)$$

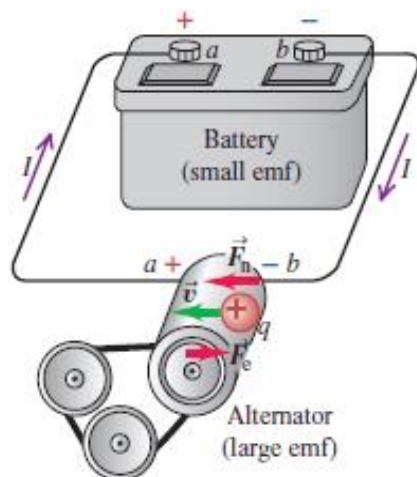
Όπου E είναι η ΗΕΔ της πηγής. Η διάταξη φαίνεται στο σχήμα 6.5



Η ισχύς που παρέχει η πηγή δίνεται από την σχέση

$$P = V_{ab} I = EI - Ir^2 \quad (6.5)$$

Ισχύς εξόδου πηγής = ρυθμός μετατροπής μη Ηλεκτρικής ενέργειας σε ηλεκτρική + ενέργεια που καταναλώνεται στην r



Σχήμα 6.5.

Σε ένα ηλεκτροκινητήρα ο ρότωρ περιστρεφόμενος μέσα στο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από της σπείρες του πηνίου με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μία ANTI ΗΕΔ E . Ονομάζεται ANTI ΗΕΔ γιατί το επαγωγικό ρεύμα που δημιουργεί σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz αντιτίθεται στο ρεύμα του κυκλώματος.

Για την πολική τάση ενός σειριακού ηλεκτροκινητήρα θα ισχύει

$$V_{ab}=E+Ir \quad (6.6.a)$$

Επειδή η ANTI ΗΕΔ E είναι ανάλογη της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής ω έπεται ότι αυτή δεν είναι σταθερή.

$$P=EI+Ir^2 \quad (6.6.β)$$

Ισχύς εισόδου πηγής= ρυθμός μετατροπής Ηλεκτρικής ενέργειας μη ηλεκτρική + ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας στην r

Άσκηση 6.1

Ένας ηλεκτροκινητήρας συνεχούς ρεύματος έχει $r=4\Omega$. Όταν λειτουργεί με πλήρες φορτίο σε μία γραμμή 220V τραβάει ρεύμα 4A. α) Ποια η ΗΕΔ του κινητήρα β) Πόση ισχύ παρέχεται στον κινητήρα γ) Ποιος είναι ο ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας στην αντίσταση του κινητήρα; δ) Πόση είναι η μηχανική ισχύς ε) Ποια είναι η απόδοση του κινητήρα; στ) τι θα συμβεί αν λόγω εμπλοκής ο κινητήρας σταματήσει να λειτουργεί;

α) $V_{ab}=E +Ir$.

Έχουμε

$$220V=E+16A\Omega \rightarrow E=204V$$

β) Η ισχύς εισόδου P από την πηγή είναι

$$P=V_{ab}I=220V4A=880W.$$

γ) Η ισχύς P' που καταναλίσκεται στην αντίσταση r είναι

$$P'=I^2r=(4A)^2(4\Omega)=64W$$

$$\delta) P_{\mu}=880W-64W=816W$$

$$\epsilon) e = \frac{816W}{880W} 100 = 93\%$$

στ) Στην περίπτωση αυτή επειδή $\omega=0$ η $E=0$. Τότε

$$I = \frac{V_{ab}}{r} = \frac{220V}{4\Omega}=55A$$

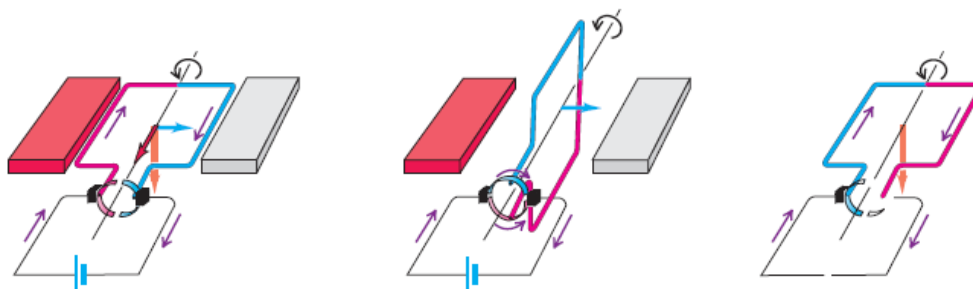
Και η καταναλισκόμενη ισχύς P

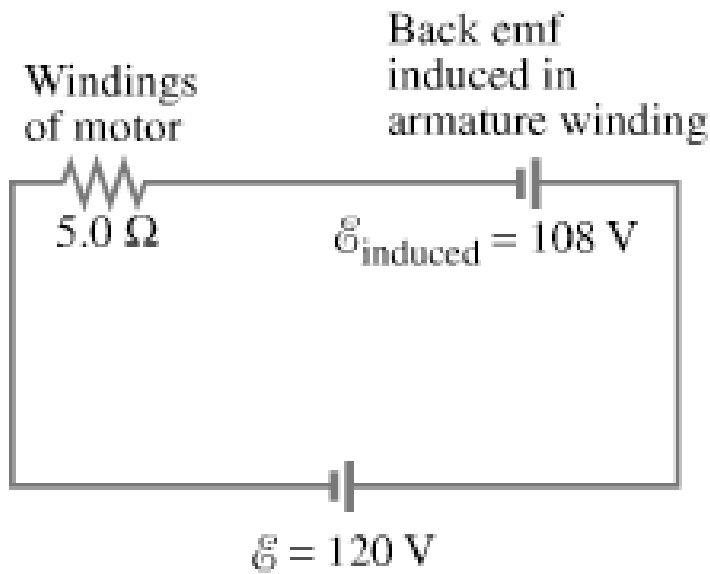
$$P=I^2r=(55A)^2 4\Omega=12100W$$

Αυτή είναι μία τεράστια υπερφόρτωση. Όταν ο κινητήρας τίθεται σε λειτουργία υπάρχει μία ξαφνική αύξηση του ρεύματος μέχρι να αποκτήσει σταθερή ταχύτητα.

Άσκηση 6.2

Να βρεθεί το ρεύμα εκίνησης και το ρεύμα κόρου στον κινητήρα του Σχήματος 4.7 όταν η ΗΕΔ είναι $E=120V$, ANTI ΗΕΔ είναι $E_{ind}=108V$ και η εσωτερική αντίσταση $r=5\Omega$.





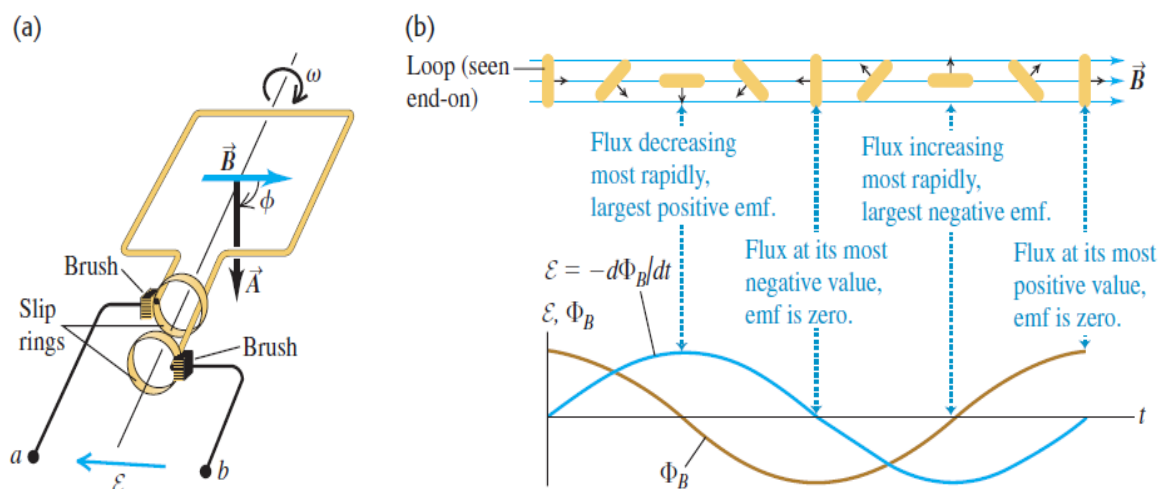
Σχήμα 4.7

$$\alpha) I = \frac{E}{r} = \frac{120V}{5\Omega} = 24A$$

$$\beta) I = \frac{E - E_{ind}}{r} = \frac{120V - 108V}{5\Omega} = 2,4A$$

6.4 Ηλεκτρική γεννήτρια – Δυναμό

Εάν ένα κλειστός αγωγικός βρόχος περιστραφεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο τότε λόγω της μεταβολής της μαγνητικής ροής δημιουργείται ΗΕΔ εξ επαγωγής (Σχήμα 4.8)



Σχήμα 6.8

Η ΗΕΔ εξ επαγωγής δίνεται από την σχέση

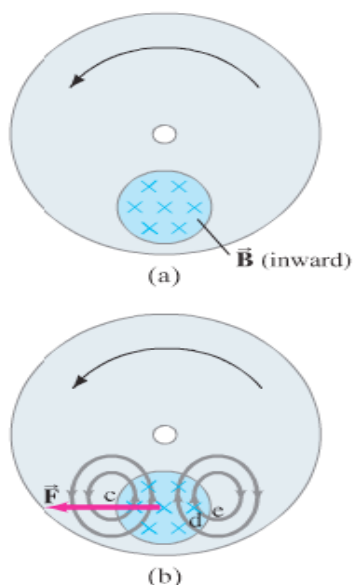
$$E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA\cos(\omega t)) = \omega B A \sin(\omega t) \quad (6.7)$$

Κατά την λειτουργία της γεννήτριας δημιουργείται **μηχανική αντιροπή**. Στην πραγματικότητα σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz πρέπει να δημιουργηθεί ένας μηχανισμός που θα αντιτίθεται στην μεταβολή της μαγνητικής ροής μέσα από το πλαίσιο. Εάν η γεννήτρια είναι συνδεδεμένη με φορτίο τότε το κύκλωμα είναι κλειστό και διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Το ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο. Έχουμε δηλαδή ένα ρευματοφόρο πλαίσιο μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Το πλαίσιο δέχεται μηχανική αντιροπή.

6.5 Δινορεύματα – Eddy currents

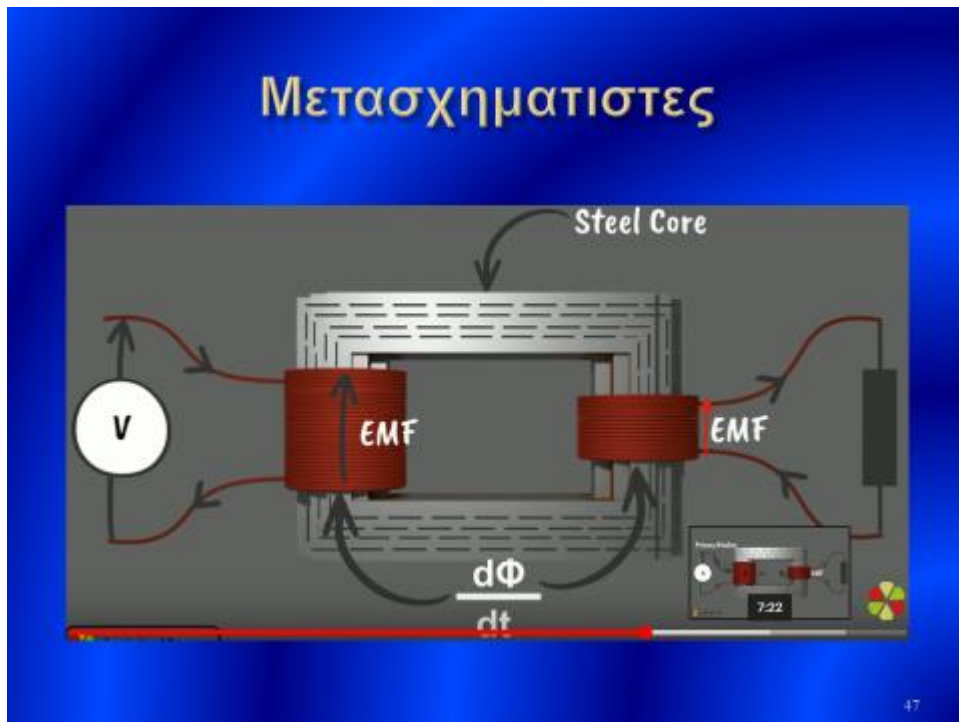
Σε κομμάτια μετάλλου που κινούνται μέσα σε μαγνητικά πεδία ή βρίσκονται μέσα σε μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία δημιουργούνται επαγωγικά ρεύματα μέσα στον όγκο του υλικού (Σχήμα 6.9). Επειδή οι εικόνες τους παραπέμπουν σε δίνες ονομάζονται δινορεύματα. Στον σιδηροπυρήνα ενός μετασχηματιστή εναλλασσόμενου ρεύματος δημιουργούνται ανεπιθύμητα δινορεύματα διότι παράγουν θερμότητα λόγω φαινομένου Joule. Τα δινορεύματα που δημιουργούνται σε

πραγματικούς μετασχηματιστές περιορίζονται σημαντικά με τη χρήση φυλλωτού πυρήνα, δηλαδή ενός σιδηροπυρήνα που αποτελείται από λεπτά φύλλα. Τα δινορεύματα έχουν πολλές πρακτικές χρήσεις όπως είναι η πέδηση λόγω δινορευμάτων σε ζυγούς, σε περιστρεφόμενες μηχανές και στα γρήγορα τρένα. Δινορεύματα προκαλούν την περιστροφή του μεταλλικού δίσκου στους μετρητές κατανάλωσης ηλεκτρικής ενέργειας (της ΔΕΗ) που υπάρχουν στα σπίτια. Τα ρεύματα αυτά επάγονται στον δίσκο από τα μαγνητικά πεδία που προκαλούν τα ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενα ρεύματα σε ένα πηνίο. Στους φούρνους επαγωγής, τα δινορεύματα χρησιμοποιούνται για να θερμάνουν υλικά σε πλήρως σφραγισμένα δοχεία για χρήσεις στις οποίες είναι απαραίτητο να αποφευχθεί έστω και η ελάχιστη μόλυνση των υλικών. Τέλος, οι γνώριμοι μεταλλικοί ανιχνευτές λειτουργούν ανιχνεύοντας δινορεύματα που επάγονται σε μεταλλικά αντικείμενα.



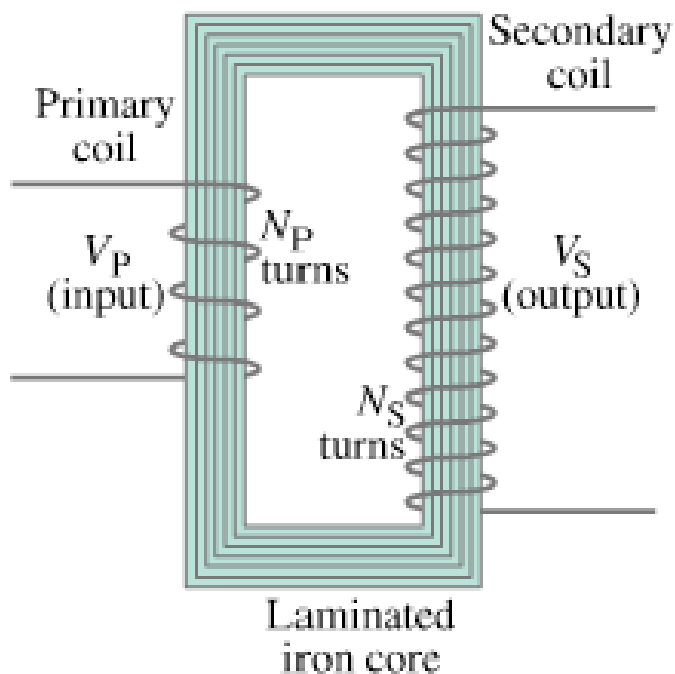
6.6 Μετασχηματιστές.

Στους μετασχηματιστές εκμεταλλευόμαστε το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής για την ανύψωση ή τον υποβιβασμό της τάσης. Η λειτουργία ενός μετασχηματιστή παριστάνεται στο Σχήμα 4.10.



Σχήμα 6.10

Εάν θεωρήσουμε ότι το πρωτεύον πηνίο έχει N_p σπείρες και το δευτερεύον N_s σπείρες (Σχήμα 6.11) και η ΗΕΔ για το πρωτεύον είναι E_p και E_s για το δευτερεύον τότε



Σχήμα 6.11

Εάν δεν υπάρχει φορτίο θα ισχύει $E_p = V_p$ και $E_s = V_s$ όπου V_p και V_s οι διαφορές δυναμικού στο πρωτεύον και το δευτερεύον αντίστοιχα. Τότε θα έχουμε

$$E_s = V_s = -N_s \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (6.8)$$

$$E_p = V_p = -N_p \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (6.9)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (4.8) και (4.9) προκύπτει

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p} \quad (6.10)$$

Δηλαδή ο λόγος των τάσεων είναι ανάλογος του λόγου των σπειρών. Επίσης θα ισχύει

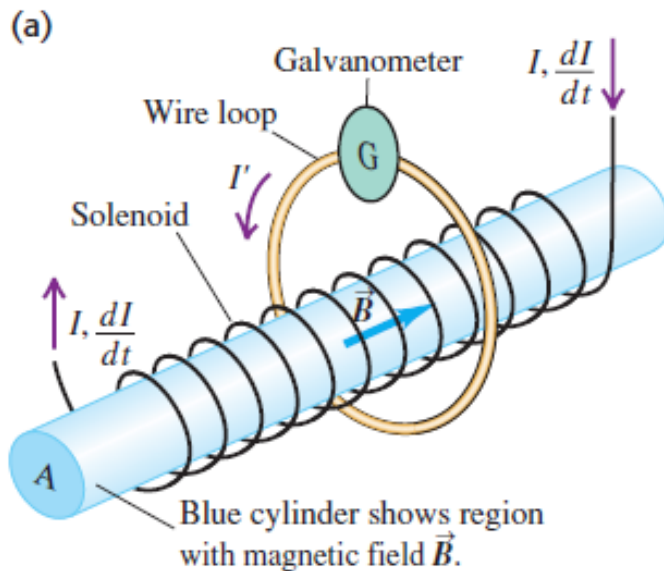
$$P = V_s I_s = V_p I_p \quad (6.11)$$

Από (4.10) και (4.11) προκύπτει η

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s} \quad (6.12)$$

6.7. Επαγόμενα Ηλεκτρικά πεδία.

Το σχήμα 6.12 περιλαμβάνει ένα πηνίο που διαρρέεται από ρεύμα I που μεταβάλλεται.



Σχήμα 6.12

Το ρεύμα αυτό δημιουργεί ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο και συνεπώς προκαλείται μια μεταβολή της μαγνητικής ροής μέσα στο σωληνοειδές πηνίο. Όσο διαρκεί αυτή η μεταβολή το γαλβανόμετρο μετρά ένα ηλεκτρικό ρεύμα I' στον αγώγιμο βρόχο. Το ρεύμα στον βρόχο δεν προέρχεται από μία μαγνητική δύναμη γιατί δεν επηρεάζεται από το μαγνητικό πεδίο B . Τα ηλεκτρόνια στον βρόχο δέχονται μία **μη ηλεκτροστατική ηλεκτρική δύναμη από ένα μη ηλεκτροστατικό πεδίο δηλαδή από ένα επαγόμενο Ηλεκτρικό πεδίο.** Η μεταβολή της μαγνητικής ροής στον βρόχο δημιουργεί ένα επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο.

Απο την σχέση $E = -\frac{dV}{dl} \rightarrow dV = -Edl$

και με ολοκλήρωση έχουμε

$$\int_a^b dV = - \int_a^b E dl .$$

Τελικά

$$V_b - V_a = - \int_a^b E dl. \quad \text{Ισοδύναμα έχουμε} \quad V_{ab} = \int_a^b E dl .$$

$$\text{Όμως ισχύει } E = V_{ab} = - \frac{d\Phi_B}{dt} .$$

Έτσι προκύπτει η

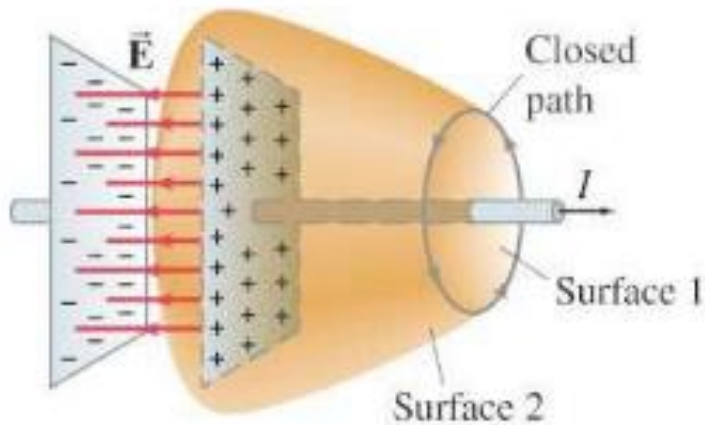
$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (6.14)$$

Αυτά τα επαγόμενα ηλεκτρικά πεδία είναι μη συντηρητικά.

$$W_{a \rightarrow a} = \oint F dl = \oint qE dl \rightarrow \frac{W_{a \rightarrow a}}{q} = \oint E dl = - \frac{d\Phi_B}{dt} \neq 0$$

6.8. Γενικευμένος νόμος του Ampere.

Ο νόμος του Ampere ορίζει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος μιας καμπύλης ισούται με το ρεύμα που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζεται από την κλειστή καμπύλη. Η επιφάνεια δεν είναι κατ' ανάγκη επίπεδη



Σχήμα 6.13

Στο Σχήμα 6.13 παριστάνεται η διαδικασία φόρτισης ενός πυκνωτή.

Ο νόμος του Ampere για την επίπεδη επιφάνεια -1 που οριοθετείτε από τον κύκλο δίνει ότι $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$ ενώ για την επιφάνεια - 2 ο νόμος του Ampere δίνει $\oint \vec{B} d\vec{l} = 0$ καθώς ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή δεν υπάρχει ρεύμα αγωγιμότητας. Για να αντιμετωπισθεί η αντίφαση αυτή επινοούμε ένα **υποθετικό ρεύμα ή ψευδόρευμα**

στον χώρο ανάμεσα στις πλάκες, που ορίζεται ως **ρεύμα μετατόπισης**

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (6.15)$$

Το ρεύμα μετατόπισης είναι προϊόν της μεταβολής της ροής του ηλεκτρικού πεδίου. Έτσι ο γενικευμένος νόμος του Ampere γράφεται ως

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_C + I_D) \quad (6.16)$$

Από (4.15) και (4.16) προκύπτει

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(I_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad (6.17)$$

Όπου I_C είναι το ρεύμα αγωγιμότητας.

6.9. Εξισώσεις του Maxwell.

Συνοψίζοντας οι εξισώσεις που περιγράφουν τα φαινόμενα του Ηλεκτρισμού και του Μαγνητισμού διατυπώθηκαν από τον Maxwell

1. Ο νόμος του Gauss για τον Ηλεκτρισμό

$$\oiint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} \quad (6.18)$$

Από τον νόμο του Gauss προκύπτει ο νόμος του Coulomb για τον Ηλεκτρισμό.

2. Ο νόμος του Gauss για τον Μαγνητισμό

$$\oiint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (6.19)$$

Ο μηδενισμός του δεύτερου μέλους προκύπτει από ότι δεν έχουν ανακαλυφθεί τα μαγνητικά μονόπολα.

3. Ο νόμος του Ampere (Γενικευμένος)

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(I_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{encl} \quad (6.20)$$

Η μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου δημιουργεί Μαγνητικό πεδίο

4. Ο νόμος του Faraday

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (6.21)$$

Η μεταβολή του Μαγνητικού πεδίου δημιουργεί ένα **μη Ηλεκτροστατικό Ηλεκτρικό πεδίο μη συντηρητικό**.

Στις εξισώσεις του Maxwell το ηλεκτρικό πεδίο συνίσταται από δύο όρους. Ένα Ηλεκτροστατικό πεδίο E_e και ένα μη ηλεκτροστατικό επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο E_n , έτσι ώστε

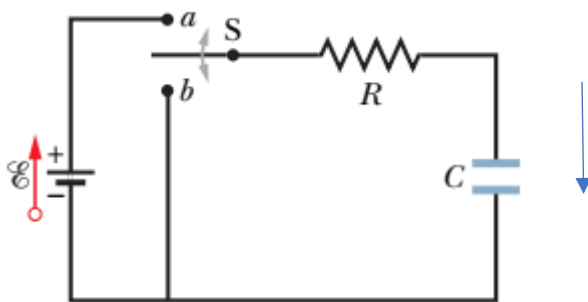
$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_n \quad (6.22)$$

Στον νόμο του Gauss για τον ηλεκτρισμό τα Ηλεκτρικά πεδία προέρχονται φορτία έτσι έχουμε $\vec{E} = \vec{E}_e$. Στον νόμο του Faraday δεν υπάρχουν φορτία οπότε ισχύει $\vec{E} = \vec{E}_n$ έχουμε δηλαδή μόνο επαγόμενα Ηλεκτρικά πεδία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΕΝΑΛΛΑΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ

7.1 Φόρτιση Πυκνωτή



\mathcal{E} ιδανική

Εφαρμόζουμε τον 2 νόμο του Kirchoff διαγράφοντας το κύκλωμα σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού,

Όπου $V_C = \frac{q}{C}$ (7.1)

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0. \quad (7.2)$$

Επειδή,

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (7.3)$$

Η (7.2) γίνεται

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \quad (\text{charging equation}). \quad (7.4)$$

Με λύση για αρχικές συνθήκες $t=0, q=0$ (αφόρτιστος πυκνωτής).

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) \quad (\text{charging a capacitor}).$$

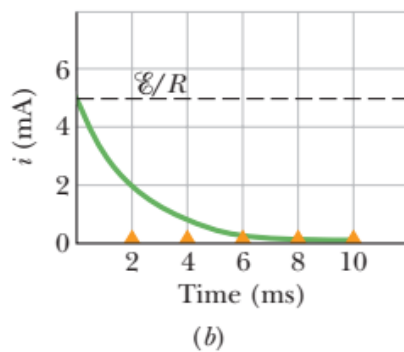
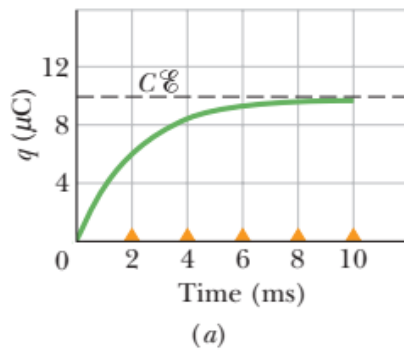
(7.5.α)

(Ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες?)

$$i = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)e^{-t/RC} \quad (\text{charging a capacitor}). \quad (7.5.β)$$

$$V_C = \frac{q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) \quad (\text{charging a capacitor}). \quad (7.6)$$

The capacitor's charge grows as the resistor's current dies out.



Σταθερά χρόνου τ

$$\tau = RC \quad (\text{time constant}). \quad (7.7)$$

Το γινόμενο RC έχει μονάδες χρόνου.

Αν στην σχέση

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) \quad (\text{charging a capacitor}). \quad (7.8)$$

Θέσουμε $t = \tau$

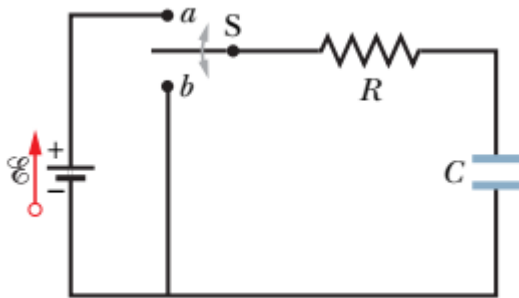
τότε

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-1}) = 0.63C\mathcal{E}. \quad (7.9)$$

Δηλαδή σε χρόνο τ το φορτίο από την τιμή 0 φτάνει στο 63% της μέγιστης τιμής του CE

7.2 Εκφόρτιση Πυκνωτή

Αν απομακρύνουμε την πηγή



τότε η

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \quad (\text{charging equation}).$$

Γίνεται

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (\text{discharging equation}). \quad (7.10)$$

Με λύση

$$q = q_0 e^{-t/RC} \quad (\text{discharging a capacitor}), \quad (7.11)$$

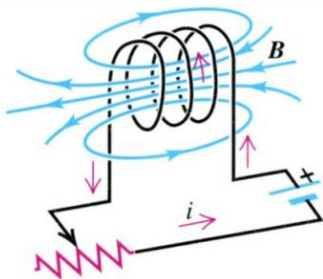
Και το ρεύμα

$$i = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right)e^{-t/RC} \quad (\text{discharging a capacitor}). \quad (7.12)$$

Σε χρόνο τ το φορτίο και το ρεύμα φτάνει στο 37% της μέγιστης τιμής τους.

7.3 Αυτεπαγωγή

Κάθε κύκλωμα που διαρρέεται από μεταβαλλόμενο ρεύμα εμφανίζει μία επαγόμενη ΗΕΔ που προέρχεται από την μεταβολή του δικού του μαγνητικού πεδίου. αυτή ονομάζεται **ΗΕΔ αυτεπαγωγής**



31-3 Ροή Φ_B διαρρέει πηνίο N σπειρών. Όταν το ρεύμα στο κύκλωμα μεταβάλλεται, η ροή μεταβάλλεται επίσης και εμφανίζεται στο κύκλωμα ΗΕΔ αυτεπαγωγής.

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \quad (\text{inductance defined}), \quad (7.13)$$

Το αντίστοιχο της χωρητικότητας του πυκνωτή, για το μαγνητικό πεδίο είναι η αυτεπαγωγή L .

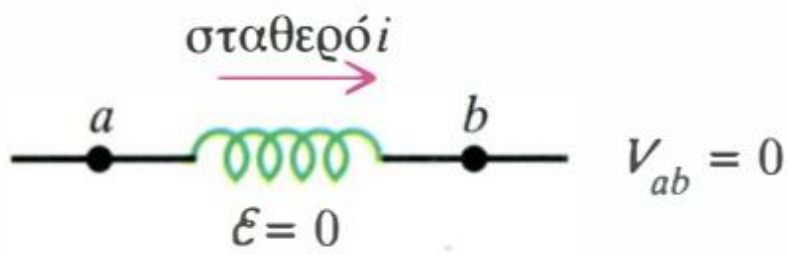
$$1 \text{ henry} = 1 \text{ H} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{A}.$$

Ένα κύκλωμα ή στοιχείο κυκλώματος που έχει συγκεκριμένη αυτεπαγωγή και δημιουργεί μαγνητικό πεδίο ονομάζεται πηνίο ή choke

$$\mathcal{E}_L = - \frac{d(N\Phi_B)}{dt}. \quad (7.14)$$

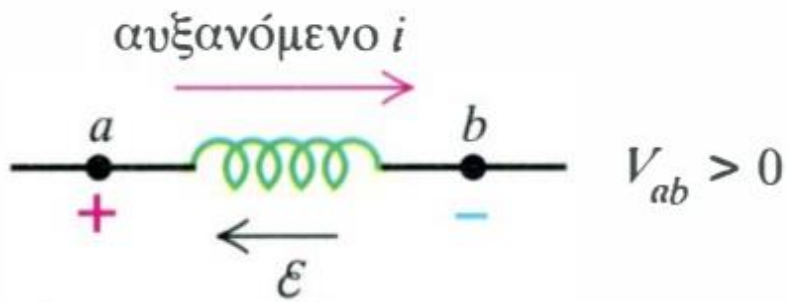
Και σε συνδυασμό με την 7.13

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} \quad (\text{self-induced emf}). \quad (7.15)$$



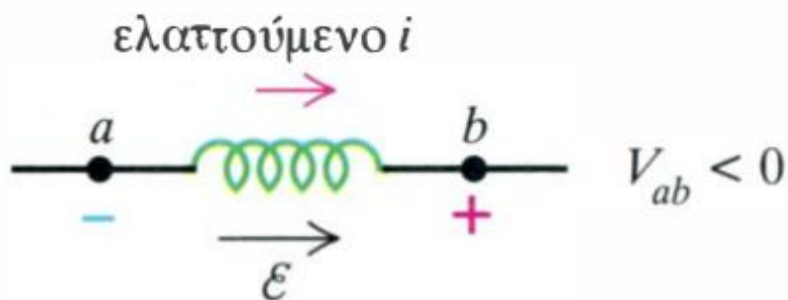
$$\frac{di}{dt} = 0$$

(a)



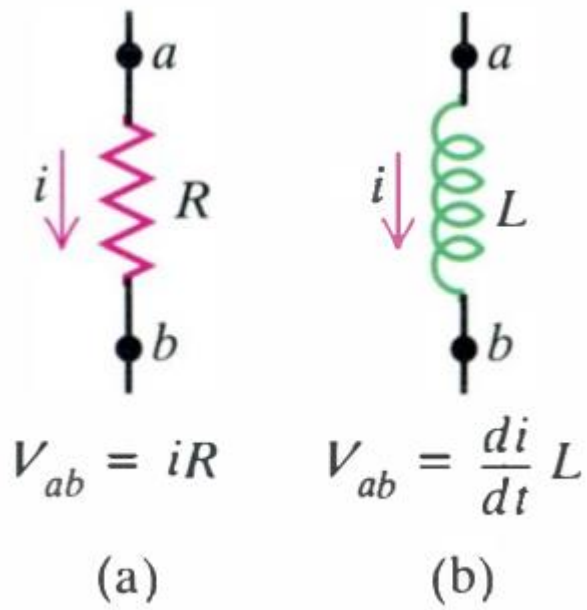
το $\frac{di}{dt}$ είναι θετικό

(b)

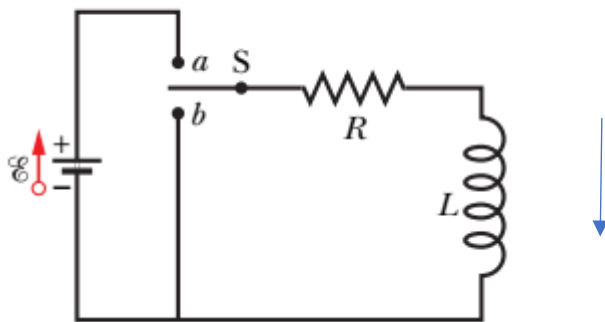


το $\frac{di}{dt}$ είναι αρνητικό

(c)



7.3 Κύκλωμα RL



$$-iR - L \frac{di}{dt} + \mathcal{E} = 0 \quad (7.16)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \mathcal{E} \quad (RL \text{ circuit}). \quad (7.17)$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}), \quad (7.18)$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau_L}) \quad (\text{rise of current}). \quad (7.19)$$

$$\tau_L = \frac{L}{R} \quad (\text{time constant}). \quad (7.20)$$

Για

$$t = \tau_L = L/R$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-1}) = 0.63 \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (7.21)$$

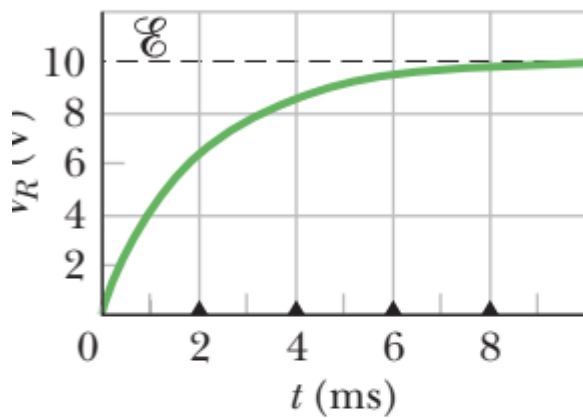
Εάν αφαιρέσουμε την πηγή η (5.17) γίνεται

$$L \frac{di}{dt} + iR = 0. \quad (7.22)$$

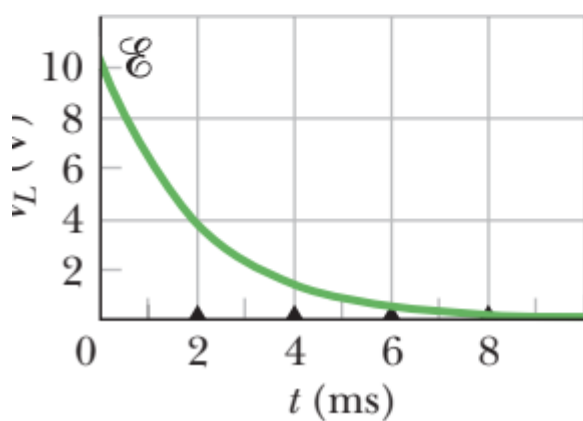
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau_L} = i_0 e^{-t/\tau_L} \quad (\text{decay of current}).$$

(7.23)

The resistor's potential difference turns on.
The inductor's potential difference turns off.



(a)



(b)

7.4 Ενέργεια που αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο

Η ΔΕ του κυκλώματος RL

$$\mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + iR, \quad (7.24)$$

$$\mathcal{E}i = Li \frac{di}{dt} + i^2R, \quad (7.25)$$

Ο όρος Ei εκφράζει την ισχύ που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα.

Ο όρος i^2R εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια εμφανίζεται σαν θερμότητα στην αντίσταση R , δηλαδή τις θερμικές απώλειες λόγω φαινομένου Joule.

Ένα μέρος της ενέργειας που προσφέρει η πηγή αποθηκεύτηκε ως μαγνητική δυναμική ενέργεια U_B στο πηνίο.

Επομένως σε όρους ισχύος

$$\frac{dU_B}{dt} = Li \frac{di}{dt}. \quad (7.26)$$

$$dU_B = Li di. \quad (7.27)$$

Και ολοκληρώνοντας

$$\int_0^{U_B} dU_B = \int_0^i Li di$$

Καταλήγουμε στην ολική μαγνητική ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο.

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 \quad (7.28)$$

Όπου I είναι η τελική μόνιμη σταθερή τιμή του ρεύματος .

Όταν το ρεύμα ελαττώνεται από I σε μηδέν, το πηνίο δρα ως πηγή, παρέχοντας μια ολική ποσότητα ενέργειας $\frac{1}{2}LI^2$ προς το εξωτερικό κύκλωμα. Εάν διακόψουμε απότομα το κύκλωμα ανοίγοντας ένα διακόπτη, το ρεύμα μεταβάλλεται πολύ γρήγορα, η επαγόμενη ΗΕΔ είναι πολύ μεγάλη και η ενέργεια θα καταναλωθεί στον σπινθήρα ανάμεσα στις επαφές του διακόπτη. Αυτή η μεγάλη ΗΕΔ είναι το ηλεκτρικό ανάλογο της μεγάλης δύναμης που ασκείται από ένα αυτοκίνητο που προσκρούει σε τοίχο και σταματά απότομα. Εάν προσπαθήσετε να σταματήσετε απότομα το ρεύμα που διαρρέει τις περιελίξεις του κινητήρα μιας ηλεκτρικής σκούπας, τραβώντας απότομα το καλώδιο από την μπρίζα, θα δείτε έναν σπινθήρα καθώς η μεγάλη επαγόμενη τάση προκαλεί στιγμιαία διηλεκτρική διάτρηση του αέρα.

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} \quad (\text{self-induced emf}).$$

5.5 Πυκνότητα Μαγνητικής Ενέργειας

$$u_B = \frac{U_B}{Al} \quad (7.29)$$

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2,$$

$$u_B = \frac{Li^2}{2Al} = \frac{L}{l} \frac{i^2}{2A}. \quad (7.30)$$

Έστω ένα σωληνοειδές πηνίο όπου n είναι ο αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους και l το μήκος του.

Ισχύει

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A \quad (\text{solenoid}). \quad (7.31)$$

Οπότε η (5.30) γίνεται

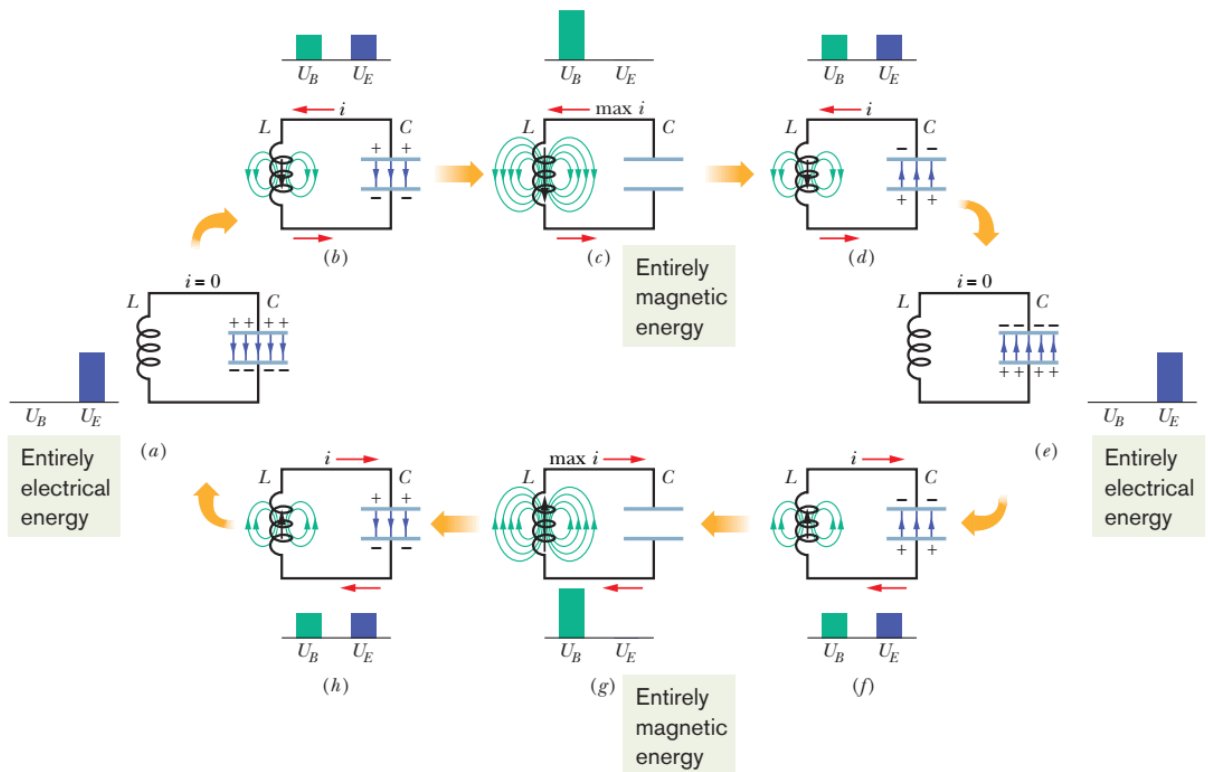
$$u_B = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 i^2, \quad (7.32)$$

$$B = \mu_0 i n \quad (\text{ideal solenoid}).$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (\text{magnetic energy density}). \quad (7.33)$$

Πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας στο κενό

7.6 Κύκλωμα Tomson L-C



Στο σχήμα b το ρεύμα είναι η κίνηση θετικού φορτίου από τον (+) οπλισμό στον (-)

Στο σχήμα c πυκνωτής έδωσε όλα τα φορτία του και το ρεύμα είναι μέγιστο.

Επειδή το ρεύμα συνέχεια αύξανε από πριν, δεν μπορεί πλέον να αυξηθεί άλλο, οπότε με το νόμο του Lenz

στο πηνίο θα δημιουργηθεί μία ΗΕΔ εξ επαγωγής που θα προσπαθεί να διατηρήσει το ρεύμα όπως πριν με την ίδια φορά Σχήμα d

Έτσι όμως τα θετικά φορτία πάνε στον κάτω οπλισμό και τον φορτίζουν θετικά (σχήμα e)

Αφού φορτιστεί ο πυκνωτής πλήρως το $i=0$, σταματάει η ΗΕΔ εξ επαγωγής και τα φορτία κινούνται από τον (+) οπλισμό εξωτερικά στον (-),

έτσι η φορά άλλαξε (σχήμα f), και ο κύκλος επαναλαμβάνεται

Για την δυναμική ενέργεια ισχύει

$$U = U_B + U_E = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}, \quad (7.34)$$

Επειδή δεν έχουμε θερμικές απώλειες

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0. \quad (7.35)$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (LC \text{ oscillations}). \quad (7.36)$$

Η 7.36 είναι η ΔΕ του κυκλώματος με λύση

$$q = Q \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{charge}), \quad (7.37)$$

Παραγωγίζοντας την (7.37)

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega Q \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{current}). \quad (7.38)$$

Με πλάτος I ,

$$I = \omega Q, \quad (7.39)$$

$$i = -I \sin(\omega t + \phi). \quad (7.40.a)$$

Παραγωγίζοντας την (7.38) λαμβάνουμε

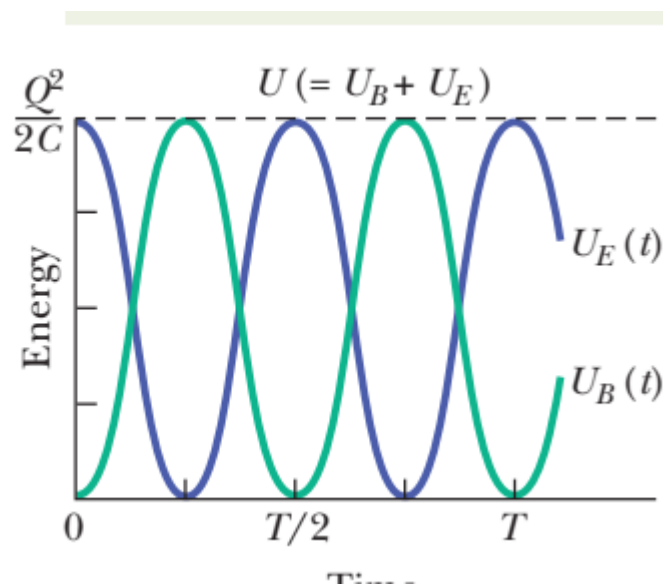
$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 Q \cos(\omega t + \phi). \quad (7.40.\beta)$$

Αν στην ΔΕ του κυκλώματος αντικαταστήσουμε το d^2q/dt^2 από την (7.40.β) και το q από την (7.37) παίρνουμε

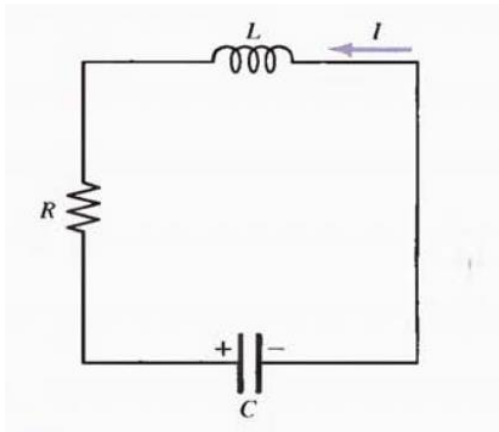
$$-L\omega^2 Q \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{C} Q \cos(\omega t + \phi) = 0.$$

Που οδηγεί στην ιδιοσυχνότητα

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (7.41)$$



5.6 Κύκλωμα RLC



(7.42)

$$-L \frac{dI}{dt} - IR - \frac{Q}{C} = 0.$$

(7.43)

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0.$$

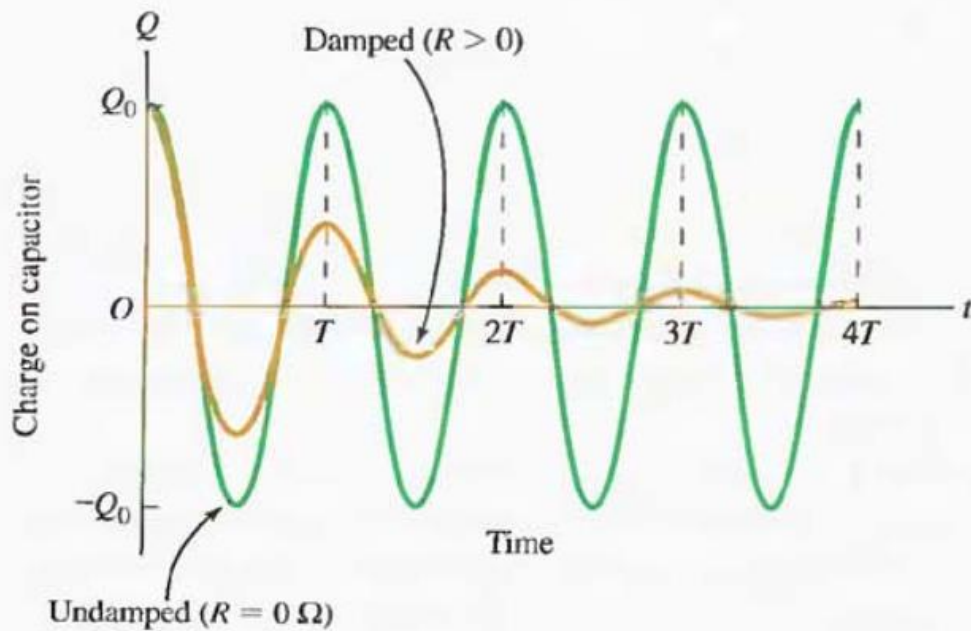
(7.44)

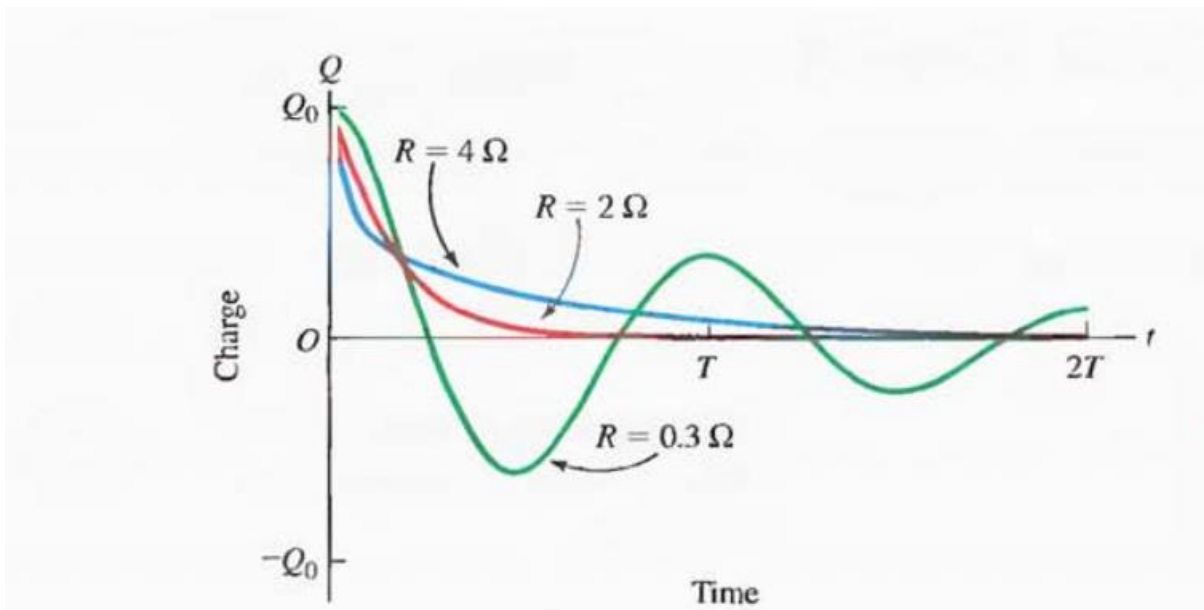
$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

(7.45)

TABLE 32-3 • Analogy Between *RLC* Circuits and Damped Harmonic Motion

	Damped Harmonic Motion Parameter	<i>RLC</i> Circuit Parameter
Variable	x	Q
Coefficient of variable	k	$1/C$
Coefficient of $\frac{d}{dt}$ (variable)	b	R
Coefficient of $\frac{d^2}{dt^2}$ (variable)	m	L





Η λύση της ΔΕ (5.44) δίνει

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega' t + \phi). \quad (7.46)$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (7.47)$$

$$\omega'^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} - \alpha^2 = \omega^2 - \alpha^2.$$

(7.48)

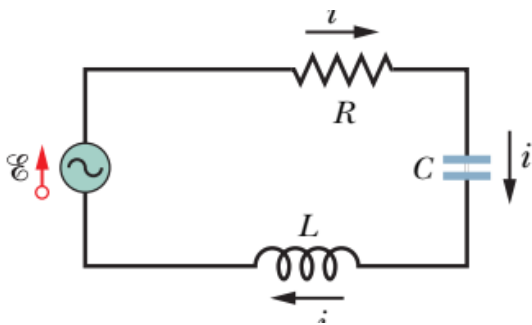
Όταν η $\omega' = 0$ τότε έχω μόνο απόσβεση. Αυτό συμβαίνει για μια κρίσιμη τιμή της αντίστασης R_c . Αυτή υπολογίζεται από,

$$\omega'^2 = \omega^2 - \alpha^2 = 0$$

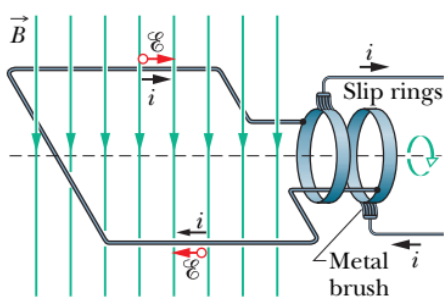
και προκύπτει

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7.49)$$

Εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση



7.7 Κύκλωμα Εναλλασσόμενου ρεύματος



AC (Alternative Current) –Εναλλασσόμενο ρεύμα

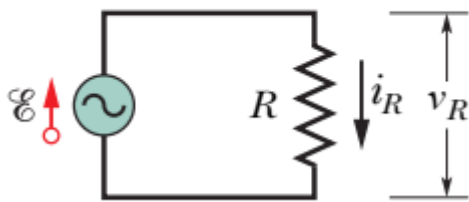
DC (Direct Current) –Συνεχές ρεύμα

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega_d t. \quad (7.50)$$

$$i = I \sin(\omega_d t - \phi), \quad (7.51)$$

(Παραδοσιακά γράφουμε $-\phi$ αντί $+\phi$)

5.8 Η αντίσταση στο εναλλασσόμενο ρεύμα



$$\mathcal{E} - v_R = 0. \quad (5.52)$$

$$v_R = \mathcal{E}_m \sin \omega_d t. \quad (7.53)$$

($r=0$),

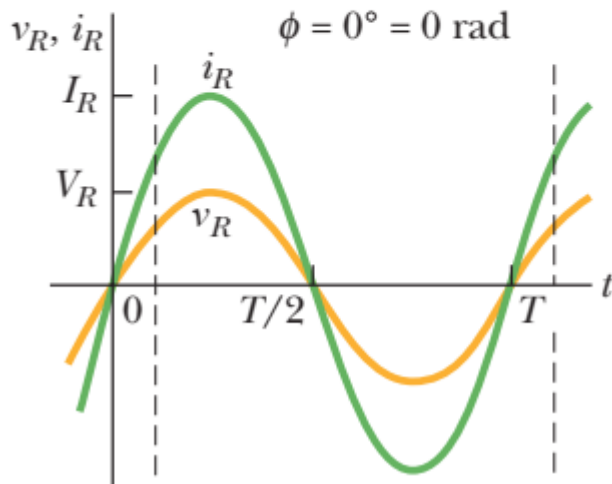
$$v_R = V_R \sin \omega_d t. \quad (7.54)$$

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{V_R}{R} \sin \omega_d t. \quad (7.55)$$

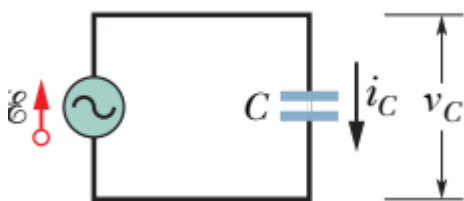
Η φάση $\phi=0$ ανάμεσα στην τάση και το ρεύμα.

$$V_R = I_R R \quad (\text{resistor}). \quad (7.56)$$

For a resistive load, the current and potential difference are in phase.



5.9 Ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο ρεύμα



$$v_C = V_C \sin \omega_d t, \quad (7.57)$$

$$q_C = C v_C = C V_C \sin \omega_d t. \quad (7.58)$$

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \omega_d C V_C \cos \omega_d t. \quad (7.59)$$

Για λόγους συμμετρίας ορίζουμε σαν **Χωρητική Αντίσταση X_C σε μονάδες Ω** .

$$X_C = \frac{1}{\omega_d C} \quad (\text{capacitive reactance}). \quad (7.60)$$

Στο συνεχές ρεύμα $\omega_d=0$ οπότε $X_C \rightarrow \infty$ και ο πυκνωτής λειτουργεί σαν διακόπτης (ανοιχτό κύκλωμα). Ο πυκνωτής επίσης εμποδίζει την διέλευση των χαμηλών συχνοτήτων.

Επειδή

$$\cos \omega_d t = \sin(\omega_d t + 90^\circ). \quad (7.61)$$

$$i_C = \left(\frac{V_C}{X_C} \right) \sin(\omega_d t + 90^\circ). \quad (7.62)$$

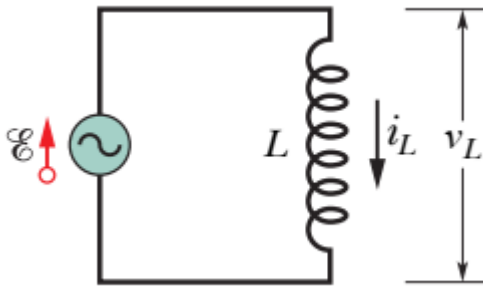
$$i_C = I_C \sin(\omega_d t - \phi), \quad (7.63)$$

Άρα $\phi = -90^\circ$

Και για τα πλάτη

$$V_C = I_C X_C \quad (\text{capacitor}). \quad (7.64)$$

7.10 Το πηνίο στο εναλλασσόμενο ρεύμα



$$v_L + E = 0 \rightarrow v_L - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (7.65)$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}. \quad (7.66)$$

$$v_L = V_L \sin \omega_d t, \quad (7.67)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_L}{L} \sin \omega_d t. \quad (7.68)$$

$$\int di_L = \frac{V_L}{L} \int \sin \omega_d t dt = -\left(\frac{V_L}{\omega_d L}\right) \cos \omega_d t. \quad (7.69)$$

Για λόγους συμμετρίας ορίζουμε σαν **Επαγωγική Αντίσταση X_L σε μονάδες Ω .**

$$X_L = \omega_d L \quad (7.70)$$

Το πηνίο εμποδίζει την διέλευση των υψηλών συχνοτήτων.

$$-\cos \omega_d t = \sin(\omega_d t - 90^\circ). \quad (7.71)$$

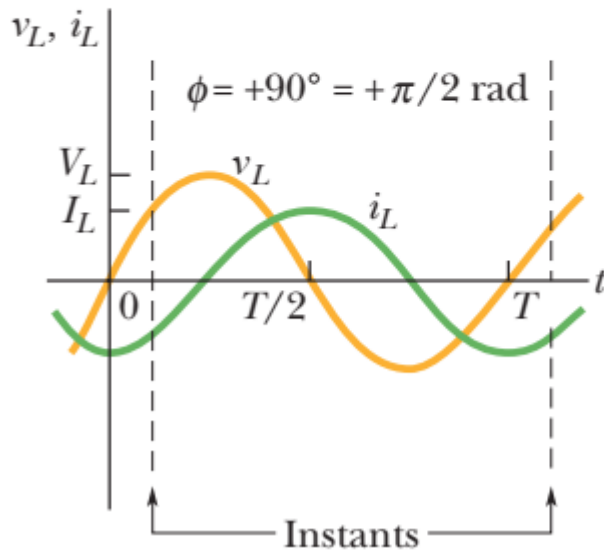
$$i_L = \left(\frac{V_L}{X_L} \right) \sin(\omega_d t - 90^\circ). \quad (7.72)$$

$$i_L = I_L \sin(\omega_d t - \phi), \quad (7.73)$$

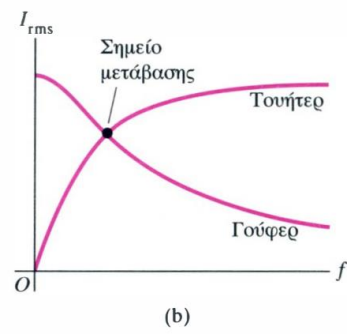
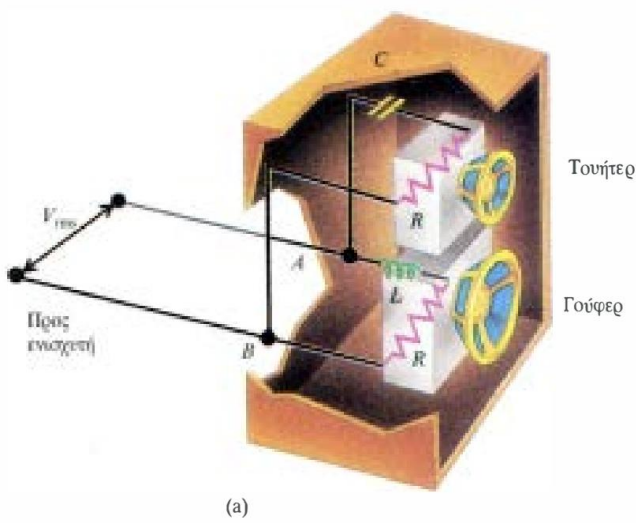
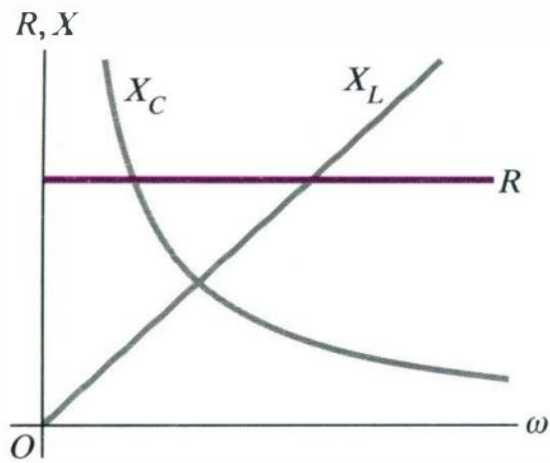
$\phi=90^\circ$

$$V_L = I_L X_L \quad (\text{inductor}). \quad (7.74)$$

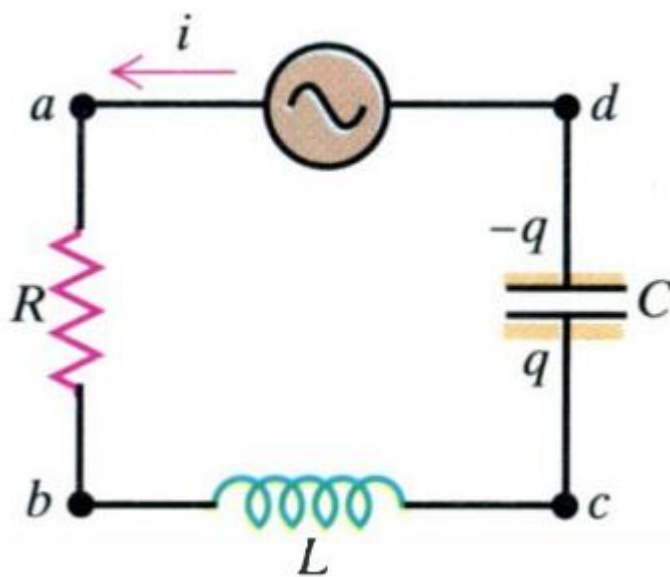
For an inductive load, the current lags the potential difference by 90° .



Στοιχείο κυκλώματος	Σχέση πλατών	Φυσικό μέγεθος	Φάση της v
Αντιστάτης	$V = IR$	R	Σε φάση με το i
Πηνίο	$V = IX_L$	$X_L = \omega L$	Προηγείται του i κατά 90°
Πυκνωτής	$V = IX_C$	$X_C = 1/\omega C$	Υστερεί του i κατά 90°



7.10 Ηλεκτρική ισχύς του εναλλασσομένου ρεύματος



Αφού το κύκλωμα έχει έρθει σε σταθεροποιημένη κατάσταση (steady state) η στιγμιαία ισχύς θα είναι

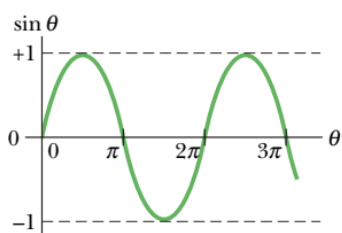
$$P = i^2 R = [I \sin(\omega_d t - \phi)]^2 R = I^2 R \sin^2(\omega_d t - \phi).$$

(7.75)

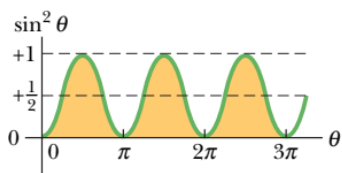
Και η μέση ισχύς P_{avg}

$$P_{\text{avg}} = \frac{I^2 R}{2} = \left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2 R. \quad (7.76)$$

$$P = I_{\text{rms}}^2 R$$



(a)



(b)

Ενεργή τιμή I_{rms} της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος

$$I_{\text{rms}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad (\text{rms current}).$$

(7.77)

Ενεργή τιμή V_{rms} της τάσης του εναλλασσόμενου ρεύματος και

Ενεργή τιμή E_{rms} της ΗΕΔ

$$V_{\text{rms}} = \frac{V}{\sqrt{2}} \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_{\text{rms}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}} \quad (\text{rms voltage; rms emf}). \quad (7.78)$$

Ποια η σημασία της ενεργής τιμής της τάσης ή της ΗΕΔ ;

Το συνεχές ρεύμα που προκαλεί τα ίδια θερμικά αποτελέσματα με το εναλλασσόμενο ρεύμα έχει ρεύμα και τάση τις ενεργές τιμές

Τάση δικτύου.

$$V_{\text{rms}} = \frac{V}{\sqrt{2}} \rightarrow 220\text{V} = \frac{V}{\sqrt{2}} \rightarrow V = 220\text{V}\sqrt{2} = 311\text{V}$$

Συχνότητα $f=50\text{Hz}$

$$v=311\sin(2\pi 50t).$$

Τι τάση και τί ρεύμα μετράει το βολτόμετρο και το αμπερόμετρο στην θέση AC?

Ενεργές τιμές