SEARS & ZEMANSKY

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ με Σύγχρονη Φυσική

3η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Τόμος Β

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ ΟΠΤΙΚΗ - ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

YOUNG ΚΑΙ FREEDMAN

Θ.Η. Αλεξόπουλος, ΕΜΠ
Ι.Α. Αρβανιτίδης, ΑΠΘ
Α.Α. Αργυρίου, Π. Πατρών
Ε.Α. Δρης, ΕΜΠ
Η.Σ. Ζουμπούλης, ΕΜΠ
Η.Κ. Κατσούφης, ΕΜΠ
Γ.Α. Κουρούκλης, ΑΠΘ
Κ.Ε. Παρασκευαΐδης, ΕΜΠ
Μ.Ν. Πιζάνιας, Π. Πατρών
Ι.Π. Ρίζος, Π. Ιωαννίνων
Θ.Ν. Τομαράς, Π. Κρήτης
Κ. Χριστοδουλίδης, ΕΜΠ

ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

1. ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

ΕΠΙΛΟΓΗ, ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
Ηλίας Κατσούφης

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ:
Τζένη Πάλμου

Απόδοση βιβλίου στην Ελληνική γλώσσα και Επιμέλεια (αλφαβητικά):

Θ.Η. Αλεξόπουλος, *Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Ι.Α. Αρβανιτίδης, *Αναπλ. Καθηγητής Φυσικής του Τμήματος Φυσικής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης*

Α.Α. Αργυρίου, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών*

Ε.Α. Δρης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Η.Σ. Ζουμπούλης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Η.Κ. Κατσούφης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Γ.Α. Κουρούκλης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής του Τμήματος Χημικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης*

Κ.Ε. Παρασκευαΐδης, *τ. Αναπλ. Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Μ.Ν. Πιζάνιας, *Ομότιμος Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών*

Ι.Π. Ρίζος, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων*

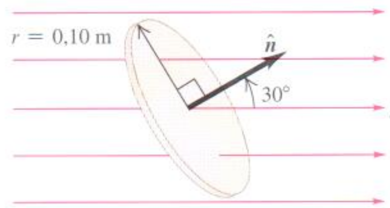
Θ.Ν. Τομαράς, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Κρήτης*

Κ. Χριστοδουλίδης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.1 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΡΟΗ ΔΙΑΜΕΣΟΥ ΕΝΟΣ ΔΙΣΚΟΥ

Ένας δίσκος ακτίνας 0,10 m προσανατολίζεται έτσι ώστε το μοναδιαίο του διάνυσμα $\hat{n}$ να σχηματίζει γωνία 30° με ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ μέτρου $2{,}0 \times 10^3$ N/C (**Σχ. 22.7**). (Επειδή δεν πρόκειται για κλειστή επιφάνεια, δεν υπάρχει «εσωτερική» ή «εξωτερική». Γι' αυτό πρέπει να καθορίσουμε την κατεύθυνση του $\hat{n}$ στο σχήμα.) (a) Πόση είναι η ολική ηλεκτρική ροή διαμέσου του δίσκου; (b) Πόση είναι η ολική ηλεκτρική ροή διαμέσου του δίσκου, εάν στραφεί έτσι ώστε το $\hat{n}$ να είναι κάθετο στο $\boldsymbol{E}$; (c) Πόση είναι η ολική ηλεκτρική ροή διαμέσου του δίσκου εάν το $\hat{n}$ είναι παράλληλο προς το $\boldsymbol{E}$;

22.7 Η ηλεκτρική ροή Φ_E διαμέσου ενός δίσκου εξαρτάται από τη γωνία μεταξύ της καθέτου $\hat{n}$ στον δίσκο και του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$.



ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το πρόβλημα αυτό αφορά μια επίπεδη επιφάνεια σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και επομένως εφαρμόζουμε όσα αναπτύχθηκαν στο εδάφιο αυτό. Υπολογίζουμε την ηλεκτρική ροή από την Εξ. (22.1).

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Το εμβαδόν του δίσκου είναι $A = \pi(0{,}10\text{ m})^2 = 0{,}0314\text{ m}^2$ και η γωνία μεταξύ των $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{A} = A\hat{n}$ είναι $\phi = 30°$, επομένως από την Εξ. (22.1),

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2{,}0 \times 10^3\text{ N/C})(0{,}0314\text{ m}^2)(\cos 30°)$$
$$= 54\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

(b) Η κάθετη στον δίσκο είναι τώρα κάθετη στο $\boldsymbol{E}$, και επομένως, $\phi = 90°$, $\cos\phi = 0$ και $\Phi_E = 0$.

(c) Η κάθετη στον δίσκο είναι τώρα παράλληλη στο $\boldsymbol{E}$, και επομένως, $\phi = 0$ και $\cos\phi = 1$:

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2{,}0 \times 10^3\text{ N/C})(0{,}0314\text{ m}^2)(1)$$
$$= 63\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Το αποτέλεσμα στο ερώτημα (b) είναι μικρότερο από αυτό του ερωτήματος (a), το οποίο με τη σειρά του είναι μικρότερο από αυτό στο ερώτημα (c). Αναμένεται αυτή η διαφορά;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.2 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΡΟΗ ΔΙΑΜΕΣΟΥ ΕΝΟΣ ΚΥΒΟΥ

ΛΥΣΗ

Φανταστική κυβική επιφάνεια ακμής L βρίσκεται σε περιοχή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$. Υπολογίστε την ηλεκτρική ροή διαμέσου κάθε έδρας του κύβου και την ολική ροή διαμέσου του κύβου, όταν ο κύβος (a) προσανατολιστεί έτσι ώστε δύο πλευρές να είναι κάθετες στο πεδίο $\boldsymbol{E}$, όπως φαίνεται στο **Σχ. 22.8a**· (b) στραφεί κατά γωνία θ ως προς κατακόρυφο άξονα (Σχ. 22.8b).

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Επειδή το πεδίο $\boldsymbol{E}$ είναι ομογενές και καθεμία από τις έξι πλευρές του κύβου είναι επίπεδη, υπολογίζουμε τη ροή Φ_{Ei} διαμέσου κάθε έδρας χρησιμοποιώντας τις Εξ. (22.3) και (22.4). Η ολική ροή διαμέσου του κύβου είναι το άθροισμα των έξι ροών ξεχωριστά.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Το Σχ. 22.8a δείχνει τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{n}_1$ μέχρι $\hat{n}_6$ για κάθε έδρα· κάθε μοναδιαίο διάνυσμα κατευθύνεται από την κλειστή επιφάνεια του κύβου προς τα *έξω*. Η γωνία μεταξύ των $\boldsymbol{E}$ και $\hat{n}_1$ είναι 180°, η γωνία μεταξύ των $\boldsymbol{E}$ και $\hat{n}_2$ είναι 0°, και η γωνία μεταξύ του $\boldsymbol{E}$ και καθενός από τα άλλα τέσσερα μοναδιαία διανύσματα είναι 90°. Κάθε έδρα έχει εμβαδόν L^2 και επομένως οι ροές διαμέσου κάθε επιφάνειας είναι

$$\Phi_{E1} = \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_1 A = EL^2\cos 180° = -EL^2$$
$$\Phi_{E2} = \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2 A = EL^2\cos 0° = +EL^2$$
$$\Phi_{E3} = \Phi_{E4} = \Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2\cos 90° = 0$$

Η ροή είναι αρνητική στην έδρα 1, στην οποία το $\boldsymbol{E}$ κατευθύνεται προς το εσωτερικό του κύβου, και θετική στην έδρα 2, στην οποία το $\boldsymbol{E}$ κατευθύνεται προς το εξωτερικό του κύβου. Η *ολική* ροή διαμέσου του κύβου είναι

$$\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$$
$$= -EL^2 + EL^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

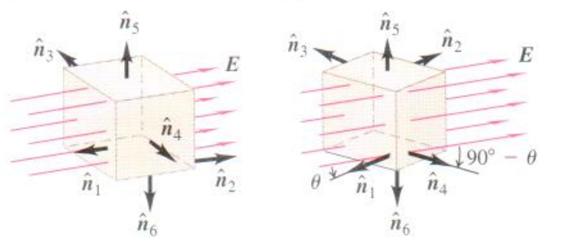
(b) Το πεδίο $\boldsymbol{E}$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τα μοναδιαία διανύσματα 1 και 3, επομένως οι ροές διαμέσου των εδρών 1 και 3 είναι αρνητικές· το $\boldsymbol{E}$ σχηματίζει οξεία γωνία με τα μοναδιαία διανύσματα 2 και 4, επομένως οι ροές διαμέσου των εδρών 2 και 4 είναι θετικές. Υπολογίζουμε κάθε ροή ξεχωριστά

$$\Phi_{E1} = \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_1 A = EL^2\cos(180° - \theta) = -EL^2\cos\theta$$
$$\Phi_{E2} = \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2 A = +EL^2\cos\theta$$
$$\Phi_{E3} = \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_3 A = EL^2\cos(90° + \theta) = -EL^2\sin\theta$$
$$\Phi_{E4} = \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_4 A = EL^2\cos(90° - \theta) = +EL^2\sin\theta$$
$$\Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2\cos 90° = 0$$

Η ολική ροή $\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$ διαμέσου της επιφάνειας του κύβου είναι και πάλι μηδέν.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Καταλήξαμε στο ίδιο συμπέρασμα στη συζήτησή μας του Σχ. 22.3c: Η ροή ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου διαμέσου κλειστής επιφάνειας, στο εσωτερικό της οποίας δεν υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο, είναι ίση με το μηδέν.

22.8 Ηλεκτρική ροή ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$ διαμέσου κιβωτίου σχήματος κύβου ακμής L σε δύο προσανατολισμούς.

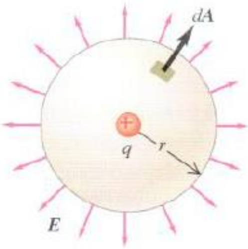


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.3 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΡΟΗ ΔΙΑΜΕΣΟΥ ΜΙΑΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Σημειακό φορτίο ίσο με $q = +3{,}0\ \mu C$ περιβάλλεται από μια φανταστική σφαίρα ακτίνας $r = 0{,}20$ m, της οποίας το κέντρο συμπίπτει με τη θέση του φορτίου (**Σχ. 22.9**). Να βρεθεί η ηλεκτρική ροή διαμέσου της σφαίρας, η οποία οφείλεται στο φορτίο.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Η επιφάνεια δεν είναι επίπεδη και το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι ομογενές, επομένως για να υπολογίσουμε την ηλεκτρική ροή (ζητούμενη μεταβλητή) πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον γενικό ορισμό, Εξ. (22.5). Επειδή το κέντρο της σφαίρας συμπίπτει με το σημειακό φορτίο, το $\boldsymbol{E}$ σε κάθε σημείο της σφαιρικής επιφάνειας κατευθύνεται προς το εξωτερικό της σφαίρας και είναι κάθετο στην επιφάνεια. Η θετική φορά και για το $\boldsymbol{E}$ και για το $\hat{\boldsymbol{n}}$ είναι προς τα έξω, επομένως $E_{\perp} = E$ και η ροή διαμέσου της στοιχειώδους επιφάνειας dA



22.9 Ηλεκτρική ροή δια μέσου μιας σφαίρας, της οποίας το κέντρο συμπίπτει με τη θέση του φορτίου.

είναι $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = E\,dA$. Αυτό απλοποιεί σημαντικά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της Εξ. (22.5).

ΕΠΙΛΥΣΗ: Πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της Εξ. (22.5), $\Phi_E = \int E\,dA$. Σε κάθε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας ακτίνας r το ηλεκτρικό πεδίο έχει το ίδιο μέτρο $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Επομένως, το E μπορεί να θεωρηθεί σταθερό στον υπολογισμό και να τεθεί εκτός του ολοκληρώματος, το οποίο γίνεται $\Phi_E = E\int dA = EA$, όπου A είναι το εμβαδόν της σφαιρικής επιφάνειας: $A = 4\pi r^2$. Συνεπώς, η ολική ροή διαμέσου της σφαίρας είναι

$$\Phi_E = EA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{3{,}0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}{8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}} = 3{,}4 \times 10^5\ \mathrm{N \cdot m^2/C}$$

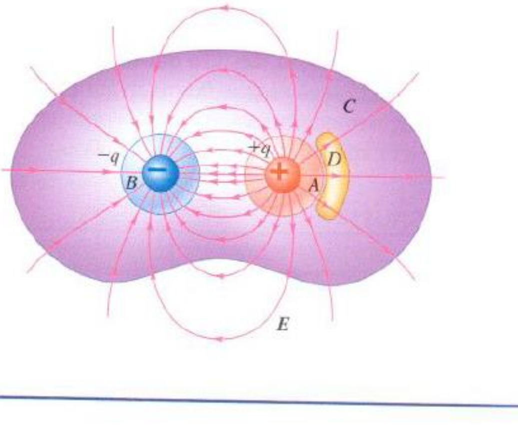
ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Η ακτίνα r της σφαίρας απαλείφεται από το αποτέλεσμα για τη Φ_E. Θα είχαμε υπολογίσει την ίδια ροή για μια σφαίρα ακτίνας 2,0 m ή 200 m. Καταλήξαμε ουσιαστικά στο ίδιο συμπέρασμα στη συζήτησή μας του Σχ. 22.4 στο Εδ. 22.1, όπου θεωρήσαμε δύο κλειστές επιφάνειες σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαφορετικές διαστάσεις, στο εσωτερικό των οποίων υπήρχε σημειακό φορτίο. Διαπιστώσαμε τότε ότι η ροή του $\boldsymbol{E}$ είναι ανεξάρτητη από τις διαστάσεις της επιφάνειας· το ίδιο ισχύει και για σφαιρική επιφάνεια. Πράγματι, η ροή διαμέσου μιας *οποιασδήποτε* επιφάνειας, που περικλείει ένα σημειακό φορτίο, είναι ανεξάρτητη από το σχήμα ή το μέγεθος της επιφάνειας, όπως θα δούμε σύντομα.

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.4 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΡΟΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΚΛΕΙΟΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ

Το **Σχ. 22.15** δείχνει το πεδίο που δημιουργείται από δύο σημειακά φορτία $+q$ και $-q$ (ηλεκτρικό δίπολο). Βρείτε την ηλεκτρική ροή διαμέσου καθεμίας από τις κλειστές επιφάνειες A, B, C και D.

ΛΥΣΗ

22.15 Ο ολικός αριθμός των δυναμικών γραμμών, που εξέρχονται από μια κλειστή επιφάνεια, είναι ανάλογος προς το ολικό φορτίο που αυτή περικλείει.



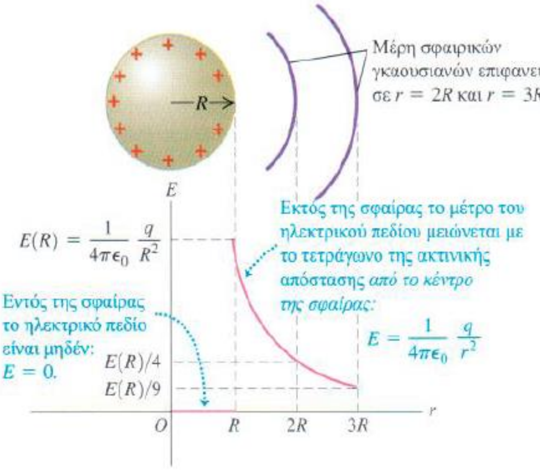
Ο νόμος τους Gauss, Εξ. (22.8), προβλέπει ότι ολική ηλεκτρική ροή διαμέσου κλειστής επιφάνειας είναι ίση με το ολικό εγκλειόμενο φορτίο διαιρεμένο διά του ϵ_0. Στο Σχ. 22.15, η επιφάνεια A (η κόκκινη επιφάνεια) περικλείει θετικό φορτίο και επομένως $Q_{εγκ} = +q$· η επιφάνεια B (η μπλε επιφάνεια) περικλείει αρνητικό φορτίο και επομένως $Q_{εγκ} = -q$. Η επιφάνεια C (η μοβ επιφάνεια) περικλείει *και τα δύο* φορτία και επομένως $Q_{εγκ} = +q + (-q) = 0$· τέλος, η επιφάνεια D (η κίτρινη επιφάνεια) δεν περικλείει φορτίο, άρα $Q_{εγκ} = 0$. Επομένως, χωρίς να προβούμε σε ολοκληρώσεις, έχουμε $\Phi_{EA} = +q/\epsilon_0$, $\Phi_{EB} = -q/\epsilon_0$, και $\Phi_{EC} = \Phi_{ED} = 0$. Τα αποτελέσματα αυτά εξαρτώνται μόνο από τα περικλειόμενα φορτία από κάθε γκαουσιανή επιφάνεια και όχι από τα ακριβή σχήματα των επιφανειών.

Μπορούμε να συνάγουμε παρόμοια συμπεράσματα εξετάζοντας τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου. Όλες οι δυναμικές γραμμές που διαπερνούν την επιφάνεια A κατευθύνονται προς τα έξω, άρα η ροή διαμέσου της A δεν μπορεί παρά να είναι θετική. Ομοίως, η ροή διαμέσου της B δεν μπορεί παρά να είναι αρνητική, καθώς όλες οι δυναμικές γραμμές που τη διαπερνούν κατευθύνονται προς το εσωτερικό. Για αμφότερες τις επιφάνειες C και D, υπάρχουν τόσες δυναμικές γραμμές που κατευθύνονται προς το εσωτερικό της επιφάνειας όσες κατευθύνονται προς το εξωτερικό, επομένως η ροή διαμέσου καθεμιάς από αυτές τις επιφάνειες είναι μηδέν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.5 ΠΕΔΙΟ ΜΙΑΣ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΗΣ ΑΓΩΓΙΜΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Τοποθετούμε συνολικό θετικό φορτίο q σε μια συμπαγή αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R (**Σχ. 22.18**). Να υπολογιστεί το $\boldsymbol{E}$ σε οποιοδήποτε σημείο μέσα ή έξω από τη σφαίρα.

22.18 Υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο μιας αγώγιμης σφαίρας με θετικό φορτίο q. Έξω από τη σφαίρα το πεδίο είναι το ίδιο ως εάν όλο το φορτίο να ήταν συγκεντρωμένο στο κέντρο της σφαίρας.



ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Όπως αναφέραμε προηγουμένως στο εδάφιο αυτό, ολόκληρο το φορτίο πρέπει να κείται στην επιφάνεια της σφαίρας. Το φορτίο είναι ελεύθερο να κινηθεί στον αγωγό, χωρίς να υπάρχει προτιμώμενη θέση στην επιφάνεια· το φορτίο επομένως κατανέμεται *ομοιόμορφα* πάνω στην επιφάνεια, και το σύστημα έχει σφαιρική συμμετρία. Για να εκμεταλλευτούμε αυτήν τη συμμετρία, θεωρούμε ως γκαουσιανή επιφάνεια μια σφαίρα ακτίνας r με κέντρο την αγώγιμη σφαίρα. Μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο μέσα ή έξω από τον αγωγό θεωρώντας $r < R$ ή $r > R$, αντίστοιχα. Και στις δύο περιπτώσεις, το σημείο στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το $\boldsymbol{E}$ βρίσκεται πάνω στην γκαουσιανή επιφάνεια.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Η σφαιρική συμμετρία συνεπάγεται ότι η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να είναι ακτινική· αυτό ισχύει διότι δεν υπάρχει προτιμώμενη κατεύθυνση παράλληλη στην επιφάνεια, επομένως το $\boldsymbol{E}$ δεν μπορεί να έχει συνιστώσα παράλληλη στην επιφάνεια. Επίσης, δεν υπάρχει προτιμώμενος προσανατολισμός της σφαίρας, επομένως το μέτρο του πεδίου E μπορεί να εξαρτάται μόνο από την απόσταση r από το κέντρο και πρέπει να έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία στην επιφάνεια της γκαουσιανής.

Για $r > R$ ολόκληρος ο αγωγός βρίσκεται εντός της γκαουσιανής επιφάνειας, άρα το εγκλειόμενο φορτίο είναι q. Το εμβαδόν της γκαουσιανής επιφάνειας είναι $4\pi r^2$, και το E είναι ομογενές πάνω στην επιφάνεια και κάθετο σε αυτή σε κάθε σημείο. Το ολοκλήρωμα ροής $\oint E_\perp \, dA$ είναι τότε απλά $E(4\pi r^2)$, και η Εξ. (22.8) δίνει

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{και}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad \text{(έξω από φορτισμένη αγώγιμη σφαίρα)}$$

Η έκφραση αυτή είναι η ίδια με εκείνη για σημειακό φορτίο· έξω από τη φορτισμένη σφαίρα το πεδίο της είναι το ίδιο με αυτό που θα δημιουργούνταν αν το φορτίο ήταν συγκεντρωμένο στο κέντρο της. Ακριβώς έξω από τη σφαίρα, όπου $r = R$,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2} \quad \text{(στην επιφάνεια φορτισμένης αγώγιμης σφαίρας)}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Η ροή μπορεί να είναι θετική ή αρνητική Να θυμάστε ότι έχουμε επιλέξει το φορτίο q να είναι *θετικό*. Εάν το φορτίο είναι αρνητικό, το ηλεκτρικό πεδίο κατευθύνεται ακτινικά προς το κέντρο, αντί ακτινικά προς τα έξω, και η ηλεκτρική ροή διαμέσου της γκαουσιανής επιφάνειας είναι αρνητική. Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου πάνω και στο εξωτερικό της σφαίρας δίνεται από την ίδια σχέση, όπως και προηγουμένως, με τη διαφορά ότι το q εκφράζει το *μέτρο* (απόλυτη τιμή) του φορτίου.

Για $r < R$ έχουμε και πάλι $E(4\pi r^2) = Q_{εγκ}/\epsilon_0$. Τώρα όμως η γκαουσιανή επιφάνειά μας (η οποία βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του αγωγού) δεν περικλείει *κανένα* φορτίο, επομένως

συνεχίζεται

$Q_{εγκ} = 0$. Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι επομένως μηδέν.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Γνωρίζουμε ήδη ότι $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ στο εσωτερικό αγωγού (σφαιρικού ή μη), όταν τα φορτία είναι σε ηρεμία. Το Σχ. 22.18 δείχνει το E ως συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο της σφαίρας. Να σημειωθεί επίσης ότι στο όριο, καθώς $R \to 0$, η σφαίρα γίνεται σημειακό φορτίο· υπάρχει τότε μόνο ο προς τα έξω χώρος και το πεδίο δίνεται από τη σχέση $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στον νόμο του Coulomb από τον νόμο του Gauss. (Στο Εδ. 22.3 αποδείχθηκε ο νόμος του Gauss από τον νόμο του Coulomb· οι δύο νόμοι είναι ισοδύναμοι.)

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε αυτήν τη μέθοδο για έναν αγώγιμο σφαιρικό *φλοιό* (έναν σφαιρικό αγωγό με μια ομόκεντρη σφαιρική κοιλότητα στο κέντρο) εάν δεν υπάρχουν φορτία στο εσωτερικό της κοιλότητας. Θεωρούμε μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια με ακτίνα r μικρότερη από την ακτίνα της κοιλότητας. Εάν *υπήρχε* πεδίο στο εσωτερικό της κοιλότητας, θα έπρεπε να παρουσιάζει σφαιρική (ακτινική) συμμετρία όπως πριν, και επομένως $E = Q_{εγκ}/4\pi\epsilon_0 r^2$. Αλλά αυτήν τη φορά $Q_{εγκ} = 0$ και $E = 0$ στο εσωτερικό της σφαιρικής κοιλότητας.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ίδια τεχνική για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου στον ενδιάμεσο χώρο μεταξύ μιας φορτισμένης σφαίρας και μιας ομόκεντρης κοίλης αγώγιμης σφαίρας που την περιβάλλει;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.6 ΠΕΔΙΟ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

Ηλεκτρικό φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο κατά μήκος ενός σύρματος πολύ μεγάλου μήκους. Το φορτίο ανά μονάδα μήκους είναι λ (θεωρούμενο θετικό). Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Βρήκαμε στο Παράδ. 21.10 (Εδ. 21.5) ότι το πεδίο $\boldsymbol{E}$ ομογενώς φορτισμένου, απείρου σύρματος κατευθύνεται ακτινικά προς τα έξω εάν το λ είναι θετικό και ακτινικά προς τα μέσα εάν το λ είναι αρνητικό, και ότι το μέτρο του πεδίου E εξαρτάται μόνο από την ακτινική απόσταση από το σύρμα. Αυτό μας υποδεικνύει να χρησιμοποιήσουμε *κυλινδρική* γκαουσιανή επιφάνεια, ακτίνας r και τυχαίου μήκους l, ομοαξονική με το σύρμα και με τις βάσεις της κάθετες στο σύρμα (**Σχ. 22.19**).

ΕΠΙΛΥΣΗ: Η ροή διαμέσου των βάσεων της γκαουσιανής μας επιφάνειας είναι μηδενική, διότι το ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο στις βάσεις αυτές, και επομένως $\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0$. Στο κυλινδρικό μέρος της επιφάνειάς μας έχουμε $\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = E_{\perp} = E$ παντού. (Εάν το λ ήταν αρνητικό, θα είχαμε $\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = E_{\perp} = -E$ παντού.) Το εμβαδόν κυλινδρικής επιφάνειας είναι $2\pi rl$, επομένως η ροή διαμέσου της επιφάνειας –και επομένως η ολική ροή Φ_E διαμέσου της γκαουσιανής επιφάνειας– είναι $EA = 2\pi rlE$. Το ολικό εγκλειόμενο φορτίο είναι $Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = \lambda l$, και άρα από τον νόμο του Gauss, Εξ. (22.8),

$$\Phi_E = 2\pi rlE = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad \text{και}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r} \quad \text{(πεδίο γραμμικού φορτίου απείρου μήκους)}$$

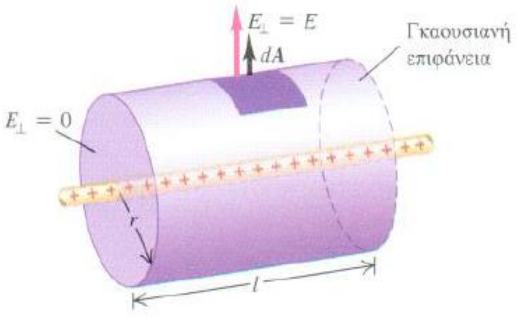
Στο Παράδ. 21.10 καταλήξαμε στο ίδιο αυτό αποτέλεσμα με *πολύ* περισσότερη προσπάθεια.

Εάν το λ είναι *αρνητικό*, το $\boldsymbol{E}$ κατευθύνεται ακτινικά προς τα μέσα, και στην παραπάνω έκφραση για το E θα πρέπει να θεωρήσουμε το λ ως την απόλυτη τιμή του φορτίου ανά μονάδα μήκους.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Είδαμε στο Παράδ. 21.10 ότι *ολόκληρο* το φορτίο του σύρματος συμβάλλει στο πεδίο σε κάθε σημείο, και όμως λαμβάνουμε υπόψη μόνο το μέρος του φορτίου $Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = \lambda l$ εντός της γκαουσιανής επιφάνειας όταν εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss. Δεν υπάρχει καμία ασυνέπεια εδώ· χρειάζεται ολόκληρο το φορτίο για να δώσει στο πεδίο τις ιδιότητες που μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε το Φ_E τόσο εύκολα, και ο νόμος του Gauss ισχύει πάντα μόνο για το εγκλειόμενο φορτίο. Εάν το σύρμα είναι μικρού μήκους, η συμμετρία του σύρματος απείρου μήκους εξαφανίζεται και το E δεν είναι ομοιόμορφο πάνω σε ομοαξονική, κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια. Ο νόμος του Gauss τότε *δεν* μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε το Φ· θα πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα με τον δύσκολο τρόπο, όπως στο Παράδ. 21.10.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την γκαουσιανή επιφάνεια του Σχ. 22.19 για να δείξουμε ότι το πεδίο εκτός ενός ομογενώς φορτισμένου κυλίνδρου μεγάλου μήκους είναι το ίδιο όπως στην περίπτωση όπου ολόκληρο το φορτίο θα ήταν συγκεντρωμένο σε μια γραμμή κατά μήκος του άξονά του (δείτε Πρόβλημα 22.41). Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στον χώρο μεταξύ ενός φορτισμένου κυλίνδρου και ενός ομοαξονικού κοίλου αγώγιμου κυλίνδρου που τον περιβάλλει (δείτε Πρόβλημα 22.39).

22.19 Ομοαξονική κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια η οποία χρησιμοποιείται για να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο έξω από ένα φορτισμένο σύρμα απείρου μήκους.



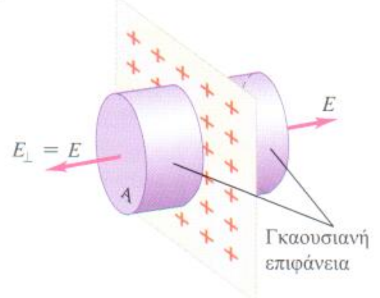
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.7 ΠΕΔΙΟ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΦΥΛΛΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΑΠΕΙΡΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

Χρησιμοποιήστε τον νόμο του Gauss για να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από ένα μεγάλο ομοιόμορφα φορτισμένο επίπεδο φύλλο εάν η πυκνότητα φορτίου ανά μονάδα επιφάνειας είναι σ.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Στο Παράδ. 21.11 (Εδ. 21.5) διαπιστώσαμε ότι το πεδίο $\boldsymbol{E}$ ομογενώς φορτισμένου απείρου επίπεδου φύλλου είναι κάθετο στο φύλλο, και ότι το μέτρο του είναι ανεξάρτητο της απόστασης από το φύλλο. Για να αξιοποιήσουμε αυτές τις ιδιότητες συμμετρίας, χρησιμοποιούμε κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια με βάσεις εμβαδού A και με τον άξονά της κάθετο στο φύλλο φορτίου (**Σχ. 22.20**).

22.20 Κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πεδίου ενός φορτισμένου επιπέδου φύλλου απείρων διαστάσεων.



ΕΠΙΛΥΣΗ: Η ροή διαμέσου του κυλινδρικού μέρους της γκαουσιανής επιφάνειας είναι μηδενική διότι $\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0$ παντού. Η ροή διαμέσου καθεμίας από τις βάσεις είναι $+EA$ διότι $\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = E_\perp = E$ παντού, επομένως η ολική ροή και από τα δύο άκρα –και άρα η ολική ροή Φ_E διαμέσου της γκαουσιανής επιφάνειας– είναι $+2EA$. Το ολικό εγκλειόμενο φορτίο είναι $Q_{\varepsilon\gamma\kappa} = \sigma A$, και επομένως από τον νόμο του Gauss,

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{και}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{(πεδίο φορτισμένου επίπεδου φύλλου απείρων διαστάσεων)}$$

Εάν το σ είναι αρνητικό, το $\boldsymbol{E}$ κατευθύνεται *προς* το φύλλο, η ροή διαμέσου της γκαουσιανής επιφάνειας στο Σχ. 22.20 είναι αρνητική, και το σ στη σχέση $E = \sigma/2\epsilon_0$ παριστάνει το μέτρο (απόλυτη τιμή) της πυκνότητας φορτίου.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Το ίδιο αποτέλεσμα βρήκαμε για το πεδίο απείρου φύλλου φορτίου στο Παράδ. 21.11 (Εδ. 21.5). Ο υπολογισμός εκεί ήταν πολύ πιο περίπλοκος και περιλάμβανε ένα αρκετά σύνθετο ολοκλήρωμα. Λόγω της ευνοϊκής συμμετρίας, το πρόβλημα αυτό είναι πολύ πιο εύκολο να λυθεί με τον νόμο του Gauss.

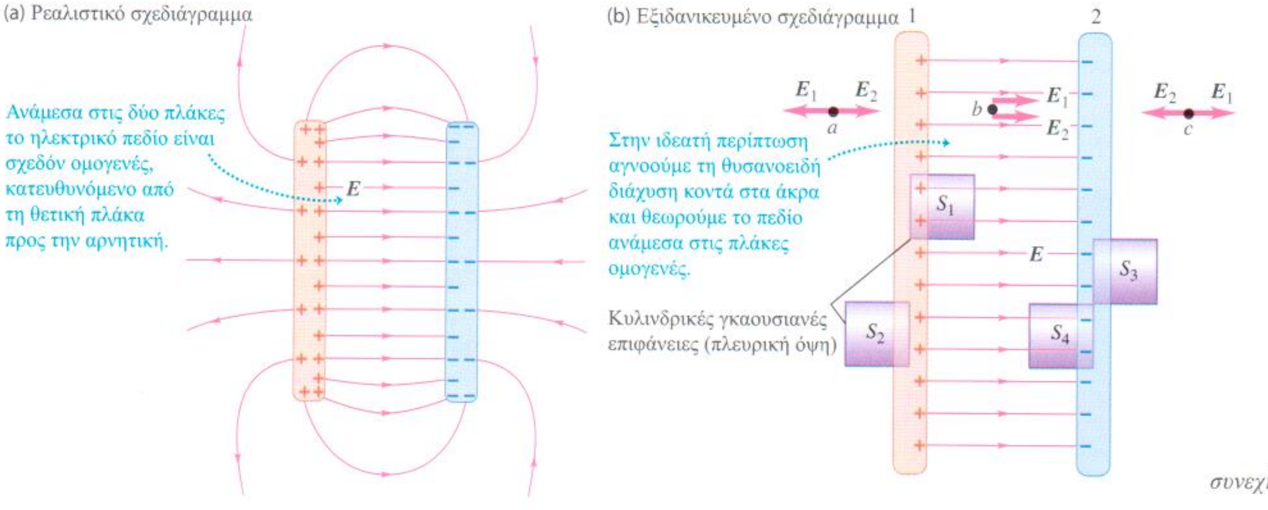
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.8 ΠΕΔΙΟ ΜΕΤΑΞΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΓΩΓΙΜΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΜΕ ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΦΟΡΤΙΑ

Δύο μεγάλες παράλληλες αγώγιμες πλάκες φορτίζονται με ίσα και αντίθετα φορτία· οι πυκνότητες επιφανειακού φορτίου είναι $+\sigma$ και $-\sigma$. Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο στον χώρο ανάμεσα στις πλάκες.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το **Σχ. 22.21a** δείχνει το πεδίο. Επειδή αντίθετα φορτία έλκονται, τα περισσότερα φορτία συγκεντρώνονται στις απέναντι εσωτερικές επιφάνειες των πλακών. Ένα μικρό ποσό φορτίου εγκαθίσταται στις *εξωτερικές* επιφάνειες των πλακών και υπάρχει μια «θυσανοειδής» διάχυση του πεδίου κοντά στα άκρα. Όμως, εάν οι πλάκες είναι πολύ μεγάλες σε σύγκριση με τη μεταξύ τους απόσταση, η διάχυση γίνεται αμελητέα εκτός από πολύ κοντά στα άκρα. Στην περίπτωση αυτή, υποθέτουμε ότι το πεδίο είναι ομογενές στον χώρο μεταξύ των πλακών, όπως στο Σχ. 22.21b, και ότι τα φορτία κατανέμονται ομοιόμορφα στις απέναντι επιφάνειες. Για να εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία αυτή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σκιασμένες γκαουσιανές επιφάνειες S_1, S_2, S_3 και S_4. Οι επιφάνειες

22.21 Ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα σε αντίθετα φορτισμένες παράλληλες πλάκες.



συνεχίζεται

αυτές είναι κύλινδροι με επίπεδες βάσεις εμβαδού A· η μία βάση αυτών των επιφανειών βρίσκεται *εντός* μιας πλάκας.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Η αριστερή βάση της επιφάνειας S_1 βρίσκεται εντός της θετικής πλάκας 1. Επειδή το πεδίο είναι μηδέν στο εσωτερικό οποιουδήποτε συμπαγούς αγωγού υπό ηλεκτροστατικές συνθήκες, δεν υπάρχει ροή διαμέσου της βάσης αυτής. Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των πλακών είναι κάθετο στη δεξιά βάση της επιφάνειας και επομένως στη βάση αυτή το $E_\perp$ είναι ίσο με το E και η ροή είναι EA. Η ροή είναι θετική επειδή το $\boldsymbol{E}$ κατευθύνεται προς το εξωτερικό της γκαουσιανής επιφάνειας. Δεν υπάρχει ροή μέσω της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου, επειδή αυτή είναι παράλληλη προς το $\boldsymbol{E}$. Επομένως, η ολική ροή στον νόμο του Gauss είναι EA. Το ολικό φορτίο το οποίο περικλείεται από τον κύλινδρο είναι σA, επομένως η Εξ. (22.8) δίνει $EA = \sigma A/\epsilon_0$· έχουμε τότε

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{(πεδίο στον χώρο μεταξύ αντίθετα φορτισμένων αγώγιμων πλακών)}$$

Το πεδίο είναι ομογενές και κάθετο στις πλάκες και το μέτρο του δεν εξαρτάται από την απόσταση από οποιαδήποτε από τις δύο πλάκες. Η γκαουσιανή επιφάνεια S_4 δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Οι επιφάνειες S_2 και S_3 δίνουν $E = 0$ στα αριστερά της πλάκας 1 και στα δεξιά της πλάκας 2, αντίστοιχα. Αφήνουμε τους υπολογισμούς αυτούς ως πρόβλημα (δείτε Πρόβλημα 22.27).

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα στο Παράδ. 21.12 χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης ηλεκτρικών πεδίων. Τα πεδία που οφείλονται στα δύο φύλλα φορτίου (ένα σε κάθε πλάκα) είναι $\boldsymbol{E}_1$ και $\boldsymbol{E}_2$· από το Παράδ. 22.7, καθένα από αυτά έχει μέτρο $\sigma/2\epsilon_0$. Το ολικό ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο είναι το διανυσματικό άθροισμα $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$. Στα σημεία a και c του Σχ. 22.21b τα $\boldsymbol{E}_1$ και $\boldsymbol{E}_2$ έχουν αντίθετες κατευθύνσεις και το άθροισμά τους είναι μηδέν. Στο σημείο b τα $\boldsymbol{E}_1$ και $\boldsymbol{E}_2$ έχουν την ίδια κατεύθυνση και το άθροισμά τους είναι ίσο με $E = \sigma/\epsilon_0$, ακριβώς ό,τι υπολογίσαμε και με τον νόμο του Gauss.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.9 ΠΕΔΙΟ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

ΛΥΣΗ

Θετικό ηλεκτρικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα σε *ολόκληρο τον όγκο* μιας *μονωτικής* σφαίρας ακτίνας R. Να βρεθεί το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο P σε απόσταση r από το κέντρο της σφαίρας.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το σύστημα, όπως στο Παράδ. 22.5, έχει σφαιρική συμμετρία. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα συμπεράσματα του παραδείγματος αυτού σχετικά με την κατεύθυνση και το μέτρο του $\boldsymbol{E}$. Για να αξιοποιήσουμε τη συμμετρία, επιλέγουμε ως γκαουσιανή επιφάνεια μια σφαίρα ακτίνας r, ομόκεντρη με την κατανομή του φορτίου.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Για λόγους συμμετρίας, η κατεύθυνση του $\boldsymbol{E}$ είναι ακτινική σε κάθε σημείο, επομένως $E_\perp = E$ και το μέτρο του πεδίου E είναι το ίδιο σε κάθε σημείο πάνω στην επιφάνεια. Επομένως, η ολική ηλεκτρική ροή διαμέσου της γκαουσιανής επιφάνειας είναι ίση με το γινόμενο του E επί την ολική επιφάνεια $A = 4\pi r^2$, δηλαδή, $\Phi_E = 4\pi r^2 E$.

Η ποσότητα του φορτίου που περικλείεται από την γκαουσιανή επιφάνεια εξαρτάται από την ακτίνα r. Για να βρούμε το E στο *εσωτερικό* της σφαίρας, επιλέγουμε $r < R$. Η πυκνότητα του φορτίου ρ είναι ίση με το φορτίο Q διαιρεμένο με τον όγκο ολόκληρης της σφαίρας ακτίνας R:

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$$

Ο όγκος $V_{\text{εγκ}}$, που περικλείει η γκαουσιανή επιφάνεια, είναι $\frac{4}{3}\pi r^3$, και επομένως το ολικό φορτίο $Q_{\text{εγκ}}$ που περικλείει η επιφάνεια ακτίνας r είναι

$$Q_{\text{εγκ}} = \rho V_{\text{εγκ}} = \left(\frac{Q}{4\pi R^3/3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right) = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Από τον νόμο του Gauss, Εξ. (22.8), προκύπτει

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3} \quad \text{ή}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3} \quad \text{(πεδίο στο εσωτερικό ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας)}$$

Το μέτρο του πεδίου είναι ανάλογο προς την απόσταση r του σημείου του πεδίου από το κέντρο της σφαίρας (δείτε γραφική παράσταση E ως προς r στο **Σχ. 22.22**).

Για να υπολογίσουμε το E *έξω* από τη σφαίρα, θεωρούμε $r > R$. Η επιφάνεια αυτή περικλείει ολόκληρο το φορτίο και επομένως $Q_{\text{encl}} = Q$. Ο νόμος του Gauss δίνει

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{ή}$$

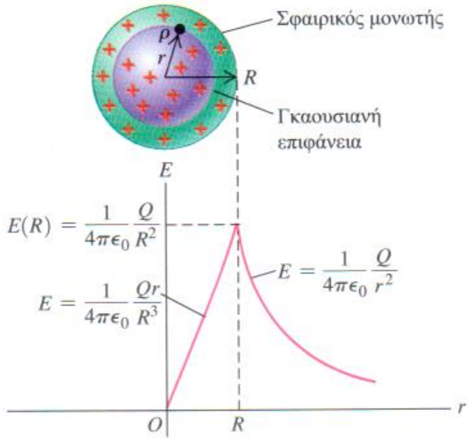
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad \text{(πεδίο έξω από ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα)}$$

Το πεδίο έξω από *οποιοδήποτε* σφαιρικά συμμετρικό φορτισμένο σώμα μεταβάλλεται ανάλογα προς το $1/r^2$, ακριβώς όπως στην περίπτωση όπου ολόκληρο το φορτίο είναι συγκεντρωμένο στο κέντρο. Η γραφική παράσταση αυτού φαίνεται στο Σχ. 22.22.

Εάν το φορτίο είναι *αρνητικό*, το $\boldsymbol{E}$ κατευθύνεται ακτινικά προς το *εσωτερικό* και στις εκφράσεις για το E θεωρούμε το Q ως την απόλυτη τιμή του φορτίου.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Σημειώστε ότι, αν θέσουμε $r = R$ σε οποιαδήποτε από τις εκφράσεις για το E, παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ για το μέτρο του πεδίου στην επιφάνεια της σφαίρας. Αυτό συμβαίνει επειδή το μέτρο E είναι *συνεχής* συνάρτηση του r. Αντίθετα, για τη φορτισμένη σφαίρα του Παράδ. 22.5 το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι *ασυνεχής* συνάρτηση στο $r = R$ (η τιμή του εμφανίζει άλμα από $E = 0$ στο εσωτερικό της σφαίρας, σε $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ ακριβώς έξω από τη σφαίρα).

22.22 Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ομοιόμορφα φορτισμένης μονωτικής σφαίρας. Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα αυτό με το πεδίο αγώγιμης σφαίρας (δείτε Σχ. 22.18).



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.10 ΣΦΑΙΡΙΚΟ ΣΤΡΩΜΑ ΦΟΡΤΙΟΥ

Μια λεπτή κοίλη σφαίρα ακτίνας 0,250 m φέρει άγνωστο φορτίο, ομοιόμορφα κατανεμημένο σε όλη της την επιφάνεια. Σε απόσταση 0,300 m από το κέντρο της σφαίρας, το ηλεκτρικό πεδίο κατευθύνεται ακτινικά προς το εσωτερικό και έχει μέτρο $1{,}80 \times 10^2$ N/C. Πόσο είναι το φορτίο στη σφαίρα;

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Η κατανομή του φορτίου είναι σφαιρικά συμμετρική. Όπως στα Παραδ. 22.5 και 22.9, προκύπτει ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι ακτινικό και το μέτρο είναι συνάρτηση μόνο της ακτινικής απόστασης r από το κέντρο της σφαίρας. Χρησιμοποιούμε μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια, ομόκεντρη με την κατανομή του φορτίου και ακτίνας $r = 0{,}300$ m. Η ζητούμενη μεταβλητή είναι η $Q_{εγκ} = q$.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Η κατανομή του φορτίου είναι η ίδια με εκείνη φορτίου κατανεμημένου στην επιφάνεια αγώγιμης σφαίρας ακτίνας 0,250 m. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα του Παραδ. 22.5. Σημειώνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο εδώ κατευθύνεται προς τη σφαίρα, επομένως το q πρέπει να είναι *αρνητικό*. Επιπλέον, το ηλεκτρικό πεδίο κατευθύνεται προς την γκαουσιανή επιφάνεια, $E_\perp = -E$ και $\Phi_E = \oint E_\perp\, dA = -E(4\pi r^2)$.

Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss, η ροή είναι ίση με το φορτίο q πάνω στη σφαίρα (της οποίας ολόκληρο το φορτίο περικλείεται από την γκαουσιανή επιφάνεια) διαιρεμένο με ϵ_0. Επιλύοντας ως προς q, καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} q = -E(4\pi\epsilon_0 r^2) &= -(1{,}80 \times 10^2\ \mathrm{N/C})(4\pi) \\ &\quad \times (8{,}854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(0{,}300\ \mathrm{m})^2 \\ &= -1{,}80 \times 10^{-9}\ \mathrm{C} = -1{,}80\ \mathrm{nC} \end{aligned}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Για τον υπολογισμό του φορτίου έπρεπε να γνωρίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε *όλα* τα σημεία της γκαουσιανής επιφάνειας, ώστε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα ροής. Αυτό ήταν δυνατό στην περίπτωση αυτή διότι η κατανομή του φορτίου εμφανίζει μεγάλη συμμετρία. Εάν η κατανομή είναι ακανόνιστη ή στερείται συμμετρίας, ο νόμος του Gauss δεν είναι πολύ χρήσιμος για τον υπολογισμό της κατανομής του φορτίου από το πεδίο ή αντίστροφα.

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.11 ΑΓΩΓΟΣ ΜΕ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ

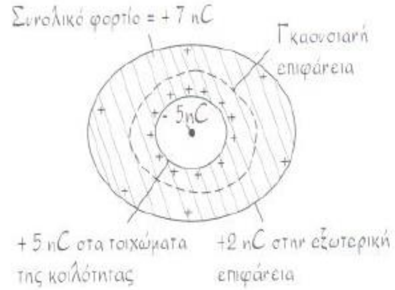
ΛΥΣΗ

Ένας αγωγός με κοιλότητα φέρει συνολικό φορτίο +7 nC. Εντός της κοιλότητας, μονωμένο από τον αγωγό βρίσκεται σημειακό φορτίο –5 nC. Πόσο είναι το φορτίο σε κάθε επιφάνεια (εσωτερική και εξωτερική) του αγωγού;

ΛΥΣΗ

Το **Σχ. 22.24** απεικονίζει την κατάσταση. Εάν το φορτίο στην κοιλότητα είναι $q = -5$ nC, το φορτίο στην επιφάνεια της κοιλότητας πρέπει να είναι $-q = -(-5\ \mathrm{nC}) = +5$ nC. Ο αγωγός φέρει *ολικό* φορτίο +7 nC, κανένα μέρος του οποίου δεν βρίσκεται στο εσωτερικό του υλικού. Αν +5 nC είναι στην εσωτερική επιφάνεια της κοιλότητας, τότε το εναπομένον φορτίο (+7 nC) – (+5 nC) = +2 nC θα πρέπει να βρίσκεται στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού.

22.24 Το σχεδιάγραμμά μας για το πρόβλημα αυτό. Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του συμπαγούς αγωγού είναι μηδέν και επομένως η ροή διαμέσου της γκαουσιανής επιφάνειας η οποία απεικονίζεται είναι μηδέν, άρα το φορτίο στα τοιχώματα της κοιλότητας πρέπει να είναι το αντίθετο από το σημειακό φορτίο.



ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.12 ΠΕΔΙΟ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΑΓΩΓΙΜΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Να επαληθευτεί η Εξ. (22.10) για μια αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R και ολικού φορτίου q.

ΛΥΣΗ

Στο Παράδ. 22.5 (Εδ. 22.4) δείξαμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο ακριβώς έξω από την επιφάνεια είναι

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι ομοιόμορφη και ίση με το φορτίο q διαιρεμένη με την επιφάνεια της σφαίρας

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Συγκρίνοντας αυτές τις δύο εκφράσεις, βλέπουμε ότι $E = \sigma/\epsilon_0$, το οποίο επαληθεύει την Εξ. (22.10).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22.13 ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΓΗΣ

Η Γη (ένας αγωγός) έχει ένα ολικό ηλεκτρικό φορτίο. Το ηλεκτρικό πεδίο που προκύπτει κοντά στην επιφάνεια είναι περίπου ίσο με 150 N/C και κατευθύνεται προς το κέντρο της Γης. (a) Πόση είναι η αντίστοιχη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου; (b) Πόσο είναι το *ολικό* επιφανειακό φορτίο πάνω στη Γη;

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Μας δίνεται το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της αγώγιμης Γης. Μπορούμε να υπολογίσουμε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ από την Εξ. (22.10). Το ολικό φορτίο Q στην επιφάνεια της Γης είναι τότε ίσο με το γινόμενο του σ επί το εμβαδόν της επιφάνειας.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Η κατεύθυνση του πεδίου σημαίνει ότι η σ είναι αρνητική (που αντιστοιχεί σε $\boldsymbol{E}$ κατευθυνόμενο *προς* την επιφάνεια και, επομένως, το $E_\perp$ είναι αρνητικό). Από την Εξ. (22.10) προκύπτει

$$\sigma = \epsilon_0 E_\perp = (8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(-150\ \mathrm{N/C})$$
$$= -1{,}33 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2} = -1{,}33\ \mathrm{nC/m^2}$$

(b) Το εμβαδόν της επιφάνειας της Γης είναι $4\pi R_E^2$, όπου $R_E = 6{,}38 \times 10^6$ m είναι η ακτίνα της Γης (δείτε Παράρτημα ΣΤ). Το ολικό φορτίο Q είναι το γινόμενο $4\pi R_E^2\sigma$, ή

$$Q = 4\pi(6{,}38 \times 10^6\ \mathrm{m})^2(-1{,}33 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2})$$
$$= -6{,}8 \times 10^5\ \mathrm{C} = -680\ \mathrm{kC}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Μπορείτε να ελέγξετε το αποτέλεσμά μας στο ερώτημα (b) χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Παραδ. 22.5. Λύνοντας ως προς Q βρίσκουμε

$$Q = 4\pi\epsilon_0 R^2 E_\perp$$
$$= \frac{1}{9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}}(6{,}38 \times 10^6\ \mathrm{m})^2(-150\ \mathrm{N/C})$$
$$= -6{,}8 \times 10^5\ \mathrm{C}$$

Ένα ηλεκτρόνιο έχει φορτίο $-1{,}60 \times 10^{-19}$ C. Επομένως, αυτή η περίσσεια αρνητικού φορτίου αντιστοιχεί στην ύπαρξη $(-6{,}8 \times 10^5\ \mathrm{C})/(-1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}) = 4{,}2 \times 10^{24}$ επιπλέον ηλεκτρονίων πάνω στη Γη ή 7 γραμμομόρια περίσσειας ηλεκτρονίων. Αυτή αντισταθμίζεται από ένα ίσο *έλλειμμα* ηλεκτρονίων στην ανώτερη ατμόσφαιρα της Γης και επομένως ο συνδυασμός της Γης και της ατμόσφαιράς της είναι ηλεκτρικά ουδέτερος.