SEARS & ZEMANSKY

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ με Σύγχρονη Φυσική

3η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Τόμος Β

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ ΟΠΤΙΚΗ - ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

YOUNG ΚΑΙ FREEDMAN

Θ.Η. Αλεξόπουλος, ΕΜΠ
Ι.Α. Αρβανιτίδης, ΑΠΘ
Α.Α. Αργυρίου, Π. Πατρών
Ε.Α. Δρης, ΕΜΠ
Η.Σ. Ζουμπούλης, ΕΜΠ
Η.Κ. Κατσούφης, ΕΜΠ
Γ.Α. Κουρούκλης, ΑΠΘ
Κ.Ε. Παρασκευαΐδης, ΕΜΠ
Μ.Ν. Πιζάνιας, Π. Πατρών
Ι.Π. Ρίζος, Π. Ιωαννίνων
Θ.Ν. Τομαράς, Π. Κρήτης
Κ. Χριστοδουλίδης, ΕΜΠ

ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

1. ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

ΕΠΙΛΟΓΗ,
ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ
ΚΑΙ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
Ηλίας Κατσούφης

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟ
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ:
Τζένη Πάλμου

Απόδοση βιβλίου στην Ελληνική γλώσσα και Επιμέλεια (αλφαβητικά):

Θ.Η. Αλεξόπουλος, *Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Ι.Α. Αρβανιτίδης, *Αναπλ. Καθηγητής Φυσικής του Τμήματος Φυσικής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης*

Α.Α. Αργυρίου, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών*

Ε.Α. Δρης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επστημών, του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Η.Σ. Ζουμπούλης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Η.Κ. Κατσούφης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Γ.Α. Κουρούκλης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής του Τμήματος Χημικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης*

Κ.Ε. Παρασκευαΐδης, *τ. Αναπλ. Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Μ.Ν. Πιζάνιας, *Ομότιμος Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών*

Ι.Π. Ρίζος, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων*

Θ.Ν. Τομαράς, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Κρήτης*

Κ. Χριστοδουλίδης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.1 ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΣΤΙΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Ένα ποζιτρόνιο (το αντισωματίδιο του ηλεκτρονίου) έχει μάζα ίση με $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg και φορτίο $q_0 = +e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C. Υποθέστε ότι ένα ποζιτρόνιο κινείται κοντά σε ένα σωματίδιο α (άλφα), το οποίο έχει φορτίο $q = +2e = 3{,}20 \times 10^{-19}$ C και μάζα $6{,}64 \times 10^{-27}$ kg. Η μάζα του σωματιδίου α είναι μεγαλύτερη από 7000 φορές από αυτήν του ποζιτρονίου, γι' αυτό θεωρούμε ότι το σωματίδιο α παραμένει ακίνητο. Όταν το ποζιτρόνιο είναι σε απόσταση $1{,}00 \times 10^{-10}$ m από το σωματίδιο α, απομακρύνεται ακτινικά από αυτό με ταχύτητα $3{,}00 \times 10^{6}$ m/s. (a) Πόση είναι η ταχύτητα του ποζιτρονίου όταν τα δύο σωματίδια βρίσκονται σε απόσταση $2{,}00 \times 10^{-10}$ m; (b) Πόση είναι η ταχύτητα του ποζιτρονίου όταν είναι σε πολύ μεγάλη απόσταση από το σωματίδιο α; (c) Υποθέστε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι ίδιες αλλά το κινούμενο σωματίδιο είναι ένα ηλεκτρόνιο (ίδια μάζα με το ποζιτρόνιο, αλλά με φορτίο $q_0 = -e$). Περιγράψτε την προκύπτουσα κίνηση.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Η ηλεκτρική δύναμη μεταξύ ενός ποζιτρονίου (ή ενός ηλεκτρονίου) και του σωματιδίου άλφα είναι διατηρητική, συνεπώς η μηχανική ενέργεια (κινητική συν δυναμική) διατηρείται. Η Εξ. (23.9) δίνει τη δυναμική ενέργεια U για κάθε μεταξύ τους απόσταση r. Η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας για τις περιπτώσεις (a) και (b) μοιάζει με εκείνη του Σχ. 23.7a, ενώ η συνάρτηση για την περίπτωση (c) μοιάζει με εκείνη του Σχ. 23.7b. Μας δίνεται η ταχύτητα του ποζιτρονίου $v_a = 3{,}00 \times 10^{6}$ m/s όταν η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι $r_a = 1{,}00 \times 10^{-10}$ m. Στις περιπτώσεις (a) και (b) χρησιμοποιούμε τις Εξ. (23.3) και (23.9) για να βρούμε την ταχύτητα για $r = r_b = 2{,}00 \times 10^{-10}$ m και $r = r_c \to \infty$, αντίστοιχα. Για την περίπτωση (c) αντικαθιστούμε το ποζιτρόνιο με το ηλεκτρόνιο και επανεξετάζουμε το πρόβλημα.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Και τα δύο σωματίδια έχουν θετικό φορτίο, οπότε το ποζιτρόνιο αυξάνει την ταχύτητά του καθώς απομακρύνεται από το σωματίδιο a. Από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, Εξ. (23.3), η τελική κινητική ενέργεια είναι

$$K_b = \tfrac{1}{2}mv_b^2 = K_a + U_a - U_b$$

Σε αυτήν την έκφραση,

$$K_a = \tfrac{1}{2}mv_a^2 = \tfrac{1}{2}(9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(3{,}00 \times 10^{6}\ \mathrm{m/s})^2 = 4{,}10 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

$$U_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r_a} = (9{,}0 \times 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}) \times \frac{(3{,}20 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})}{1{,}00 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}} = 4{,}61 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

$$U_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r_b} = 2{,}30 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

συνεχίζεται

Επομένως, η κινητική ενέργεια και η ταχύτητα του ποζιτρονίου στη θέση $r = r_b = 2{,}00 \times 10^{-10}$ m είναι

$$K_b = \tfrac{1}{2}mv_b^2 = 4{,}10 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} + 4{,}61 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} - 2{,}30 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} = 6{,}41 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(6{,}41 \times 10^{-18}\ \mathrm{J})}{9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}}} = 3{,}8 \times 10^{6}\ \mathrm{m/s}$$

(b) Όταν το ποζιτρόνιο και το σωματίδιο άλφα απέχουν πάρα πολύ ώστε $r = r_c \to \infty$, η τελική δυναμική ενέργεια U_c τείνει στο μηδέν. Πάλι, από τη διατήρηση της ενέργειας, η τελική κινητική ενέργεια και ταχύτητα του ποζιτρονίου σε αυτήν την περίπτωση είναι

$$K_c = K_a + U_a - U_c = 4{,}10 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} + 4{,}61 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} - 0 = 8{,}71 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{2K_c}{m}} = \sqrt{\frac{2(8{,}71 \times 10^{-18}\ \mathrm{J})}{9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}}} = 4{,}4 \times 10^{6}\ \mathrm{m/s}$$

(c) Το ηλεκτρόνιο και το σωματίδιο a έχουν αντίθετα φορτία, συνεπώς η δύναμη είναι ελκτική και το ηλεκτρόνιο ελαττώνει ταχύτητα καθώς απομακρύνεται. Αλλάζοντας το πρόσημο του κινούμενου φορτίου από $+e$ σε $-e$ σημαίνει ότι η αρχική δυναμική ενέργεια είναι τώρα $U_a = -4{,}61 \times 10^{-18}$ J, το οποίο κάνει τη συνολική μηχανική ενέργεια *αρνητική*:

$$K_a + U_a = (4{,}10 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}) - (4{,}61 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}) = -0{,}51 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

Η ολική μηχανική ενέργεια θα πρέπει να είναι θετική ώστε το ηλεκτρόνιο να κινηθεί απείρως μακριά από το σωματίδιο a. Όπως μια πέτρα που εκτοξεύεται προς τα πάνω με χαμηλή ταχύτητα από την επιφάνεια της Γης, θα φθάσει σε μια μέγιστη απόσταση $r = r_d$ από το σωματίδιο a πριν αλλάξει κατεύθυνση. Σε αυτό το σημείο η ταχύτητά του και η κινητική ενέργεια K_d είναι μηδέν, οπότε για απόσταση διαχωρισμού r_d έχουμε

$$U_d = K_a + U_a - K_d = (-0{,}51 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}) - 0$$

$$U_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r_d} = -0{,}51 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

$$r_d = \frac{1}{U_d}\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} = \frac{(9{,}0 \times 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})}{-0{,}51 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}}(3{,}20 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(-1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}) = 9{,}0 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

Για $r_b = 2{,}00 \times 10^{-10}$ m έχουμε $U_b = -2{,}30 \times 10^{-18}$ J, οπότε η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου και η ταχύτητά του σε αυτό το σημείο είναι

$$K_b = \tfrac{1}{2}mv_b^2 = 4{,}10 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} + (-4{,}61 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}) - (-2{,}30 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}) = 1{,}79 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(1{,}79 \times 10^{-18}\ \mathrm{J})}{9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}}} = 2{,}0 \times 10^{6}\ \mathrm{m/s}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Και τα δύο σωματίδια συμπεριφέρονται όπως αναμενόταν καθώς απομακρύνονται από το σωματίδιο a: Το ποζιτρόνιο αυξάνει την ταχύτητά του, ενώ το ηλεκτρόνιο την ελαττώνει και τελικώς γυρίζει πίσω. Πόσο γρήγορα θα έπρεπε να κινείται ένα ηλεκτρόνιο στη θέση $r_a = 1{,}00 \times 10^{-10}$ m για να απομακρυνθεί σε άπειρη απόσταση από το σωματίδιο a; (*Υπόδειξη*: Δείτε Παράδ. 13.5 στο Εδ. 13.3.)

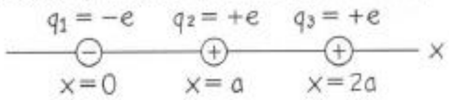
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.2 ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

Δύο σημειακά φορτία βρίσκονται στον άξονα x, $q_1 = -e$ στο $x = 0$ και $q_2 = +e$ στο $x = a$. (a) Να βρείτε το έργο που πρέπει να παραχθεί από εξωτερική δύναμη για να φέρει ένα τρίτο φορτίο $q_3 = +e$ από το άπειρο στο $x = 2a$. (b) Να βρείτε την ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το **Σχ. 23.10** δείχνει την τελική διάταξη των τριών φορτίων. Στο ερώτημα (a) πρέπει να βρούμε το έργο W που πρέπει να παραχθεί στο q_3 από μια εξωτερική δύναμη F_{ext} ώστε να φέρει το q_3 από το άπειρο στο το $x = 2a$. Αυτό το κάνουμε χρησιμοποιώντας την Εξ. (23.10) για να βρούμε τη δυναμική ενέργεια που συνδέεται με το q_3 υπό την παρουσία των q_1 και q_2. Στο ερώτημα (b) χρησιμοποιούμε την Εξ. (23.11), την έκφραση για τη δυναμική ενέργεια μιας συλλογής σημειακών φορτίων, για να βρούμε τη συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος.

23.10 Το σκίτσο μας της κατάστασης μετά τη μεταφορά του τρίτου φορτίου στη θέση του από άπειρη απόσταση.



ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Το έργο W ισούται με τη διαφορά μεταξύ (i) της δυναμικής ενέργειας U που συνδέεται με το q_3 όταν είναι στο $x = 2a$, και (ii) της δυναμικής ενέργειας όταν είναι σε άπειρη απόσταση. Η δεύτερη εξ αυτών είναι μηδέν, οπότε το έργο που πρέπει να παραχθεί είναι U. Οι αποστάσεις μεταξύ των φορτίων είναι $r_{13} = 2a$ και $r_{23} = a$, οπότε από την Εξ. (23.10),

$$W = U = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right) = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-e}{2a} + \frac{+e}{a}\right) = \frac{+e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Αυτό είναι θετικό, ακριβώς όπως θα αναμέναμε. Εάν το q_3 φέρεται από το άπειρο κατά μήκος του άξονα $+x$, έλκεται από το q_1 αλλά απωθείται ισχυρότερα από το q_2. Συνεπώς, πρέπει να εκτελέσουμε θετικό έργο για να σπρώξουμε το q_3 προς τη θέση $x = 2a$.

(b) Από την Εξ. (23.11), η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(-e)(e)}{a} + \frac{(-e)(e)}{2a} + \frac{(e)(e)}{a}\right] = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Το αρνητικό μας αποτέλεσμα στο ερώτημα (b) σημαίνει ότι το σύστημα έχει χαμηλότερη δυναμική ενέργεια απ' ό,τι θα είχε εάν τα τρία φορτία ήταν απείρως απομακρυσμένα. Μια εξωτερική δύναμη θα πρέπει να παραγάγει *αρνητικό* έργο για να φέρει τα τρία φορτία από το άπειρο και να συναρμολογήσει όλο αυτό το σύστημα ενώ θα πρέπει να παραγάγει *θετικό* έργο για να μεταφέρει τα τρία φορτία ξανά προς το άπειρο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.3 ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Ένα πρωτόνιο (φορτίο $+e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C) κινείται κατά μια απόσταση $d = 0{,}50$ m σε ευθεία γραμμή μεταξύ των σημείων a και b μέσα σε έναν γραμμικό επιταχυντή. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές κατά μήκος αυτής της γραμμής με μέτρο $E = 1{,}5 \times 10^7$ V/m $= 1{,}5 \times 10^7$ N/C στην κατεύθυνση από a προς b. Προσδιορίστε (a) τη δύναμη στο πρωτόνιο· (b) το έργο που παρήχθη από το πεδίο σε αυτό· (c) τη διαφορά δυναμικού $V_a - V_b$.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιεί τη σχέση μεταξύ ηλεκτρικού πεδίου και ηλεκτρικής δύναμης. Χρησιμοποιεί επίσης τη σχέση μεταξύ δύναμης, έργου και διαφοράς δυναμικής ενέργειας. Μας δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο, οπότε είναι απλό να βρούμε την ηλεκτρική δύναμη στο πρωτόνιο. Ο υπολογισμός του έργου είναι επίσης απλός επειδή το $\boldsymbol{E}$ είναι ομογενές, που σημαίνει ότι η δύναμη στο πρωτόνιο είναι σταθερή. Εφόσον το έργο είναι γνωστό, βρίσκουμε το $V_a - V_b$ από την Εξ. (23.13).

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Η δύναμη στο πρωτόνιο είναι στην ίδια κατεύθυνση με το ηλεκτρικό πεδίο, ενώ το μέτρο της είναι

$$F = qE = (1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})(1{,}5 \times 10^7\,\mathrm{N/C}) = 2{,}4 \times 10^{-12}\,\mathrm{N}$$

(b) Η δύναμη είναι σταθερή και στην ίδια κατεύθυνση με την μετατόπιση, συνεπώς το παραγόμενο έργο στο πρωτόνιο είναι

$$W_{a \to b} = Fd = (2{,}4 \times 10^{-12}\,\mathrm{N})(0{,}50\,\mathrm{m})$$
$$= 1{,}2 \times 10^{-12}\,\mathrm{J}$$
$$= (1{,}2 \times 10^{-12}\,\mathrm{J})\frac{1\,\mathrm{eV}}{1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}}$$
$$= 7{,}5 \times 10^6\,\mathrm{eV} = 7{,}5\,\mathrm{MeV}$$

(c) Από την Εξ. (23.13) η διαφορά δυναμικού είναι το έργο ανά μονάδα φορτίου, το οποίο είναι

$$V_a - V_b = \frac{W_{a \to b}}{q} = \frac{1{,}2 \times 10^{-12}\,\mathrm{J}}{1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}}$$
$$= 7{,}5 \times 10^6\,\mathrm{J/C} = 7{,}5 \times 10^6\,\mathrm{V} = 7{,}5\,\mathrm{MV}$$

Μπορούμε να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα ευκολότερα, ενθυμούμενοι ότι ένα ηλεκτρονιοβόλτ ισούται με ένα volt πολλαπλασιασμένο επί το φορτίο e. Το έργο που παρήχθη είναι $7{,}5 \times 10^6$ eV και το φορτίο είναι e, οπότε η διαφορά δυναμικού είναι $(7{,}5 \times 10^6\,\mathrm{eV})/e = 7{,}5 \times 10^6$ V.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Μπορούμε να ελέγξουμε το αποτέλεσμά μας στο ερώτημα (c) χρησιμοποιώντας τις Εξ. (23.17) ή (23.18). Η γωνία ϕ μεταξύ του σταθερού πεδίου $\boldsymbol{E}$ και της μετατόπισης είναι μηδέν, οπότε η Εξ. (23.17) γίνεται

$$V_a - V_b = \int_a^b E\cos\phi\, dl = \int_a^b E\, dl = E\int_a^b dl$$

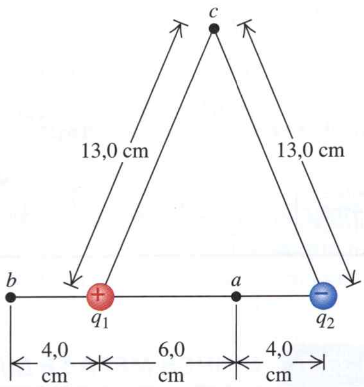
Το ολοκλήρωμα του dl από a έως b είναι ακριβώς η απόσταση d, άρα ξαναβρίσκουμε

$$V_a - V_b = Ed = (1{,}5 \times 10^7\,\mathrm{V/m})(0{,}50\,\mathrm{m}) = 7{,}5 \times 10^6\,\mathrm{V}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.4 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΟΥ ΟΦΕΙΛΕΤΑΙ ΣΕ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑΚΑ ΦΟΡΤΙΑ

Ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δύο σημειακά φορτία, $q_1 = +12$ nC και $q_2 = -12$ nC, τοποθετημένα σε απόσταση 10,0 cm μεταξύ τους (**Σχ. 23.13**). Υπολογίστε τα δυναμικά στα σημεία a, b και c.

23.13 Ποια είναι τα δυναμικά στα σημεία a, b και c που οφείλονται σε αυτό το ηλεκτρικό δίπολο;



ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Αυτή είναι η ίδια διάταξη φορτίων όπως στο Παράδ. 21.8, στο οποίο υπολογίσαμε ηλεκτρικό *πεδίο* σε κάθε σημείο αθροίζοντας *διανυσματικά*. Εδώ η ζητούμενη μεταβλητή είναι το ηλεκτρικό *δυναμικό* V σε τρία σημεία, το οποίο βρίσκουμε υπολογίζοντας το *αλγεβρικό* άθροισμα στην Εξ. (23.15).

ΕΠΙΛΥΣΗ: Στο σημείο a έχουμε $r_1 = 0{,}060$ m and $r_2 = 0{,}040$ m, οπότε η Εξ. (23.15) γίνεται

$$V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$
$$= (9{,}0 \times 10^9\,\mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{12 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}}{0{,}060\,\mathrm{m}}$$
$$+ (9{,}0 \times 10^9\,\mathrm{N \cdot m^2/C^2})\frac{(-12 \times 10^{-9}\,\mathrm{C})}{0{,}040\,\mathrm{m}}$$
$$= 1800\,\mathrm{N \cdot m/C} + (-2700\,\mathrm{N \cdot m/C})$$
$$= 1800\,\mathrm{V} + (-2700\,\mathrm{V}) = -900\,\mathrm{V}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορείτε να δείξετε ότι το δυναμικό στο σημείο b (όπου $r_1 = 0{,}040$ m και $r_2 = 0{,}140$ m) είναι $V_b = 1930$ V και το δυναμικό στο σημείο c (όπου $r_1 = r_2 = 0{,}130$ m) είναι $V_c = 0$ V.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Ας επιβεβαιώσουμε ότι αυτά τα αποτελέσματα είναι λογικά. Το σημείο a είναι πλησιέστερα προς το −12 nC φορτίο παρά στο +12 nC φορτίο, συνεπώς το δυναμικό στο a είναι αρνητικό. Το δυναμικό είναι θετικό στο σημείο b, το οποίο είναι πλησιέστερα προς το +12 nC φορτίο παρά στο −12 nC φορτίο. Τέλος, το σημείο c ισαπέχει από τα φορτία +12 nC και, −12 nC, συνεπώς το δυναμικό είναι μηδέν. (Το δυναμικό είναι επίσης μηδέν σε σημείο απείρως μακριά και από τα δύο φορτία.)

Συγκρίνοντας αυτό το παράδειγμα με το Παράδ. 21.8 φαίνεται ότι είναι ευκολότερο να υπολογίζεται το ηλεκτρικό δυναμικό (βαθμωτό) παρά το ηλεκτρικό πεδίο (διανυσματικό). Θα εκμεταλλευόμαστε αυτήν την απλοποίηση όποτε είναι δυνατό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.5 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Υπολογίστε τη δυναμική ενέργεια που συνδέεται με σημειακό φορτίο +4,0 nC εάν τοποθετηθεί στα σημεία *a*, *b* και *c* του Σχ. 23.13.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Η δυναμική ενέργεια U που συνδέεται με σημειακό φορτίο q σε περιοχή που το δυναμικό είναι V είναι $U = qV$. Χρησιμοποιούμε τις τιμές του V από το Παράδ. 23.4.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Στα τρία σημεία βρίσκουμε

$$U_a = qV_a = (4{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(-900\ \mathrm{J/C}) = -3{,}6 \times 10^{-6}\ \mathrm{J}$$

$$U_b = qV_b = (4{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(1930\ \mathrm{J/C}) = 7{,}7 \times 10^{-6}\ \mathrm{J}$$

$$U_c = qV_c = 0$$

Όλες αυτές οι τιμές αντιστοιχούν σε U και V να μηδενίζονται στο άπειρο.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Σημειώστε ότι παράγεται *μηδενικό* συνολικό έργο στο φορτίο των 4,0 nC εάν κινηθεί από το σημείο *c* στο άπειρο σε *οποιαδήποτε τροχιά*. Ειδικότερα, έστω ότι ο δρόμος είναι κατά μήκος της μεσοκαθέτου στη γραμμή που ενώνει τα άλλα δύο φορτία q_1 και q_2 στο Σχ. 23.13. Όπως αποδείχθηκε στο Παράδ. 21.8 (Εδ. 21.5), στα σημεία της μεσοκαθέτου η διεύθυνση του $\boldsymbol{E}$ είναι κάθετη προς τη μεσοκάθετο. Συνεπώς, η δύναμη στο φορτίο των 4,0 nC είναι κάθετη προς τον δρόμο και δεν παράγεται έργο σε μετατόπιση κατά μήκος της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.6 ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Ολοκληρώνοντας το ηλεκτρικό πεδίο όπως στην Εξ. (23.17), βρείτε το δυναμικό σε απόσταση r από σημειακό φορτίο q.

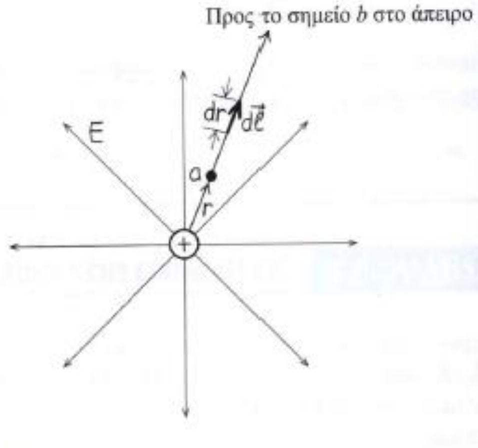
ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Έστω ότι το σημείο *a* στην Εξ. (23.17) βρίσκεται σε απόσταση r και το σημείο *b* να είναι στο άπειρο (**Σχ. 23.14**). Όπως πάντα, επιλέγουμε το δυναμικό να είναι μηδέν σε άπειρη απόσταση από το φορτίο q.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Για να ολοκληρώσουμε μπορούμε να διαλέξουμε οποιονδήποτε δρόμο μεταξύ των *a* και *b*. Ο πλέον βολικός δρόμος είναι μια ευθεία ακτινική γραμμή όπως φαίνεται στο Σχ. 23.14, οπότε το $\boldsymbol{dl}$ είναι στην ακτινική διεύθυνση και έχει μέτρο dr. Γράφοντας $\boldsymbol{dl} = \hat{\boldsymbol{r}}dr$, έχουμε από την Εξ. (23.17)

$$\begin{aligned} V - 0 = V &= \int_r^\infty \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dl} \\ &= \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\bigg|_r^\infty = 0 - \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

23.14 Υπολογισμός του δυναμικού με ολοκλήρωση του $\boldsymbol{E}$ για ένα σημειακό φορτίο.



ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Αυτό συμφωνεί με την Εξ. (23.14) και είναι σωστό για θετικό ή αρνητικό q.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.7 ΚΙΝΗΣΗ ΜΕΣΑ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

Στο **Σχ. 23.15** ένα σωμάτιο σκόνης μάζας $m = 5{,}0 \times 10^{-9}$ kg = 5,0 μg και φορτίου $q_0 = 2{,}0$ nC ξεκινά από την ηρεμία στο σημείο a και κινείται κατά μήκος ευθείας γραμμής προς το σημείο b. Ποια είναι η ταχύτητά του v στο σημείο b;

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Μόνο η διατηρητική ηλεκτρική δύναμη δρα στο σωμάτιο, οπότε η μηχανική ενέργεια διατηρείται: $K_a + U_a = K_b + U_b$. Βρίσκουμε τις δυναμικές ενέργειες U από τα αντίστοιχα δυναμικά V από την Εξ. (23.12): $U_a = q_0V_a$ και $U_b = q_0V_b$.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Έχουμε $K_a = 0$ και $K_b = \frac{1}{2}mv^2$. Αντικαθιστούμε αυτές και τις εκφράσεις για τις U_a και U_b στην εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, έπειτα λύνουμε ως προς v. Βρίσκουμε

$$0 + q_0V_a = \tfrac{1}{2}mv^2 + q_0V_b$$

$$v = \sqrt{\frac{2q_0(V_a - V_b)}{m}}$$

συνεχίζεται

Υπολογίζουμε τα δυναμικά από την Εξ. (23.15), $V = q/4\pi\epsilon_0 r$:

$$V_a = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}) \times \left(\frac{3{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{0{,}010\ \mathrm{m}} + \frac{(-3{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{0{,}020\ \mathrm{m}}\right) = 1350\ \mathrm{V}$$

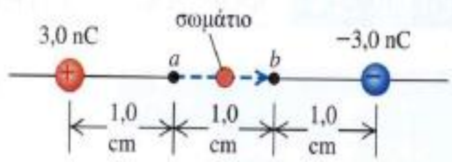
$$V_b = (9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}) \times \left(\frac{3{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{0{,}020\ \mathrm{m}} + \frac{(-3{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{0{,}010\ \mathrm{m}}\right) = -1350\ \mathrm{V}$$

$$V_a - V_b = (1350\ \mathrm{V}) - (-1350\ \mathrm{V}) = 2700\ \mathrm{V}$$

Τελικά,

$$v = \sqrt{\frac{2(2{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(2700\ \mathrm{V})}{5{,}0 \times 10^{-9}\ \mathrm{kg}}} = 46\ \mathrm{m/s}$$

23.15 Το σωμάτιο κινείται από το σημείο a προς σημείο b· η επιτάχυνσή του δεν είναι σταθερή.



ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Το αποτέλεσμά μας είναι λογικό: Το θετικά φορτισμένο σωμάτιο σκόνης κερδίζει ταχύτητα καθώς απομακρύνεται από το φορτίο +3,0 nC και οδεύει προς το φορτίο −3,0 nC. Για να ελέγξουμε τη συνέπεια των μονάδων στην τελική γραμμή των υπολογισμών, σημειώστε ότι 1 V = 1 J/C, οπότε ο αριθμητής στο υπόρριζο έχει μονάδες J ή kg · m²/s².

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.8 ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΗ ΑΓΩΓΙΜΗ ΣΦΑΙΡΑ

Μια στερεά αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R φέρει συνολικό φορτίο q. Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό παντού, μέσα και έξω από τη σφαίρα.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Στο Παράδ. 22.5 (Εδ. 22.4) χρησιμοποιήσαμε τον νόμο του Gauss για να βρούμε το ηλεκτρικό *πεδίο* σε όλα τα σημεία γι' αυτήν την κατανομή φορτίου. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα για να προσδιορίσουμε το δυναμικό.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Από το Παράδ. 22.5 το πεδίο *εκτός* της σφαίρας είναι το ίδιο με αυτό εάν αντικαθιστούσαμε τη σφαίρα με ένα σημειακό φορτίο q. Παίρνουμε το $V = 0$ στο άπειρο, όπως κάναμε για ένα σημειακό φορτίο. Τότε το δυναμικό σε ένα σημείο εκτός της σφαίρας και σε απόσταση r από το κέντρο της είναι το ίδιο ... δυναμικό που οφείλεται σε σημειακό φορτίο q στο κέντρο ...

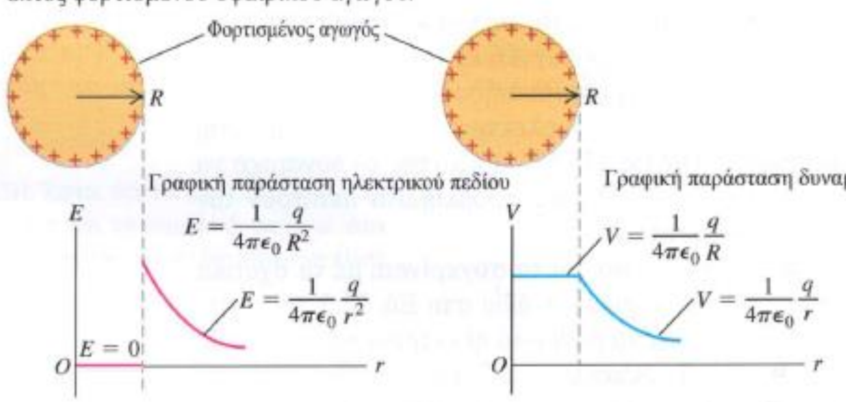
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

Το δυναμικό στην επιφάνεια της σφαίρας είναι $V_{\mathrm{surface}} = q/4\pi$ ...

Εντός της σφαίρας το $\boldsymbol{E}$ είναι μηδέν παντού. Άρα, δεν ... γεται καθόλου έργο σε δοκιμαστικό φορτίο που κινείται ... δύο οποιωνδήποτε σημείων εντός της σφαίρας. Συνεπώς, ... ναμικό είναι το ίδιο σε κάθε σημείο εντός της σφαίρας ... ίσο με την τιμή του $q/4\pi\epsilon_0 R$ στην επιφάνειά της.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Στο **Σχ. 23.16** φαίνονται το πεδίο και το δυ... ως συναρτήσεις του r για θετικό φορτίο q. Σε αυτήν την ... πτωση το ηλεκτρικό πεδίο κατευθύνεται ακτινικά προς το ... τερικό της σφαίρας. Καθώς απομακρύνεστε από τη σφαίρα, ... την κατεύθυνση του $\boldsymbol{E}$, το V ελαττώνεται (όπως πρέπει).

23.16 Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E και το δυναμικό V σε σημεία εντός και εκτός φορτισμένου σφαιρικού αγωγού.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.9 ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΠΛΑΚΕΣ ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΕΣ

Βρείτε το δυναμικό συναρτήσει του ύψους y μεταξύ των δύο αντίθετα φορτισμένων παράλληλων πλακών που συζητήθηκαν στο Εδ. 23.1 (**Σχ. 23.18**).

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Συζητήσαμε αυτήν την περίπτωση στο Εδ. 23.1. Από την Εξ. (23.5) γνωρίζουμε ότι η ηλεκτρική *δυναμική ενέργεια* U για δοκιμαστικό φορτίο q_0 είναι $U = q_0Ey$. (Θέτουμε $y = 0$ και $U = 0$ στην κάτω πλάκα.) Χρησιμοποιούμε την Εξ. (23.12), $U = q_0V$, για να βρούμε το *δυναμικό* V συναρτήσει του y.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Το δυναμικό $V(y)$ στη συντεταγμένη y είναι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου:

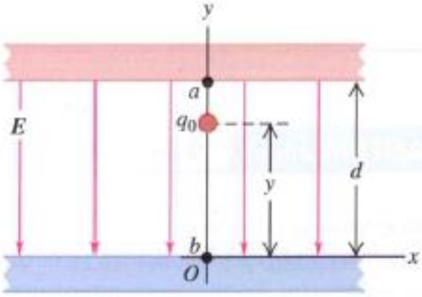
$$V(y) = \frac{U(y)}{q_0} = \frac{q_0Ey}{q_0} = Ey$$

Το δυναμικό ελαττώνεται καθώς κινούμαστε κατά την κατεύθυνση του $\vec{E}$ από την πάνω προς την κάτω πλάκα. Στο σημείο a, όπου $y = d$ και $V(y) = V_a$,

$$V_a - V_b = Ed \quad \text{και} \quad E = \frac{V_a - V_b}{d} = \frac{V_{ab}}{d}$$

όπου V_{ab} είναι το δυναμικό της θετικής πλάκας ως προς την αρνητική πλάκα. Δηλαδή, το ηλεκτρικό πεδίο ισούται με τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών διά της απόστασης μεταξύ αυτών. Για δεδομένη διαφορά δυναμικού V_{ab}, όσο μικρότερη η απόσταση d μεταξύ των δύο πλακών τόσο μεγαλύτερο το μέτρο E του ηλεκτρικού πεδίου. (Αυτή η σχέση μεταξύ του E και του V_{ab} ισχύει *μόνο* για την επίπεδη γεωμετρία που περιγράψαμε. *Δεν* εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπως ομοαξονικοί κύλινδροι ή ομόκεντρες σφαίρες στις οποίες το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι ομογενές.)

23.18 Οι παράλληλες φορτισμένες πλάκες από το Σχ. 23.2.



ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Το αποτέλεσμά μας δείχνει ότι $V = 0$ στην κάτω πλάκα (στο $y = 0$). Αυτό είναι συμβατό με την επιλογή μας $U = q_0V = 0$ για δοκιμαστικό φορτίο τοποθετημένο στην κάτω πλάκα.

ΠΡΟΣΟΧΗ **«Μηδενικό δυναμικό» είναι αυθαίρετο** Ίσως σκεφτείτε ότι, αν ένα αγώγιμο σώμα έχει δυναμικό μηδέν, θα πρέπει αναγκαστικά να έχει και μηδενικό φορτίο. Όμως αυτό δεν είναι ακριβώς έτσι! Ως παράδειγμα, η πλάκα στο $y = 0$ στο Σχ. 23.18 έχει μηδέν δυναμικό ($V = 0$) αλλά έχει μη μηδενικό φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας $-\sigma$. Δεν υπάρχει τίποτα το ιδιαίτερο σχετικά με την περιοχή που το δυναμικό είναι μηδέν· *ορίζουμε* αυτό το μέρος οπουδήποτε θέλουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.10 ΑΠΕΙΡΗ ΓΡΑΜΜΗ ΦΟΡΤΙΟΥ Ή ΑΓΩΓΙΜΟΣ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

Βρείτε το δυναμικό σε απόσταση r από μια πολύ μεγάλου μήκους γραμμή φορτίου με γραμμική πυκνότητα φορτίου (φορτίο ανά μονάδα μήκους) λ.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Τόσο στο Παράδ. 21.10 (Εδ. 21.5) όσο και στο Παράδ. 22.6 (Εδ. 22.4) βρήκαμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο σε ακτινική απόσταση r από μεγάλου μήκους γραμμική κατανομή φορτίου (**Σχ. 23.19a**) έχει μόνο ακτινική συνιστώσα $E_r = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$. Χρησιμοποιούμε αυτήν την έκφραση για να βρούμε το δυναμικό ολοκληρώνοντας το $\boldsymbol{E}$ όπως στην Εξ. (23.17).

ΕΠΙΛΥΣΗ: Αφού το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα, έχουμε $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = E_r dr$. Συνεπώς, από την Εξ. (23.17) το δυναμικό οποιουδήποτε σημείου a ως προς οποιοδήποτε άλλο b, σε ακτινική απόσταση r_a και r_b από τη γραμμική κατανομή φορτίου, είναι

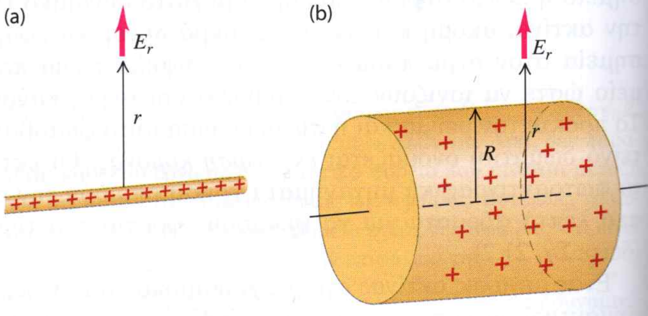
$$V_a - V_b = \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_a^b E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

Εάν πάρουμε το σημείο b στο άπειρο και θέσουμε $V_b = 0$, βρίσκουμε ότι και το V_a είναι *άπειρο* για κάθε πεπερασμένη απόσταση r_a από τη γραμμή φορτίου: $V_a = (\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(\infty/r_a) = \infty$. Αυτό *δεν* είναι ένας χρήσιμος τρόπος να ορίσουμε το V γι' αυτό το πρόβλημα! Η δυσκολία είναι ότι η ίδια η κατανομή εκτείνεται στο άπειρο.

Αντίθετα, όπως προτάθηκε στη Στρατηγική Επίλυσης Προβλημάτων 23.1, θέτουμε $V_b = 0$ στο σημείο b σε αυθαίρετη αλλά *πεπερασμένη* ακτινική απόσταση r_0. Τότε το δυναμικό $V = V_a$ στο σημείο a σε ακτινική απόσταση r δίνεται από $V - 0 = (\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(r_0/r)$, ή

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

23.19 Ηλεκτρικό πεδίο εκτός (a) ενός μακρού, θετικά φορτισμένου σύρματος και (b) ενός μακρού, θετικά φορτισμένου κυλίνδρου.



ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Σύμφωνα με το αποτέλεσμά μας, εάν το λ είναι θετικό, τότε το V ελαττώνεται αυξανομένου του r. Αυτό είναι αναμενόμενο: το V ελαττώνεται καθώς κινούμαστε κατά την κατεύθυνση του $\boldsymbol{E}$.

Από το Παράδ. 22.6, η έκφραση για το E_r, από την οποία ξεκινήσαμε, εφαρμόζεται επίσης στο εξωτερικό αγώγιμου κυλίνδρου με φορτίο ανά μονάδα μήκους λ (Σχ. 23.19b). Συνεπώς, το αποτέλεσμά μας δίνει επίσης το δυναμικό ενός τέτοιου κυλίνδρου, όμως μόνο για τιμές του r (η απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου) ίσες ή μεγαλύτερες από την ακτίνα R του κυλίνδρου. Εάν επιλέξουμε το r_0 να είναι η ακτίνα του κυλίνδρου R, οπότε $V = 0$ όταν $r = R$, τότε σε κάθε σημείο για το οποίο $r > R$,

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{R}{r}$$

Εντός του κυλίνδρου, $\boldsymbol{E} = 0$, και το V έχει την ίδια τιμή (μηδέν) όπως στην επιφάνεια του κυλίνδρου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.11 ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΣ ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ

Ηλεκτρικό φορτίο Q είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα σε λεπτό δακτύλιο ακτίνας a (**Σχ. 23.20**). Βρείτε το δυναμικό σε σημείο P πάνω στον άξονα του δακτυλίου σε απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου.

ΛΥΣΗ

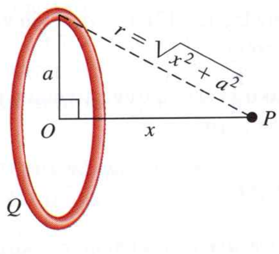
ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Διαιρούμε τον δακτύλιο σε απειροστά τμήματα και χρησιμοποιούμε την Εξ. (23.16) για να βρούμε το V. Όλα τα τμήματα του δακτυλίου (και συνεπώς όλα τα στοιχεία της κατανομής του φορτίου) απέχουν την ίδια απόσταση r από το σημείο P.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Στο Σχ. 23.20 φαίνεται ότι η απόσταση καθενός στοιχείου dq από το σημείο P είναι $r = \sqrt{x^2 + a^2}$. Συνεπώς, μπορούμε να βγάλουμε τον παράγοντα $1/r$ εκτός ολοκληρώματος στην Εξ. (23.16) και

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Όταν το x είναι πολύ μεγαλύτερο από το a, η έκφρασή μας για το V γίνεται προσεγγιστικά $V = Q/4\pi\epsilon_0 x$, το οποίο

23.20 Όλο το φορτίο στον δακτύλιο με φορτίο Q είναι στην ίδια απόσταση r από το σημείο P στον άξονα του δακτυλίου.



είναι το δυναμικό ενός σημειακού φορτίου Q σε απόσταση x. Πολύ μακριά από τον φορτισμένο δακτύλιο, το ηλεκτρικό του δυναμικό φαίνεται ως ενός σημειακού φορτίου. Καταλήξαμε σε παρόμοιο συμπέρασμα για το ηλεκτρικό *πεδίο* δακτυλίου στο Παράδ. 21.9 (Εδ. 21.5).

Γνωρίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλα τα σημεία κατά μήκος του άξονα x από το Παράδ. 21.9 (Εδ. 21.5), συνεπώς μπορούμε επίσης να βρούμε το V κατά μήκος αυτού του άξονα ολοκληρώνοντας το $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$ όπως στην Εξ. (23.17).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.12 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

Θετικό ηλεκτρικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα κατά μήκος γραμμής μήκους $2a$ η οποία βρίσκεται πάνω στον άξονα y μεταξύ του $y = -a$ και $y = +a$ (**Σχ. 23.21**). Βρείτε το δυναμικό στο σημείο P κατά μήκος της μεσοκαθέτου στη γραμμή φορτίου σε απόσταση x από την αρχή.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Αυτή είναι η ίδια περίπτωση του Παραδ. 21.10 (Εδ. 21.5), όπου βρήκαμε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ σε αυθαίρετο σημείο στον άξονα x. Μπορούμε να βρούμε το V στο σημείο P χρησιμοποιώντας την Εξ. (23.16) και να ολοκληρώσουμε σε όλη την κατανομή του φορτίου. Σε αντίθεση προς την περίπτωση του Παραδ. 23.11, κάθε στοιχείο φορτίου dQ απέχει *διαφορετική* απόσταση από το P, συνεπώς η ολοκλήρωση απαιτεί λίγο μεγαλύτερη προσπάθεια.

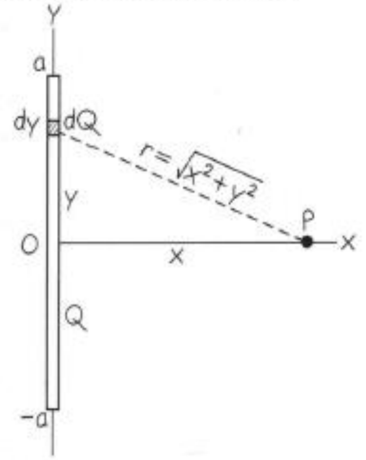
ΕΠΙΛΥΣΗ: Όπως στο Παράδ. 21.10, το στοιχείο φορτίου dQ που αντιστοιχεί σε στοιχείο μήκους dy της ράβδου δίνεται από $dQ = (Q/2a)dy$. Η απόσταση από το dQ στο P είναι $\sqrt{x^2 + y^2}$, οπότε η συνεισφορά dV του στοιχείου φορτίου στο δυναμικό στο σημείο P είναι

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Για να βρούμε το δυναμικό στο P που οφείλεται σε όλη την ράβδο, ολοκληρώνουμε το dV σε όλο το μήκος της ράβδου από $y = -a$ έως $y = a$:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

23.21 Το σκίτσο μας γι' αυτό το πρόβλημα.



Μπορείτε να βρείτε το ολοκλήρωμα σε πίνακα ολοκληρωμάτων. Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + a}{\sqrt{a^2 + x^2} - a}\right)$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Μπορούμε να ελέγξουμε το αποτέλεσμά μας για x να τείνει στο άπειρο. Στο όριο αυτό το σημείο P είναι απείρως μακριά από όλο το φορτίο, οπότε αναμένουμε το V να τείνει στο μηδέν· μπορείτε να επαληθεύσετε ότι αυτό συμβαίνει.

Γνωρίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλα τα σημεία κατά μήκος του άξονα x από το Παράδ. 21.10. Σας προτείνουμε να χρησιμοποιήσετε αυτήν την πληροφορία για να βρείτε το V κατά μήκος αυτού του άξονα ολοκληρώνοντας το $\boldsymbol{E}$ όπως στην Εξ. (23.17).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.13 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΚΑΙ ΠΕΔΙΟ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

Από την Εξ. (23.14) το δυναμικό σε ακτινική απόσταση r από σημειακό φορτίο q είναι $V = q/4\pi\epsilon_0 r$. Βρείτε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου από αυτήν την έκφραση για το V.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Σε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιούμε τη γενική σχέση μεταξύ του ηλεκτρικού δυναμικού ως συνάρτησης της θέσης και του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου. Από τη συμμετρία, το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα E_r· χρησιμοποιούμε την Εξ. (23.23) για να βρούμε αυτήν τη συνιστώσα.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Από την Εξ. (23.23),

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

οπότε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{r}}E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Το αποτέλεσμά μας συμφωνεί με την Εξ. (21.7), όπως πρέπει.

Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι να αγνοήσουμε την ακτινική συμμετρία, να γράψουμε την ακτινική απόσταση ως $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ και να πάρουμε τις παραγώγους του V ως προς το x, y και z όπως στην Εξ. (23.20). Βρίσκουμε

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

και παρομοίως

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Έπειτα από την Εξ. (23.20),

$$\boldsymbol{E} = -\left[\boldsymbol{i}\left(-\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) + \boldsymbol{j}\left(-\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) + \boldsymbol{k}\left(-\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\left(\frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Αυτή η προσέγγιση μας δίνει την ίδια απάντηση, όμως με περισσότερη προσπάθεια. Σαφώς είναι καλύτερα να εκμεταλλευόμαστε τη συμμετρία οποτεδήποτε είναι δυνατό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.14 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΚΑΙ ΠΕΔΙΟ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΔΑΚΤΥΛΙΟΥ

Στο Παράδ. 23.11 (Εδ. 23.3) βρήκαμε ότι για δακτύλιο φορτίου ακτίνας a και ολικού φορτίου Q το δυναμικό στο σημείο P στον άξονα συμμετρίας του δακτυλίου που απέχει απόσταση x από το κέντρο του είναι

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο P.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το Σχ. 23.20 δείχνει αυτήν την περίπτωση. Δίνεται το V συναρτήσει του x κατά μήκος του άξονα x και ζητείται να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο του άξονα αυτού. Από τη συμμετρία της κατανομής φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του δακτυλίου μπορεί να έχει μόνο x συνιστώσα. Τη βρίσκουμε χρησιμοποιώντας την πρώτη των Εξ. (23.19).

ΕΠΙΛΥΣΗ: Η συνιστώσα x του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Αυτή συμφωνεί με το αποτέλεσμα που βρήκαμε στο Παράδ. 21.9.

ΠΡΟΣΟΧΗ Μη χρησιμοποιείτε σχέσεις εκεί που δεν εφαρμόζονται Σε αυτό το παράδειγμα το V δεν εμφανίζεται ως συνάρτηση του y ή z στο άξονα του δακτυλίου, οπότε $\partial V/\partial y = \partial V/\partial z = 0$ και $E_y = E_z = 0$. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι αληθεύει *παντού*· οι εκφράσεις μας για το V και το E_x ισχύουν *για σημεία πάνω στον άξονα μόνο*. Εάν είχαμε την έκφραση για το V, που να ισχύει σε *όλα* τα σημεία του χώρου, θα μπορούσαμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τις συνιστώσες του $\boldsymbol{E}$ σε κάθε σημείο χρησιμοποιώντας την Εξ. (23.19).