SEARS & ZEMANSKY

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ με Σύγχρονη Φυσική

3η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Τόμος Β

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ ΟΠΤΙΚΗ - ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

YOUNG ΚΑΙ FREEDMAN

Θ.Η. Αλεξόπουλος, ΕΜΠ
Ι.Α. Αρβανιτίδης, ΑΠΘ
Α.Α. Αργυρίου, Π. Πατρών
Ε.Α. Δρης, ΕΜΠ
Η.Σ. Ζουμπούλης, ΕΜΠ
Η.Κ. Κατσούφης, ΕΜΠ
Γ.Α. Κουρούκλης, ΑΠΘ
Κ.Ε. Παρασκευαΐδης, ΕΜΠ
Μ.Ν. Πιζάνιας, Π. Πατρών
Ι.Π. Ρίζος, Π. Ιωαννίνων
Θ.Ν. Τομαράς, Π. Κρήτης
Κ. Χριστοδουλίδης, ΕΜΠ

ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

1. ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

ΕΠΙΛΟΓΗ, ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
Ηλίας Κατσούφης

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ:
Τζένη Πάλμου

Απόδοση βιβλίου στην Ελληνική γλώσσα και Επιμέλεια (αλφαβητικά):

Θ.Η. Αλεξόπουλος, *Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Ι.Α. Αρβανιτίδης, *Αναπλ. Καθηγητής Φυσικής του Τμήματος Φυσικής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης*

Α.Α. Αργυρίου, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών*

Ε.Α. Δρης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επστημών, του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Η.Σ. Ζουμπούλης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Η.Κ. Κατσούφης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Γ.Α. Κουρούκλης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής του Τμήματος Χημικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης*

Κ.Ε. Παρασκευαΐδης, *τ. Αναπλ. Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Μ.Ν. Πιζάνιας, *Ομότιμος Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών*

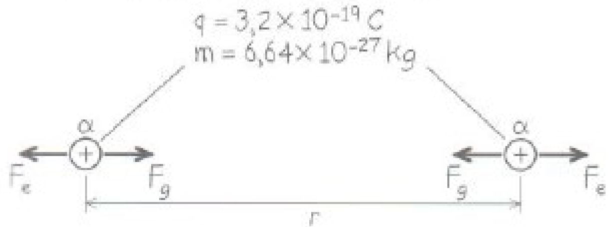
Ι.Π. Ρίζος, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων*

Θ.Ν. Τομαράς, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Κρήτης*

Κ. Χριστοδουλίδης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21.1 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΕΝΑΝΤΙ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

Ένα σωμάτιο α (ο πυρήνας του ατόμου ηλίου) έχει μάζα $m = 6{,}64 \times 10^{-27}$ kg και φορτίο $q = +2e = 3{,}2 \times 10^{-19}$ C. Να συγκρίνετε το μέτρο της απωστικής ηλεκτρικής δύναμης μεταξύ δύο σωματιδίων α («άλφα») με τη μεταξύ τους βαρυτική έλξη.



21.11 Το σχεδιάγραμμά μας για το πρόβλημα αυτό.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το πρόβλημα περιλαμβάνει τον νόμο του Νεύτωνα για τη βαρυτική δύναμη F_g μεταξύ σωματίων (δείτε Εδ. 13.1) και τον νόμο του Coulomb για την ηλεκτρική δύναμη F_e μεταξύ σημειακών φορτίων. Για να συγκρίνουμε τις δυνάμεις αυτές, καθορίζουμε ως στοχευμένη μεταβλητή τον λόγο F_e/F_g. Χρησιμοποιούμε την Εξ. (21.2) για τη δύναμη F_e και την Εξ. (13.1) για τη δύναμη F_g.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Το **Σχ. 21.11** απεικονίζει το σχεδιάγραμμά μας. Οι σχέσεις που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι Εξ. (21.2) και (13.1),

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2} \qquad F_g = G\frac{m^2}{r^2}$$

Και οι δύο αυτές είναι δυνάμεις αντιστρόφου τετραγώνου και επομένως απαλείφεται ο παράγων r^2 όταν θεωρήσουμε τον λόγο των δύο σχέσεων.

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G}\frac{q^2}{m^2}$$

$$= \frac{9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}}{6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}}\frac{(3{,}2 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(6{,}64 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})^2} = 3{,}1 \times 10^{35}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Αυτό το καταπληκτικό αποτέλεσμα με τα μεγάλα μεγέθη δείχνει ότι η βαρυτική δύναμη στην περίπτωση αυτή είναι εντελώς αμελητέα σε σύγκριση με την ηλεκτρική δύναμη. Αυτό ισχύει πάντοτε σε αλληλεπιδράσεις ατομικών και υποατομικών σωματιδίων στο εσωτερικό των πυρήνων. Όμως στο εσωτερικό των αντικειμένων μεγέθους ενός ανθρώπου ή πλανήτη, τα μέτρα των θετικών και αρνητικών φορτίων είναι σχεδόν ίσα και η ολική ηλεκτρική δύναμη είναι συνήθως πολύ *μικρότερη* από τη βαρυτική δύναμη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21.2 ΔΥΝΑΜΗ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

Η απόσταση μεταξύ δύο σημειακών φορτίων $q_1 = +25$ nC και $q_2 = -75$ nC είναι 3,0 cm (**Σχ. 21.12a**). Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση της ηλεκτρικής δύναμης (a) την οποία το φορτίο q_1 ασκεί στο φορτίο q_2 και (b) τη δύναμη που το φορτίο q_2 ασκεί στο φορτίο q_1.

21.12 (1) Ποια δύναμη ασκεί το q_1 στο q_2 και ποια δύναμη ασκεί το φορτίο q_2 στο q_1; Οι βαρυτικές δυνάμεις είναι αμελητέες.

(a) Τα δύο φορτία (b) Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το φορτίο q_2 (c) Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το φορτίο q_1

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Στο πρόβλημα αυτό ζητείται ο υπολογισμός των ηλεκτρικών δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται σε κάθε φορτίο. Χρησιμοποιούμε τον νόμο του Coulomb, Εξ. (21.2), για να υπολογίσουμε τα μέτρα των δυνάμεων. Τα πρόσημα των φορτίων θα καθορίσουν τις κατευθύνσεις των δυνάμεων.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Μετά τη μετατροπή των μονάδων της απόστασης r σε μέτρα και των φορτίων σε coulomb, από την Εξ. (21.2) προκύπτει

$$F_{1\ \sigma\varepsilon\ 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$
$$= (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{|(+25 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(-75 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})|}{(0{,}030\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 0{,}019\ \mathrm{N}$$

Τα φορτία έχουν αντίθετα πρόσημα και επομένως η δύναμη είναι ελκτική (προς τα αριστερά) στο Σχ. 21.12b: δηλαδή η δύναμη που ασκείται στο q_2 κατευθύνεται προς το q_1 κατά μήκος της γραμμής που ενώνει τα δύο φορτία.

(b) Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία του μέρους (1) προκύπτει

$$F_{2\ \sigma\varepsilon\ 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_2 q_1|}{r^2} = F_{1\ \sigma\varepsilon\ 2} = 0{,}019\ \mathrm{N}$$

Η ελκτική δύναμη η οποία ασκείται στο q_1 κατευθύνεται προς τα δεξιά, προς το q_2 (Σχ. 21.12c).

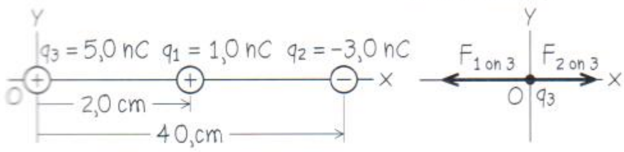
ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα εφαρμόζεται στην ηλεκτρική δύναμη. Ακόμα και στην περίπτωση διαφορετικών μεγεθών, το μέτρο της δύναμης που ασκεί το φορτίο q_2 στο φορτίο q_1 είναι το ίδιο με το μέτρο της δύναμης που ασκεί το q_1 στο q_2 και οι δύο δυνάμεις έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21.3 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ

Δύο σημειακά φορτία είναι τοποθετημένα στον άξονα x ενός συστήματος συντεταγμένων: το πρώτο φορτίο $q_1 = 1{,}0\ \text{nC}$ είναι στη θέση $x = +2{,}0\ \text{cm}$ και το $q_2 = -3{,}0\ \text{nC}$ στη θέση $x = +4{,}0\ \text{cm}$. Πόση είναι η ολική ηλεκτρική δύναμη η οποία ασκείται από τα φορτία q_1 και q_2 σε φορτίο $q_3 = 5{,}0\ \text{nC}$ στη θέση $x = 0$;

21.13 Σχηματικό διάγραμμα για το πρόβλημα αυτό.

(a) Διάγραμμα της κατάστασης (b) Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το q_3



ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το **Σχ. 21.3a** απεικονίζει την κατάσταση των φορτίων. Για τον υπολογισμό της ολικής δύναμης στο φορτίο q_3, που αποτελεί τη μεταβλητή-στόχο μας, θα πρέπει να υπολογίσουμε το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων των δύο φορτίων που δρουν πάνω του.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Το Σχ.21.3b είναι ένα διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το φορτίο q_3, το οποίο απωθείται από το q_1 (που έχει το ίδιο πρόσημο) και έλκεται από το q_2 (που έχει αντίθετο πρόσημο)· η δύναμη $\boldsymbol{F}_{1\ \sigma\varepsilon\ 3}$ είναι στην κατεύθυνση του άξονα $-x$ και η $\boldsymbol{F}_{2\ \sigma\varepsilon\ 3}$ είναι στην κατεύθυνση του άξονα $+x$. Μετά τη μετατροπή των μονάδων προκύπτει από την Εξ. (21.2)

$$
\begin{aligned}
F_{1\ \sigma\varepsilon\ 3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_3|}{r_{13}^2} \\
&= (9{,}0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(1{,}0 \times 10^{-9}\ \text{C})(5{,}0 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(0{,}020\ \text{m})^2} \\
&= 1{,}12 \times 10^{-4}\ \text{N} = 112\ \mu\text{N}
\end{aligned}
$$

Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $F_{2\ \sigma\varepsilon\ 3} = 84\ \mu\text{N}$. Επομένως έχουμε $\boldsymbol{F}_{1\ \sigma\varepsilon\ 3} = (-112\ \mu\text{N})\boldsymbol{i}$ και $\boldsymbol{F}_{2\ \sigma\varepsilon\ 3} = (84\ \mu\text{N})\boldsymbol{i}$.

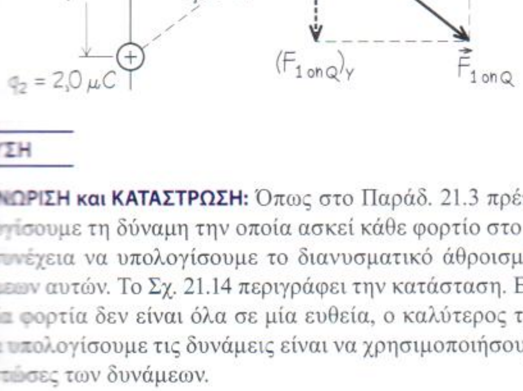
$$\boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{F}_{1\ \sigma\varepsilon\ 3} + \boldsymbol{F}_{2\ \sigma\varepsilon\ 3} = (-112\ \mu\text{N})\boldsymbol{i} + (84\ \mu\text{N})\boldsymbol{i} = (-28\ \mu\text{N})\boldsymbol{i}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Για έλεγχο παρατηρούμε ότι το μέτρο του q_2 είναι τριπλάσιο από αυτό του q_1, όμως το q_2 βρίσκεται σε απόσταση διπλάσια από το q_3 σε σχέση με την απόσταση του q_1. Η Εξ. (21.2) υποδεικνύει ότι η $F_{2\ \sigma\varepsilon\ 3}$ πρέπει να είναι $3/2^2 = 3/4 = 0{,}75$ φορές μεγαλύτερη από τη δύναμη $F_{1\ \sigma\varepsilon\ 3}$. Αυτό συμφωνεί με τις τιμές που υπολογίσαμε: $F_{2\ \sigma\varepsilon\ 3}/F_{1\ \sigma\varepsilon\ 3} = (84\ \mu\text{N})/(112\ \mu\text{N}) = 0{,}75$. Επειδή η $F_{2\ \sigma\varepsilon\ 3}$ είναι η ασθενέστερη δύναμη, η κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης είναι αυτή της $\boldsymbol{F}_{1\ \sigma\varepsilon\ 3}$ – δηλαδή προς την αρνητική φορά του άξονα x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21.4 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ

Δύο ίσα θετικά φορτία $q_1 = q_2 = 2{,}0\ \mu\text{C}$ είναι τοποθετημένα στα σημεία $x = 0$, $y = 0{,}30\ \text{m}$ και $x = 0$, $y = -0{,}30\ \text{m}$, αντίστοιχα. Ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της ολικής ηλεκτρικής δύναμης την οποία ασκούν τα φορτία q_1 και q_2 σε τρίτο φορτίο $Q = 4{,}0\ \mu\text{C}$ στη θέση $x = 0{,}40\ \text{m}$, $y = 0$;

21.14 Σχηματικό διάγραμμα για το πρόβλημα αυτό.



ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Όπως στο Παράδ. 21.3 πρέπει να υπολογίσουμε τη δύναμη την οποία ασκεί κάθε φορτίο στο Q και στη συνέχεια να υπολογίσουμε το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων αυτών. Το Σχ. 21.14 περιγράφει την κατάσταση. Επειδή τα τρία φορτία δεν είναι όλα σε μία ευθεία, ο καλύτερος τρόπος για να υπολογίσουμε τις δυνάμεις είναι να χρησιμοποιήσουμε τις συνιστώσες των δυνάμεων.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Το Σχ. 21.14 δείχνει τις δυνάμεις $\boldsymbol{F}_{1\ \sigma\varepsilon\ Q}$ και $\boldsymbol{F}_{2\ \sigma\varepsilon\ Q}$, που οφείλονται στα ταυτόσημα φορτία q_1 και q_2, τα οποία απέχουν ίσες αποστάσεις από το φορτίο Q. Από τον νόμο του Coulomb προκύπτει ότι *και οι δύο* δυνάμεις έχουν μέτρο

$$F_{1\ \acute{\eta}\ 2\ \sigma\varepsilon\ Q} = (9{,}0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) \times \frac{(4{,}0 \times 10^{-6}\ \text{C})(2{,}0 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0{,}50\ \text{m})^2} = 0{,}29\ \text{N}$$

Οι συνιστώσες των δύο δυνάμεων κατά τον άξονα x είναι ίσες:

$$(F_{1\ \acute{\eta}\ 2\ \sigma\varepsilon\ Q})_x = (F_{1\ \acute{\eta}\ 2\ \sigma\varepsilon\ Q})\cos\alpha = (0{,}29\ \text{N})\frac{0{,}40\ \text{m}}{0{,}50\ \text{m}} = 0{,}23\ \text{N}$$

Από τη συμμετρία βλέπουμε ότι η y συνιστώσες των δύο δυνάμεων είναι ίσες και αντίθετες. Επομένως, το άθροισμά τους είναι ίσο με μηδέν και η ολική δύναμη $\boldsymbol{F}$ που ασκείται στο φορτίο Q έχει μόνο συνιστώσα κατά τον άξονα x, $F_x = 0{,}23\ \text{N} + 0{,}23\ \text{N} = 0{,}46\ \text{N}$. Η ολική δύναμη στο Q είναι στον άξονα $+x$ με μέτρο 0,46 N.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Η συνισταμένη δύναμη στο φορτίο Q δεν δείχνει να κατευθύνεται ακριβώς αντίθετα από το φορτίο q_1, ούτε δείχνει να κατευθύνεται ακριβώς αντίθετα από το φορτίο q_2. Μάλλον η κατεύθυνση αυτή είναι ένας συμβιβασμός που οδηγεί μακριά από το *σύστημα* των φορτίων q_1 και q_2. Μπορείτε να αντιληφθείτε ότι η ολική δύναμη *δεν* θα ήταν στον θετικό άξονα x εάν τα φορτία q_1 και q_2 δεν ήταν ίδια ή η γεωμετρική διάταξη των φορτίων δεν ήταν συμμετρική;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21.5 ΜΕΤΡΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

Ποιο είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$ σε σημείο πεδίου 2,0 m από σημειακό φορτίο $q = 4{,}0$ nC;

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το πρόβλημα αυτό αφορά το ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο οφείλεται σε σημειακό φορτίο. Δίνονται το μέτρο του φορτίου και η απόσταση από το φορτίο έως το σημείο του πεδίου, επομένως χρησιμοποιούμε την Εξ. (21.6) για να υπολογίσουμε το μέτρο της δύναμης.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Από την Εξ. (21.6) προκύπτει

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2} = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{4{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(2{,}0\ \mathrm{m})^2}$$

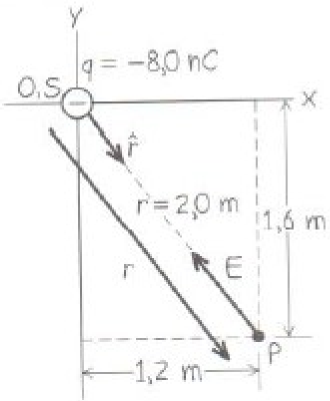
$$= 9{,}0\ \mathrm{N/C}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Το αποτέλεσμα αυτό, $E = 9{,}0$ N/C, σημαίνει ότι εάν τοποθετήσουμε ένα φορτίο 1,0 C σε σημείο 2,0 m από το φορτίο q στο φορτίο θα ασκηθεί δύναμη 9,0 N. Η δύναμη σε φορτίο 2,0 C στο σημείο αυτό θα ήταν $(2{,}0\ \mathrm{C})(9{,}0\ \mathrm{N/C}) = 18$ N κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21.6 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

Σημειακό φορτίο $q = -8{,}0$ nC είναι τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων. Υπολογίστε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $x = 1{,}2$ m, $y = -1{,}6$ m.

21.19 Σχηματικό διάγραμμα για το πρόβλημα αυτό.



ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Πρέπει να υπολογίσουμε το *διανυσματικό* ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$, το οποίο οφείλεται στο σημειακό φορτίο. Το **Σχ. 21.19** δείχνει την κατάσταση. Χρησιμοποιούμε την Εξ. 21.7· για να το πραγματοποιήσουμε αυτό, πρέπει να υπολογίσουμε την απόσταση r από τη σημειακή πηγή S (τη θέση του φορτίου q, το οποίο στο παράδειγμα αυτό είναι στην αρχή των αξόνων O) μέχρι το σημείο P και πρέπει να καταλήξουμε σε μια έκφραση για το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$, το οποίο έχει κατεύθυνση από το S προς το P.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Η απόσταση από το S μέχρι το P είναι

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1{,}2\ \text{m})^2 + (-1{,}6\ \text{m})^2} = 2{,}0\ \text{m}$$

Επομένως, το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{r}}$ είναι

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}}{r}$$

$$= \frac{(1{,}2\ \text{m})\boldsymbol{i} + (-1{,}6\ \text{m})\boldsymbol{j}}{2{,}0\ \text{m}} = 0{,}60\boldsymbol{i} - 0{,}80\boldsymbol{j}$$

Τότε, από την Εξ. (21.7)

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$= (9{,}0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(-8{,}0 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(2{,}0\ \text{m})^2}(0{,}60\boldsymbol{i} - 0{,}80\boldsymbol{j})$$

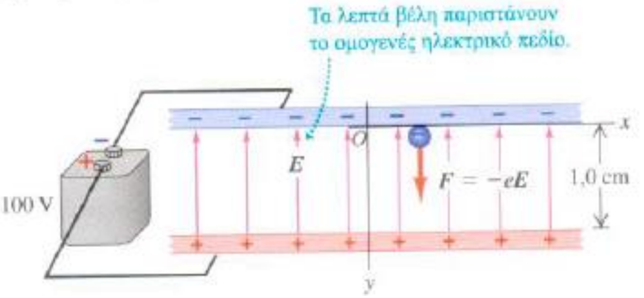
$$= (-11\ \text{N/C})\boldsymbol{i} + (14\ \text{N/C})\boldsymbol{j}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Επειδή το φορτίο q είναι αρνητικό, το $\boldsymbol{E}$ κατευθύνεται από το σημείο του πεδίου προς το φορτίο (τη σημειακή πηγή) με κατεύθυνση αντίθετη προς το $\hat{\boldsymbol{r}}$ (συγκρίνετε το Σχ. 21.17c). Αφήνουμε σε εσάς τον υπολογισμό του μέτρου και της κατεύθυνσης του $\boldsymbol{E}$ (δείτε Άσκηση 21.30).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21.7 ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΟ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Όταν οι πόλοι μιας μπαταρίας συνδεθούν με δύο παράλληλες πλάκες με μικρό διάκενο μεταξύ τους, τα φορτία που προκύπτουν στις πλάκες παράγουν ένα σχεδόν ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ μεταξύ των πλακών. (Στο επόμενο εδάφιο θα δούμε τον λόγο στον οποίο οφείλεται αυτό.) Εάν οι πλάκες απέχουν μεταξύ τους 1,0 cm και είναι συνδεδεμένες με μπαταρία 100 V, όπως δείχνει το **Σχ. 21.20**, το πεδίο κατευθύνεται κατακόρυφα προς το πάτωμα και το μέτρο είναι $E = 1{,}00 \times 10^4$ N/C. (a) Εάν ένα ηλεκτρόνιο (φορτίο $-e = -1{,}60 \times 10^{-9}$ C, μάζας $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg) αφεθεί ελεύθερο από κατάσταση ηρεμίας στην άνω πλάκα, ποια είναι η επιτάχυνσή του; (b) Ποια είναι η ταχύτητά του και η κινητική ενέργεια που αποκτά κατά τη μετακίνησή του κατά 1,0 cm προς την κάτω πλάκα; (c) Πόσος χρόνος απαιτείται για να διανύσει την απόσταση αυτή;

21.20 Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δύο παράλληλων αγώγιμων πλακών, συνδεδεμένων με μπαταρία 100 V. (Η απόσταση των πλακών έχει μεγεθυνθεί υπερβολικά στο σχήμα αυτό σε σχέση με τις πραγματικές διαστάσεις τους.)



ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το παράδειγμα αυτό περιλαμβάνει τη σχέση μεταξύ ηλεκτρικού πεδίου και ηλεκτρικής δύναμης. Επίσης, περιλαμβάνει τη σχέση μεταξύ δύναμης και επιτάχυνσης, τον ορισμό της κινητικής ενέργειας και τις κινηματικές σχέσεις μεταξύ επιτάχυνσης, απόστασης, ταχύτητας και χρόνου. Το Σχ. 21.20 δείχνει το σύστημα συντεταγμένων. Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο, και επομένως χρησιμοποιούμε την Εξ. (21.4) για να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο και την επιτάχυνσή του με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Επειδή το πεδίο είναι ομογενές μεταξύ των δύο πλακών, η δύναμη είναι σταθερή και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις σταθερής επιτάχυνσης από το Κεφ. 2 για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του ηλεκτρονίου και τον χρόνο διαδρομής του. Υπολογίζουμε την κινητική ενέργεια από τη σχέση $K = \frac{1}{2}mv^2$.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Παρόλο που το $\vec{E}$ έχει κατεύθυνση προς τα πάνω (στην κατεύθυνση $+y$), η δύναμη $\vec{F}$ έχει φορά προς τα κάτω (επειδή το φορτίο του ηλεκτρονίου είναι αρνητικό) και επομένως η F_y είναι αρνητική. Επειδή η F_y είναι σταθερή, η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου είναι σταθερή:

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{-eE}{m} = \frac{(-1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1{,}00 \times 10^4\ \text{N/C})}{9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}$$
$$= -1{,}76 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2$$

συνεχίζεται

(b) Το ηλεκτρόνιο ξεκινά από την ηρεμία, και επομένως η κίνησή του πραγματοποιείται μόνο στη διεύθυνση y (τη διεύθυνση της επιτάχυνσης). Μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του ηλεκτρονίου σε οποιαδήποτε θέση y από τη σταθερή επιτάχυνση Εξ. (2.13), $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0)$. Έχουμε $v_{0y} = 0$ και $y_0 = 0$, επομένως στο $y = -1{,}0$ cm $= -1{,}0 \times 10^{-2}$ m έχουμε

$$|v_y| = \sqrt{2a_y y} = \sqrt{2(-1{,}76 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2)(-1{,}0 \times 10^{-2}\ \text{m})}$$
$$= 5{,}9 \times 10^6\ \text{m/s}$$

Η ταχύτητα κατευθύνεται προς τα κάτω και επομένως $v_y = -5{,}9 \times 10^6$ m/s. Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(5{,}9 \times 10^6\ \text{m/s})^2$$
$$= 1{,}6 \times 10^{-17}\ \text{J}$$

(c) Από την Εξ. (2.8) για σταθερή επιτάχυνση προκύπτει $v_y = v_{0y} + a_y t$,

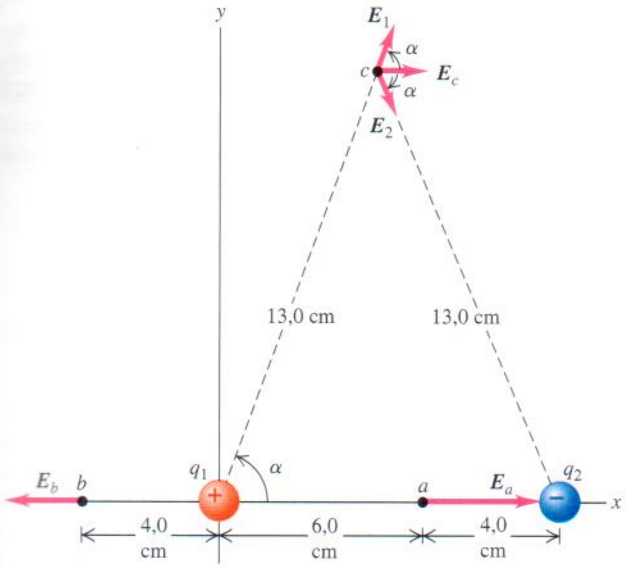
$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{a_y} = \frac{(-5{,}9 \times 10^6\ \text{m/s}) - (0\ \text{m/s})}{-1{,}76 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2}$$
$$= 3{,}4 \times 10^{-9}\ \text{s}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι σε προβλήματα που αφορούν υποατομικά σωματίδια, όπως ηλεκτρόνια, πολλά μεγέθη –συμπεριλαμβανόμενων της επιτάχυνσης, της ταχύτητας, της κινητικής ενέργειας και του χρόνου– θα έχουν *πολύ* διαφορετικές τιμές από τα καθημερινά αντικείμενα, όπως μπάλες του μπέιζμπολ και αυτοκίνητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21.8 ΠΕΔΙΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ, Ι

Σημειακά φορτία $q_1 = +12$ nC και $q_2 = -12$ nC απέχουν μεταξύ τους 0,100 m (**Σχ. 21.22**). (Αυτός ο συνδυασμός δύο φορτίων με ίσα μέτρα αλλά αντίθετα πρόσημα λέγεται *ηλεκτρικό δίπολο.*) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο το οποίο δημιουργείται από το q_1, το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από το q_2 και το ολικό πεδίο (a) στο σημείο a· (b) στο σημείο b: και (c) στο σημείο c.

21.22 Ηλεκτρικό πεδίο σε τρία σημεία a, b και c, το οποίο δημιουργείται από τα φορτία q_1 και q_2 τα οποία αποτελούν ηλεκτρικό δίπολο.



ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Πρέπει να βρούμε το ολικό ηλεκτρικό πεδίο σε διάφορα σημεία, που οφείλεται σε δύο σημειακά φορτία. Χρησιμοποιούμε την αρχή της επαλληλίας (ή της υπέρθεσης): $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$. Το Σχ. 21.22 δείχνει το σύστημα συντεταγμένων και τις θέσεις των σημείων a, b και c.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Σε κάθε σημείο του πεδίου, το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ εξαρτάται από τα πεδία $\boldsymbol{E}_1$ και $\boldsymbol{E}_2$· υπολογίζουμε πρώτα τα μέτρα των πεδίων $\boldsymbol{E}_1$ και $\boldsymbol{E}_2$ σε κάθε σημείο. Στο σημείο a το μέτρο του πεδίου $\boldsymbol{E}_{1a}$ δημιουργείται από το φορτίο q_1 και επομένως

$$\begin{aligned} E_{1a} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1|}{r^2} \\ &= (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0{,}060\ \mathrm{m})^2} \\ &= 3{,}0 \times 10^4\ \mathrm{N/C} \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το μέτρο των άλλων πεδίων κατά τον ίδιο τρόπο. Τα αποτελέσματα είναι

$$E_{1a} = 3{,}0 \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$

$$E_{1b} = 6{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$

$$E_{1c} = 6{,}39 \times 10^3\ \mathrm{N/C}$$

$$E_{2a} = 6{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$

$$E_{2b} = 0{,}55 \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$

$$E_{2c} = E_{1c} = 6{,}39 \times 10^3\ \mathrm{N/C}$$

Οι *κατευθύνσεις* των αντίστοιχων πεδίων είναι, σε όλες τις περιπτώσεις, *απομακρυνόμενες* από το θετικό φορτίο q_1 με κατεύθυνση *προς* το αρνητικό φορτίο q_2.

(a) Στο σημείο a, τα $\boldsymbol{E}_{1a}$ και $\boldsymbol{E}_{2a}$ κατευθύνονται και τα δύο προς τα δεξιά, επομένως

$$\boldsymbol{E}_a = E_{1a}\boldsymbol{i} + E_{2a}\boldsymbol{i} = (9{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C})\boldsymbol{i}$$

(b) Στο σημείο b το $\boldsymbol{E}_{1b}$ κατευθύνεται προς τα αριστερά και το $\boldsymbol{E}_{2b}$ κατευθύνεται προς τα δεξιά, και επομένως

$$\boldsymbol{E}_b = -E_{1b}\boldsymbol{i} + E_{2b}\boldsymbol{i} = (-6{,}2 \times 10^4\ \mathrm{N/C})\boldsymbol{i}$$

(c) Το Σχ. 21.22 δείχνει τις κατευθύνσεις των $\boldsymbol{E}_1$ και $\boldsymbol{E}_2$ στο σημείο c. Και τα δύο διανύσματα έχουν τις ίδιες συνιστώσες κατά τον άξονα x:

$$\begin{aligned} E_{1cx} = E_{2cx} = E_{1c}\cos\alpha &= (6{,}39 \times 10^3\ \mathrm{N/C})\left(\tfrac{5}{13}\right) \\ &= 2{,}46 \times 10^3\ \mathrm{N/C} \end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας, τα E_{1y} και E_{2y} έχουν ίσα μέτρα αλλά αντίθετες κατευθύνσεις, και επομένως το άθροισμά τους είναι ίσο με μηδέν. Επομένως,

$$\boldsymbol{E}_c = 2(2{,}46 \times 10^3\ \mathrm{N/C})\boldsymbol{i} = (4{,}9 \times 10^3\ \mathrm{N/C})\boldsymbol{i}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το $\boldsymbol{E}_c$ χρησιμοποιώντας την Εξ. (21.7) για το πεδίο σημειακού φορτίου. Το διάνυσμα $\boldsymbol{r}_1$ από το q_1 στο q_2 είναι $\boldsymbol{r}_1 = r\cos\alpha\boldsymbol{i} + r\sin\alpha\boldsymbol{j}$. Επομένως, το μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο κατευθύνεται από το φορτίο q_1 προς το σημείο c είναι $\hat{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{r}_1/r = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j}$. Για λόγους συμμετρίας το μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο δείχνει από το φορτίο q_2 προς το σημείο c, έχει την αντίθετη συνιστώσα x, όμως την ίδια συνιστώσα y $\hat{\boldsymbol{r}}_2 = -\cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j}$. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (21.7) για να γράψουμε τις σχέσεις των πεδίων $\boldsymbol{E}_{1c}$ και $\boldsymbol{E}_{2c}$ στο σημείο c σε μορφή διανυσμάτων και στη συνέχεια να υπολογίσουμε το άθροισμά τους. Επειδή $q_2 = -q_1$ και η απόσταση r έως το c είναι η ίδια και για τα δύο φορτία, προκύπτει

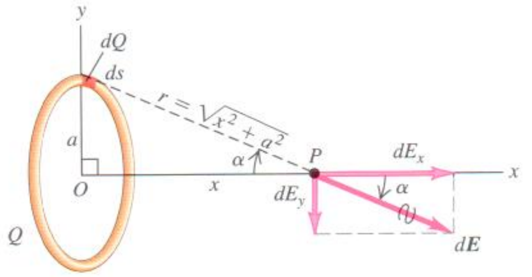
$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_c = \boldsymbol{E}_{1c} + \boldsymbol{E}_{2c} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}_2 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}(q_1\hat{\boldsymbol{r}}_1 + q_2\hat{\boldsymbol{r}}_2) \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}(\hat{\boldsymbol{r}}_1 - \hat{\boldsymbol{r}}_2) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}(2\cos\alpha)\boldsymbol{i} \\ &= 2(9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0{,}13\ \mathrm{m})^2}\left(\tfrac{5}{13}\right)\boldsymbol{i} \\ &= (4{,}9 \times 10^3\ \mathrm{N/C})\boldsymbol{i} \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, το οποίο υπολογίσαμε στο μέρος (c).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21.9 ΠΕΔΙΟ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΔΑΚΤΥΛΙΟΥ

Φορτίο Q είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο γύρω από έναν αγώγιμο δακτύλιο ακτίνας a (**Σχ. 21.23**). Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο P στον άξονα του δακτυλίου σε απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου.

21.23 Υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου στον άξονα του δακτυλίου του φορτίου. Στο σχήμα το φορτίο υποτίθεται ότι είναι θετικό.



ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το πρόβλημα αυτό αποτελεί πρόβλημα υπέρθεσης ηλεκτρικών πεδίων. Κάθε μικρό τεμάχιο φορτίου γύρω από τον δακτύλιο δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του άξονα x. Η μεταβλητή στην οποία στοχεύουμε είναι το ολικό ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο αυτό, το οποίο οφείλεται σε όλα τα μικρά φορτία.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Διαιρούμε τον δακτύλιο σε απειροστού μεγέθους τεμάχια ds, όπως δείχνει το Σχ. 21.23. Λόγω της γραμμικής πυκνότητας του φορτίου $\lambda = Q/2\pi a$, το φορτίο σε ένα απειροστό τεμάχιο ds είναι $dQ = \lambda ds$. Θεωρήστε δύο πανομοιότυπα εκ διαμέτρου αντίθετα τμήματα *–στο σχήμα όμως φαίνεται το ένα–* στη θέση $y = a$ και το άλλο στην εκ διαμέτρου αντίθετη θέση $y = -a$ στον δακτύλιο. Από το Παράδ. 21.4 παρατηρούμε ότι η συνισταμένη δύναμη $\boldsymbol{dF}$, η οποία ασκείται σε σημειακό δοκιμαστικό φορτίο στο σημείο P, και επομένως το ολικό πεδίο $\boldsymbol{dE}$, έχουν φορά κατά μήκος του άξονα x. Αυτό ισχύει για οποιαδήποτε αντικριστά ζεύγη τμημάτων στον δακτύλιο, και επομένως το πεδίο κατά μήκος του άξονα x είναι $\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{i}$.

Για να υπολογίσουμε το E_x, παρατηρήστε ότι το τετράγωνο της απόστασης r από ένα μόνο τμήμα του δακτυλίου μέχρι του σημείου P είναι $r^2 = x^2 + a^2$. Επομένως, το μέτρο της συνεισφοράς αυτού του τμήματος dE στο ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{x^2 + a^2}$$

Η συνιστώσα x του πεδίου αυτού είναι $dE_x = dE\cos\alpha$. Γνωρίζουμε ότι $dQ = \lambda ds$ και Σχ. 21.23 δείχνει ότι $\cos\alpha = x/r = x/(x^2 + a^2)^{1/2}$, και επομένως

$$dE_x = dE\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{x^2 + a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}ds$$

Για τον υπολογισμό του E_x, ολοκληρώνουμε τη σχέση αυτή σε ολόκληρο τον δακτύλιο – δηλαδή για τη μεταβλητή s από 0 έως $2\pi a$ (την περίμετρο του δακτυλίου). Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία του δακτυλίου, επομένως μεταφέρεται εκτός του ολοκληρώματος. Ως συνέπεια, προκύπτει

$$E_x = \int dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi a} ds$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}(2\pi a)$$

$$\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\boldsymbol{i} \qquad (21.8)$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Η Εξ. (21.8) δείχνει ότι $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ στο κέντρο του δακτυλίου ($x = 0$). Το συμπέρασμα αυτό είναι λογικό, επειδή φορτία σε αντίθετες πλευρές του δακτυλίου δρουν σε αντίθετες κατευθύνσεις σε δοκιμαστικό φορτίο στο κέντρο του δακτυλίου και το διανυσματικό άθροισμα καθενός τέτοιου ζεύγους φορτίου είναι ίσο με μηδέν. Όταν το σημειακό πεδίο P μετακινηθεί κατά μήκος του άξονα συμμετρίας σε απόσταση πολύ μεγαλύτερη από την ακτίνα του δακτυλίου, έχουμε $x \gg a$ και η τιμή του παρονομαστή στην Εξ. (21.8) πλησιάζει περίπου την τιμή x^3. Στο όριο αυτό το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P είναι

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x^2}\boldsymbol{i}$$

Δηλαδή, όταν ο δακτύλιος βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, ώστε η ακτίνα του να θεωρείται αμελητέα σε σύγκριση με την απόσταση x, το πεδίο που δημιουργεί είναι το ίδιο με το πεδίο που δημιουργεί σημειακό φορτίο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21.10 ΠΕΔΙΟ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Θετικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα κατά μήκος του άξονα y μεταξύ $y = -a$ και $y = +a$. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο P στον άξονα x σε απόσταση x από την αρχή των συντεταγμένων.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το **Σχ. 21.24** περιγράφει την κατάσταση. Όπως στο Παράδ. 21.9, θα πρέπει να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο οφείλεται σε μια συνεχή κατανομή του φορτίου. Η μεταβλητή, η οποία είναι ο στόχος, είναι η σχέση του ηλεκτρικού πεδίου στο πεδίο P ως συνάρτηση του x. Ο άξονας x είναι κάθετος στον άξονα y και διέρχεται από το μέσο του τμήματος $y = -a$ και $y = +a$, όπως φαίνεται στο Σχ. 21.24, με αποτέλεσμα να μπορούμε να αξιοποιήσουμε τη συμμετρία της κατανομής του φορτίου.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Διαιρούμε το γραμμικό φορτίο μήκους $2a$ σε απειροστά τμήματα μήκους dy. Η γραμμική πυκνότητα φορτίου δίνεται από τη σχέση $\lambda = Q/2a$, και το φορτίο σε στοιχειώδες τμήμα της γραμμικής κατανομής είναι $dQ = \lambda dy = (Q/2a)dy$. Η απόσταση r από το στοιχειώδες τμήμα σε κάποιο ύψος y ως το σημείο

συνεχίζεται

του πεδίου P είναι $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ και επομένως το μέτρο του πεδίου στο σημείο P το οποίο οφείλεται στο τμήμα φορτίου σε ύψος y είναι

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{dy}{(x^2 + y^2)}$$

Το Σχ. 21.24 δείχνει ότι οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου κατά τον άξονα x και κατά τον άξονα y είναι

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{x\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$dE_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{y\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Για να υπολογίσουμε το ολικό πεδίο στο σημείο P θα πρέπει να προσθέσουμε τα πεδία όλων των τμημάτων κατά μήκος της γραμμικής κατανομής – δηλαδή θα πρέπει να ολοκληρώσουμε τις σχέσεις αυτές από $y = -a$ έως $y = +a$. Πρέπει να ασχοληθείτε με τις λεπτομέρειες της ολοκλήρωσης (πιθανόν να πρέπει να συμβουλευθείτε πίνακα ολοκληρωμάτων). Τα αποτελέσματα είναι

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{+a}\frac{x\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{+a}\frac{y\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

ή σε διανυσματική μορφή

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2 + a^2}}\boldsymbol{i} \qquad (21.9)$$

Το $\boldsymbol{E}$ έχει κατεύθυνση απομακρυνόμενη από τη γραμμική κατανομή του φορτίου εάν το φορτίο είναι θετικό και προς τη γραμμική κατανομή του φορτίου εάν το φορτίο είναι αρνητικό.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα συμμετρίας, όπως στο Παράδ. 21.9, θα μπορούσαμε να υποψιαστούμε ότι η συνιστώσα του πεδίου E_y θα ήταν μηδενική· εάν τοποθετήσουμε θετικό δοκιμαστικό φορτίο στο σημείο P, το άνω ήμισυ της γραμμικής κατανομής του φορτίου ωθεί το φορτίο προς τα κάτω και το κάτω ήμισυ του φορτίου το ωθεί προς τα πάνω με ίσο μέτρο δύναμης. Η συμμετρία επίσης μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το άνω ήμισυ της κατανομής και το κάτω ήμισυ της κατανομής συνεισφέρουν εξίσου στο ολικό πεδίο στο σημείο P.

Εάν το μήκος του γραμμικού φορτίου είναι πολύ *μικρό* (ή το σημείο ενδιαφέροντος του πεδίου απέχει πάρα πολύ από το φορτίο), ώστε να ισχύει ότι $x \gg a$, μπορούμε να αγνοήσουμε το a στον παρονομαστή στην Εξ. (21.9). Τότε το πεδίο μπορεί να θεωρηθεί ως το πεδίο για σημειακό φορτίο, όπως στο Παράδ. 21.9:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x^2}\boldsymbol{i}$$

Για να αντιληφθούμε τι συμβαίνει εάν το μήκος του τμήματος που φέρει το φορτίο είναι πολύ μεγάλο (ή το σημείο του πεδίου είναι πολύ κοντά σε αυτό) ώστε $a \gg x$, επαναδιατυπώνουμε την Εξ. (2.19) ως εξής:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{x\sqrt{(x^2/a^2) + 1}}\boldsymbol{i} \qquad (21.10)$$

Στο όριο $a \gg x$ μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο x^2/a^2 στον παρονομαστή της Εξ. (21.10), και επομένως

$$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}\boldsymbol{i}$$

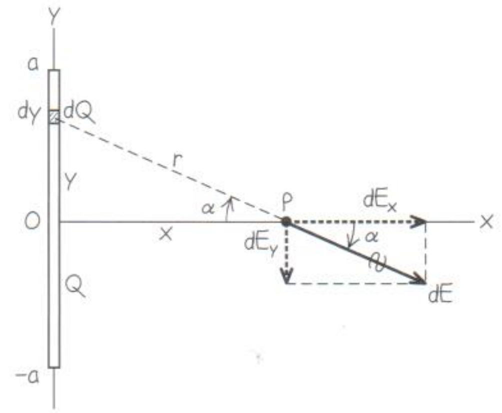
Αυτό είναι το πεδίο μιας *απείρου μήκους* γραμμικής κατανομής φορτίου. Σε κάθε σημείο P και σε κάθετη απόσταση r από τη γραμμική κατανομή του φορτίου σε *οποιαδήποτε* κατεύθυνση, το $\boldsymbol{E}$ έχει μέτρο

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \qquad \text{(γραμμικό φορτίο απείρου μήκους)}$$

Θα πρέπει να τονιστεί ότι το πεδίο αυτό είναι ανάλογο του $1/r$ αντί $1/r^2$, όπως για το σημειακό φορτίο.

Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει τέτοια περίπτωση, όπως γραμμή φορτίου απείρου μήκους. Όμως, όταν το σημείο του πεδίου είναι πολύ κοντά στη γραμμή φορτίου, δεν υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ του αποτελέσματος για απείρου μήκους γραμμή φορτίου και της πραγματικότητας στην πράξη για πεπερασμένη γραμμή. Ως παράδειγμα, εάν η απόσταση r του σημείου του πεδίου από το κέντρο της γραμμής είναι 1 % του μήκους της γραμμής, η τιμή του E αποκλίνει από την πραγματική τιμή λιγότερο από 0,02 %.

21.24 Σχεδιάγραμμα περιγραφής του προβλήματος.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21.11 ΠΕΔΙΟ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΔΙΣΚΟΥ

Η επιφάνεια ενός μη αγώγιμου δίσκου ακτίνας R είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με θετικά φορτία επιφανειακής πυκνότητας σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο κατά μήκος του άξονα του δίσκου σε απόσταση x από το κέντρο του. Υποθέστε ότι το x είναι θετικό.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το **Σχ. 21.25** απεικονίζει την κατανομή του φορτίου ως συλλογή ομόκεντρων δακτυλίων με φορτίο dQ. Στο Παράδ. 21.9 καταλήξαμε στην Εξ. (21.8) για το ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα, το οποίο οφείλεται σε έναν ομοιόμορφα φορτισμένο δακτύλιο, ώστε το μόνο που απαιτείται είναι η ολοκλήρωση όλων των δακτυλίων.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Ένας τυπικός δακτύλιος έχει φορτίο dQ, εσωτερική ακτίνα r και εξωτερική ακτίνα $r+dr$. Το εμβαδόν του είναι ίσο με το γινόμενο του πλάτους του δακτυλίου dr πολλαπλασιασμένο επί το μήκος της περιφέρειάς του $2\pi r$, ή $dA = 2\pi r\, dr$.

συνεχίζεται

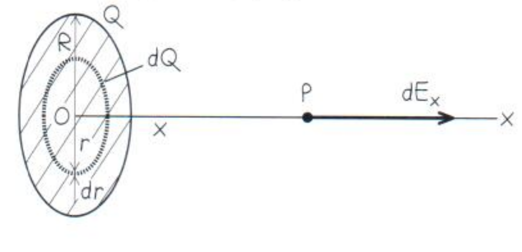
Το φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας είναι $\sigma = dQ/dA$, και επομένως το φορτίο του στοιχειώδους δακτυλίου είναι $dQ = \sigma\, dA = 2\pi\sigma r\, dr$. Χρησιμοποιούμε dQ αντί του Q στην Εξ. (21.8), την έκφραση για το πεδίο, το οποίο οφείλεται σε δακτύλιο, το οποίο βρήκαμε στο Παράδ. 21.9, και αντικαθιστούμε τον δακτύλιο ακτίνας a με r. Τότε η συνιστώσα του πεδίου dE_x, στο σημείο P, το οποίο οφείλεται στον δακτύλιο, είναι

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi\sigma r x\, dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Για να υπολογίσουμε το ολικό πεδίο, το οποίο οφείλεται σε όλους τους δακτυλίους, ολοκληρώνουμε το dE_x ως προς r από $r = 0$ μέχρι $r = R$ (*όχι* από $-R$ μέχρι R):

$$E_x = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(2\pi\sigma r\, dr)x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{4\epsilon_0}\int_0^R \frac{2r\, dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

21.25 Το σχέδιό μας για το πρόβλημα αυτό.



Μπορείτε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα αυτό με την αντικατάσταση $t = x^2 + r^2$, το οποίο δίνει $dt = 2r\, dr$. Στη συνέχεια μπορείτε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα και να καταλήξετε στο παρακάτω αποτέλεσμα.

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} + \frac{1}{x}\right] \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(R^2/x^2) + 1}}\right] \end{aligned} \tag{21.11}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Εάν ο δίσκος είναι πολύ μεγάλος (ή η απόστασή μας από τον δίσκο είναι πολύ μικρή) ώστε να ισχύει $R \gg x$, ο όρος $1/\sqrt{(R^2/x^2) + 1}$ στην Εξ. (21.11) είναι πολύ μικρότερος από το 1. Τότε η Εξ. (21.11) γίνεται

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{21.12}$$

Το τελικό μας αποτέλεσμα δεν περιέχει την απόσταση x από το επίπεδο. Επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργήθηκε από μια *άπειρη* επίπεδη κατανομή φορτίου είναι *ανεξάρτητη από την απόσταση από την επιφάνεια.* Η διεύθυνση του πεδίου είναι παντού κάθετη προς την επιφάνεια του μη αγώγιμου φύλλου με προσανατολισμό να απομακρύνεται από την επιφάνεια. Δεν υπάρχει βέβαια φορτισμένη επιφάνεια απείρων διαστάσεων, όμως εάν οι διαστάσεις της είναι πολύ μεγαλύτερες σε σχέση με την απόσταση x του σημείου P του πεδίου από την επιφάνεια, η σχέση του πεδίου διατυπώνεται αρκετά σωστά από την Εξ. (21.12).

Εάν το σημείο P βρίσκεται στα *αριστερά* του επιπέδου ($x < 0$), το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, εκτός του ότι η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$ έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά αντί προς τα δεξιά. Εάν η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι αρνητική, οι κατευθύνσεις των πεδίων και στις δύο πλευρές κατευθύνονται προς αυτό και στις δύο πλευρές του αντί να απομακρύνονται.

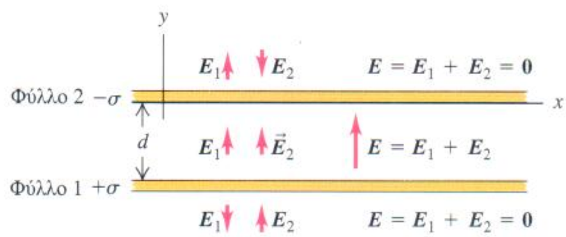
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21.12 ΠΕΔΙΟ ΔΥΟ ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΩΝ ΦΥΛΛΩΝ ΑΠΕΙΡΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

Δύο απείρων διαστάσεων επίπεδα φύλλα ομοιόμορφης επιφανειακής πυκνότητας φορτίου $+\sigma$ και $-\sigma$ τοποθετούνται αντικριστά το ένα ως προς το άλλο και η μεταξύ τους απόσταση είναι d (**Σχ. 21.26**). Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των δύο φύλλων πάνω από το αρνητικά φορτισμένο φύλλο και κάτω από το θετικά φορτισμένο φύλλο.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Η Εξ. (21.12) υπολογίζει το ηλεκτρικό πεδίο το οποίο οφείλεται σε ένα απείρων διαστάσεων επίπεδο φύλλο φορτίου. Για να υπολογίσουμε το πεδίο, το οποίο οφείλεται σε *δύο* φύλλα, συνδυάζουμε τα πεδία χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας (ή της υπέρθεσης) (Σχ. 21.26).

21.26 Υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργούν δύο αντιθέτως φορτισμένα απείρων διαστάσεων φύλλα. Στο Σχ. (21.26) απεικονίζεται η εγκάρσια διατομή των δύο φύλλων.



ΕΠΙΛΥΣΗ: Από την Εξ. (21.12), και τα δύο πεδία $\boldsymbol{E}_1$ και $\boldsymbol{E}_2$ έχουν το ίδιο μέτρο σε όλα τα σημεία, ανεξάρτητα από την απόσταση, από κάθε φύλλο:

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Από το Παράδ. 21.11, το $\boldsymbol{E}_1$ σε κάθε σημείο του χώρου κατευθύνεται *απομακρυνόμενο* από το φύλλο 1 και το $\boldsymbol{E}_2$ επίσης κατευθύνεται *προς* το φύλλο 2.

Στον χώρο μεταξύ των δύο φύλλων, τα δύο πεδία $\boldsymbol{E}_1$ και $\boldsymbol{E}_2$ ενισχύουν το ένα το άλλο: αντίθετα, στον χώρο πάνω από το αρνητικά φορτισμένο φύλλο και κάτω από το θετικά φορτισμένο φύλλο αλληλοαναιρούνται, και επομένως το ολικό πεδίο στους χώρους αυτούς είναι μηδέν.

Επομένως, το ολικό πεδίο είναι

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{πάνω από το άνω φύλλο} \\ \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\boldsymbol{j} & \text{μεταξύ των φύλλων} \\ \mathbf{0} & \text{κάτω από το χαμηλότερο φύλλο} \end{cases}$$

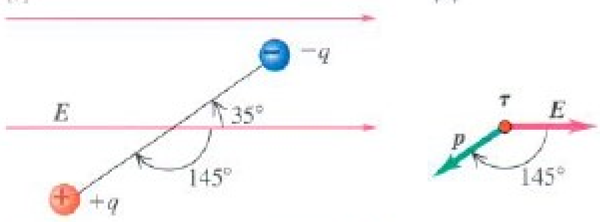
ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Επειδή θεωρήσαμε τα φύλλα ως απείρων διαστάσεων, το αποτέλεσμα αυτό δεν εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ των δύο φύλλων. Το αποτέλεσμα δείχνει ότι το πεδίο μεταξύ των αντιθέτως φορτισμένων φύλλων ουσιαστικά είναι ομογενές εάν η απόστασή τους είναι πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις των δύο φύλλων. Μάλιστα, χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα αυτό στο Παράδ. 21.7 (Εδ. 21.4).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21.13 ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΡΟΠΗ ΕΠΙ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ

Το **Σχ. 21.32a** δείχνει ένα ηλεκτρικό δίπολο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μέτρου $5{,}0 \times 10^5$ N/C, του οποίου ο προσανατολισμός είναι παράλληλος προς το επίπεδο του σχήματος. Τα φορτία είναι $\pm 1{,}6 \times 10^{-19}$ C και βρίσκονται στο επίπεδο αυτό, ενώ η μεταξύ τους απόσταση είναι $0{,}125$ nm $= 0{,}125 \times 10^{-9}$ m. Υπολογίστε (a) την ολική δύναμη την οποία ασκεί το πεδίο στο δίπολο· (b) το μέτρο και τη φορά της διπολικής ροπής η οποία ασκείται στο δίπολο· (c) το μέτρο και την κατεύθυνση της ροπής· (d) τη δυναμική ενέργεια του συστήματος στη θέση αυτή που φαίνεται.

21.32 (a) Ένα ηλεκτρικό δίπολο. (b) Κατευθύνσεις της ηλεκτρικής διπολικής ροπής, του ηλεκτρικού πεδίου και της ροπής (το $\vec{\tau}$ κατευθύνεται εκτός της σελίδας).

(a) (b)



ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Στο πρόβλημα αυτό χρησιμοποιούμε τη σχετική θεωρία για το ηλεκτρικό δίπολο, τοποθετημένο μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο. Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ για κάθε σημειακό φορτίο στο δίπολο για να υπολογίσουμε τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο δίπολο. Με την Εξ. (21.14) υπολογίζουμε την ηλεκτρική διπολική ροπή και με την Εξ. (21.18) υπολογίζουμε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Το πεδίο είναι ομογενές και έτσι οι δυνάμεις οι οποίες ασκούνται στα δύο φορτία είναι ίσες και αντίθετες. Επομένως, η συνισταμένη δύναμη στο δίπολο είναι μηδενική.

(b) Το μέτρο p της ηλεκτρικής διπολικής ροπής $\boldsymbol{p}$ είναι

$$p = qd = (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(0{,}125 \times 10^{-9}\ \text{m})$$
$$= 2{,}0 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m}$$

Η κατεύθυνση του $\boldsymbol{p}$ σχηματίζει δεξιόστροφη γωνία 145° ως προς τη κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου (Σχ. 21.32b).

(c) Το μέτρο της ροπής είναι

$$\tau = pE\sin\phi = (2{,}0 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m})(5{,}0 \times 10^5\ \text{N/C})(\sin 145°)$$
$$= 5{,}7 \times 10^{-24}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Με τον δεξιόστροφο κανόνα για διανυσματικά γινόμενα (δείτε Εδ. 1.10), η κατεύθυνση της ροπής $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$ είναι κάθετη στη σελίδα με φορά εξερχόμενη από τη σελίδα. Η φορά αυτή αντιστοιχεί σε αριστερόστροφη ροπή, η οποία τείνει στην ευθυγράμμιση του $\boldsymbol{p}$ με το $\boldsymbol{E}$.

(d) Η δυναμική ενέργεια είναι

$$U = -pE\cos\phi$$
$$= -(2{,}0 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m})(5{,}0 \times 10^5\ \text{N/C})(\cos 145°)$$
$$= 8{,}2 \times 10^{-24}\ \text{J}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Οι τιμές του μέτρου του φορτίου, της απόστασης μεταξύ των φορτίων, της διπολικής ροπής και της δυναμικής ενέργειας είναι για όλα τα παραπάνω μεγέθη πολύ μικρές, όμως όλες είναι χαρακτηριστικά μεγέθη των μορίων.