SEARS & ZEMANSKY

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ με Σύγχρονη Φυσική

3η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Τόμος Β

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ ΟΠΤΙΚΗ - ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

YOUNG ΚΑΙ FREEDMAN

Θ.Η. Αλεξόπουλος, ΕΜΠ
Ι.Α. Αρβανιτίδης, ΑΠΘ
Α.Α. Αργυρίου, Π. Πατρών
Ε.Α. Δρης, ΕΜΠ
Η.Σ. Ζουμπούλης, ΕΜΠ
Η.Κ. Κατσούφης, ΕΜΠ
Γ.Α. Κουρούκλης, ΑΠΘ
Κ.Ε. Παρασκευαΐδης, ΕΜΠ
Μ.Ν. Πιζάνιας, Π. Πατρών
Ι.Π. Ρίζος, Π. Ιωαννίνων
Θ.Ν. Τομαράς, Π. Κρήτης
Κ. Χριστοδουλίδης, ΕΜΠ

ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

1. ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

ΕΠΙΛΟΓΗ, ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
Ηλίας Κατσούφης

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ:
Τζένη Πάλμου

Απόδοση βιβλίου στην Ελληνική γλώσσα και Επιμέλεια (αλφαβητικά):

Θ.Η. Αλεξόπουλος, *Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Ι.Α. Αρβανιτίδης, *Αναπλ. Καθηγητής Φυσικής του Τμήματος Φυσικής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης*

Α.Α. Αργυρίου, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών*

Ε.Α. Δρης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επστημών, του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Η.Σ. Ζουμπούλης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Η.Κ. Κατσούφης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Γ.Α. Κουρούκλης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής του Τμήματος Χημικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης*

Κ.Ε. Παρασκευαΐδης, *τ. Αναπλ. Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Μ.Ν. Πιζάνιας, *Ομότιμος Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών*

Ι.Π. Ρίζος, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων*

Θ.Ν. Τομαράς, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Κρήτης*

Κ. Χριστοδουλίδης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.1 ΜΕΓΕΘΟΣ (ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ) ΠΥΚΝΩΤΗ 1 F

Οι παράλληλοι οπλισμοί πυκνωτή 1,0 F βρίσκονται σε μεταξύ τους απόσταση 1,0 mm. Ποιο είναι το εμβαδόν τους;

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιεί τη σχέση μεταξύ της χωρητικότητας C, της απόστασης μεταξύ των πλακών d και του εμβαδού της επιφάνειας των πλακών A (είναι η ζητούμενη ποσότητα) για πυκνωτή με παράλληλες πλάκες. Λύνουμε την Εξ. (24.2) ως προς A.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Από την Εξ. (24.2),

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1{,}0\ \mathrm{F})(1{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})}{8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}} = 1{,}1 \times 10^8\ \mathrm{m}^2$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Αυτό αντιστοιχεί σε ένα τετράγωνο με πλευρά περίπου 10 km! Ο όγκος ενός τέτοιου πυκνωτή θα ήταν τουλάχιστον $Ad = 1{,}1 \times 10^5\ \mathrm{m}^3$, ίσος με αυτόν ενός κύβου πλευράς περίπου 50 m. Εντούτοις, είναι δυνατόν να φτιαχτεί πυκνωτής 1 F με πλευρές μερικών *εκατοστών*. Το κόλπο είναι να υπάρχει ένα κατάλληλο υλικό μεταξύ των οπλισμών αντί για κενό, ώστε (εκτός των άλλων) να μπορεί να μικρύνει πάρα πολύ η απόσταση d μεταξύ των πλακών. Αυτό θα το εξετάσουμε περισσότερο στο Εδ. 24.4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΥΚΝΩΤΗ ΜΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΠΛΑΚΕΣ

Οι οπλισμοί επίπεδου πυκνωτή στο κενό βρίσκονται σε απόσταση 5,00 mm και έχουν επιφάνειες 2,00 m². Στον πυκνωτή εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού 10,0 kV. Υπολογίστε (a) τη χωρητικότητα· (b) το φορτίο του κάθε οπλισμού, και (c) το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στον μεταξύ τους χώρο.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Γι' αυτόν τον πυκνωτή με παράλληλες πλάκες δίνεται η επιφάνεια των πλακών A, η απόσταση μεταξύ των πλακών d και η διαφορά δυναμικού $V_{ab} = 1{,}00 \times 10^4$ V. Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα C, το φορτίο

συνεχίζεται

Q στον κάθε οπλισμό και το μέτρο E του ηλεκτρικού πεδίου. Χρησιμοποιούμε την Εξ. (24.2) για να υπολογίσουμε το C και μετά χρησιμοποιούμε την Εξ. (24.1) και το V_{ab} για να βρούμε το Q. Χρησιμοποιούμε την $E = Q/\epsilon_0 A$ για να βρούμε το E.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Από την Εξ. (24.2),

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}) \frac{(2{,}00\ \mathrm{m}^2)}{5{,}00 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}}$$
$$= 3{,}54 \times 10^{-9}\ \mathrm{F} = 0{,}003\,54\ \mu\mathrm{F}$$

(b) Το φορτίο του πυκνωτή είναι

$$Q = CV_{ab} = (3{,}54 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/V})(1{,}00 \times 10^4\ \mathrm{V})$$
$$= 3{,}54 \times 10^{-5}\ \mathrm{C} = 35{,}4\ \mu\mathrm{C}$$

Ο οπλισμός με το υψηλό δυναμικό έχει φορτίο +35,4 μC και ο άλλος οπλισμός έχει φορτίο –35,4 μC.

(c) Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{3{,}54 \times 10^{-5}\ \mathrm{C}}{(8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(2{,}00\ \mathrm{m}^2)}$$
$$= 2{,}00 \times 10^6\ \mathrm{N/C}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Μπορούμε επίσης να βρούμε το E ενθυμούμενοι ότι το ηλεκτρικό πεδίο ισούται με το μέτρο της κλίσης του δυναμικού [Εξ. (23.22)]. Το πεδίο μεταξύ των πλακών είναι ομογενές, οπότε

$$E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{1{,}00 \times 10^4\ \mathrm{V}}{5{,}00 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}} = 2{,}00 \times 10^6\ \mathrm{V/m}$$

(Θυμηθείτε ότι 1 N/C = 1 V/m.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.3 ΣΦΑΙΡΙΚΟΣ ΠΥΚΝΩΤΗΣ

Δύο ομόκεντρα αγώγιμα σφαιρικά κελύφη (φλοιοί) διαχωρίζονται από κενό (**Σχ. 24.5**). Το εσωτερικό κέλυφος έχει ολικό φορτίο $+Q$ και εξωτερική ακτίνα r_a, το εξωτερικό κέλυφος έχει φορτίο $-Q$ και εσωτερική ακτίνα r_b. Βρείτε τη χωρητικότητα αυτού του σφαιρικού πυκνωτή.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Εξ ορισμού, η χωρητικότητα C είναι το μέτρο του φορτίου Q στην κάθε σφαίρα διαιρεμένο διά της διαφοράς δυναμικού V_{ab} μεταξύ των σφαιρών. Πρώτα βρίσκουμε το V_{ab} και μετά χρησιμοποιούμε την Εξ. (24.1) για να βρούμε τη χωρητικότητα $C = Q/V_{ab}$.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Με τη χρήση μιας γκαουσιανής επιφάνειας όπως αυτή που φαίνεται στο Σχ. 24.5, βρήκαμε στο Παράδ. 22.5 (Εδ. 22.4) ότι το φορτίο σε αγώγιμη σφαίρα δημιουργεί μηδενικό πεδίο στο *εσωτερικό* της σφαίρας, οπότε η εξωτερική σφαίρα δεν συμβάλλει στο πεδίο μεταξύ των σφαιρών. Επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των κελυφών είναι το ίδιο με αυτό στο εξωτερικό μιας φορτισμένης αγώγιμης σφαίρας με φορτίο $+Q$. Κάνουμε χρήση των αποτελεσμάτων που βρήκαμε στο Παράδ. 23.8 (Εδ. 23.3). Το δυναμικό σε κάθε σημείο μεταξύ των σφαιρών (συμπεριλαμβανομένων των επιφανειών τους) είναι το δυναμικό που δημιουργεί η εσωτερική σφαίρα, δηλαδή το $V = Q/4\pi\epsilon_0 r$ συν το σταθερό δυναμικό που δημιουργεί η εξωτερική σφαίρα στο εσωτερικό της. Επομένως, προκύπτει ότι το δυναμικό του εσωτερικού (θετικού) αγωγού στο $r = r_a$ ως προς αυτό του εξωτερικού (αρνητικού) αγωγού στο $r = r_b$ είναι

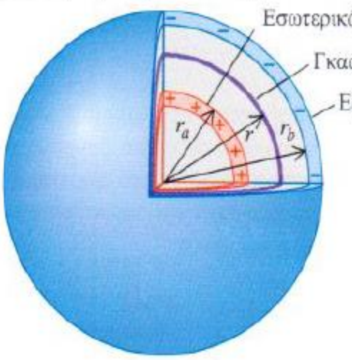
$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

Άρα η χωρητικότητα είναι

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0\frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

24.5 Σφαιρικός πυκνωτής.



Για παράδειγμα, αν $r_a = 9{,}5$ cm και $r_b = 10{,}5$ cm

$$C = 4\pi(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})\frac{(0{,}095\ \text{m})(0{,}105\ \text{m})}{0{,}010\ \text{m}}$$

$$= 1{,}1 \times 10^{-10}\ \text{F} = 110\ \text{pF}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Μπορούμε να συσχετίσουμε την έκφραση για το C με αυτό για τη χωρητικότητα πυκνωτή με παράλληλες πλάκες. Η ποσότητα $4\pi r_a r_b$ είναι ενδιάμεση μεταξύ των επιφανειών $4\pi r_a^2$ και $4\pi r_b^2$ των δύο σφαιρών· πράγματι, είναι ο *γεωμετρικός μέσος* αυτών των δύο επιφανειών, που μπορούμε να παραστήσουμε με A_{gm}. Η απόσταση μεταξύ των σφαιρών είναι $d = r_b - r_a$, άρα μπορούμε να γράψουμε $C = 4\pi\epsilon_0 r_a r_b/(r_b - r_a) = \epsilon_0 A_{\text{gm}}/d$. Αυτό έχει την ίδια μορφή όπως για τις παράλληλες πλάκες $C = \epsilon_0 A/d$. Δηλαδή, αν η απόσταση μεταξύ των σφαιρών είναι πολύ μικρή συγκριτικά με τις ακτίνες τους, η χωρητικότητά τους είναι ίδια με αυτήν παράλληλων πλακών με την ίδια επιφάνεια και μεταξύ τους απόσταση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.4 ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΣ ΠΥΚΝΩΤΗΣ

Δύο κυλινδρικοί ομοαξονικοί αγωγοί μεγάλου μήκους διαχωρίζονται από κενό (**Σχ. 24.6**). Ο εσωτερικός κύλινδρος έχει ακτίνα r_a και γραμμική πυκνότητα φορτίου $+\lambda$. Ο εξωτερικός κύλινδρος έχει εσωτερική ακτίνα r_b και γραμμική πυκνότητα φορτίου $-\lambda$. Βρείτε τη χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους αυτού του πυκνωτή.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Όπως στο Παράδ. 24.3, χρησιμοποιούμε τον ορισμό της χωρητικότητας, $C = Q/V_{ab}$. Για να βρούμε τη διαφορά δυναμικού V_{ab} μεταξύ των κυλίνδρων χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα από το Παράδ. 23.10 (Εδ. 23.3). Από τη γραμμική πυκνότητα φορτίου βρίσκουμε το φορτίο Q για μήκος L των κυλίνδρων. Κατόπιν από την Εξ. (24.1) βρίσκουμε τη χωρητικότητα C. Στόχος μας είναι αυτή η χωρητικότητα διαιρεμένη διά L.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Όπως στο Παράδ. 24.3, το δυναμικό μεταξύ των κυλίνδρων είναι το άθροισμα του δυναμικού που προκαλεί ο εσωτερικός κύλινδρος συν το σταθερό δυναμικό που προκαλεί ο εξωτερικός κύλινδρος. Κάνουμε χρήση του αποτελέσματος του Παραδ. 23.10 για το δυναμικό που προκαλεί ο εσωτερικός κύλινδρος στο εξωτερικό του και έχουμε:

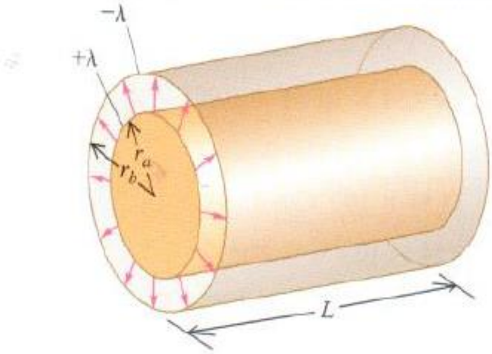
$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{r_0}{r}$$

Εδώ r_0 είναι η αυθαίρετη, *πεπερασμένη* ακτίνα στην οποία $V = 0$. Είναι ευνόητο ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ του δυναμικού στην εξωτερική επιφάνεια, a, του εσωτερικού θετικά φορτισμένου κυλίνδρου ($r = r_a$) και του δυναμικού στην εσωτερική επιφάνεια, b, του εξωτερικού κυλίνδρου ($r = r_b$), είναι

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{r_b}{r_a}$$

Αν το λ είναι θετικό όπως στο Σχ. 24.6, τότε το V_{ab} είναι επίσης θετικό: Ο εσωτερικός κύλινδρος βρίσκεται σε υψηλότερο δυναμικό από τον εξωτερικό.

Το ολικό φορτίο Q σε μήκος L είναι $Q = \lambda L$, οπότε από την Εξ. (24.1) η χωρητικότητα C ενός μήκους L είναι



24.6 Μακρύς κυλινδρικός πυκνωτής. Σε αυτό το σχήμα η γραμμική πυκνότητα φορτίου λ υποτίθεται ότι είναι θετική. Το μέτρο του φορτίου σε μήκος L του κάθε κυλίνδρου είναι λL.

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\lambda L}{\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{r_b}{r_a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_b/r_a)}$$

Η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους είναι

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r_b/r_a)}$$

Αντικαθιστώντας $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m} = 8{,}85\ \mathrm{pF/m}$, βρίσκουμε

$$\frac{C}{L} = \frac{55{,}6\ \mathrm{pF/m}}{\ln(r_b/r_a)}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Η χωρητικότητα ομοαξονικών κυλίνδρων καθορίζεται πλήρως από τις διαστάσεις τους, ακριβώς όπως και στην περίπτωση των επίπεδων και των σφαιρικών πυκνωτών. Τα συνήθη ομοαξονικά καλώδια είναι έτσι φτιαγμένα αλλά αντί για κενό έχουν ένα μονωτικό υλικό μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού αγωγού. Ένα τυπικό καλώδιο που χρησιμοποιείται για τη σύνδεση ενός δέκτη τηλεόρασης με την πρίζα καλωδιακής TV έχει χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους 69 pF/m.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.5 ΠΥΚΝΩΤΕΣ ΣΕ ΣΕΙΡΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ

Στα Σχ. 24.8 και 24.9, έστω $C_1 = 6{,}0\ \mu F$, $C_2 = 3{,}0\ \mu F$, και $V_{ab} = 18$ V. Βρείτε την ισοδύναμη χωρητικότητα, το φορτίο και τη διαφορά δυναμικού για τον κάθε πυκνωτή αν οι πυκνωτές συνδεθούν (a) σε σειρά (δείτε Σχ. 24.8) και (b) παράλληλα (δείτε Σχ. 24.9).

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Και στις δύο περιπτώσεις μια από τις ζητούμενες μεταβλητές είναι η ισοδύναμη χωρητικότητα C_{eq}, η οποία για τον συνδυασμό σε σειρά του μέρους (a) δίνεται από την Εξ. (24.5), ενώ για τον παράλληλο συνδυασμό του μέρους (b) δίνεται από την Εξ. (24.7). Στην κάθε περίπτωση βρίσκουμε το φορτίο και τη διαφορά δυναμικού χρησιμοποιώντας τον ορισμό της χωρητικότητας, Εξ. (24.1), και τους κανόνες που διατυπώθηκαν στη Στρατηγική Επίλυσης Προβλημάτων 24.1.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Χρησιμοποιούμε την Εξ. (24.5) για τον συνδυασμό σε σειρά,

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6{,}0\ \mu F} + \frac{1}{3{,}0\ \mu F} \qquad C_{eq} = 2{,}0\ \mu F$$

Το φορτίο Q του κάθε πυκνωτή σε σειρά είναι ίσο με αυτό του ισοδύναμου πυκνωτή:

$$Q = C_{eq}V = (2{,}0\ \mu F)(18\ V) = 36\ \mu C$$

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του κάθε πυκνωτή είναι αντιστρόφως ανάλογη της χωρητικότητάς του:

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{36\ \mu C}{6{,}0\ \mu F} = 6{,}0\ V$$

$$V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{36\ \mu C}{3{,}0\ \mu F} = 12{,}0\ V$$

(b) Από την Εξ. (24.7) για τον συνδυασμό παράλληλα,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 6{,}0\ \mu F + 3{,}0\ \mu F = 9{,}0\ \mu F$$

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του καθενός από τους πυκνωτές είναι ίδια με αυτή στα άκρα της ισοδύναμης χωρητικότητας, 18 V. Το φορτίο στον κάθε πυκνωτή είναι ανάλογο της χωρητικότητάς του:

$$Q_1 = C_1V = (6{,}0\ \mu F)(18\ V) = 108\ \mu C$$

$$Q_2 = C_2V = (3{,}0\ \mu F)(18\ V) = 54\ \mu C$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Όπως αναμένεται, η ισοδύναμη χωρητικότητα C_{eq} για τον συνδυασμό σειράς στο (a) είναι μικρότερη από την καθεμιά C_1 ή C_2, ενώ στον συνδυασμό παράλληλα του μέρους (b) είναι μεγαλύτερη από την καθεμιά C_1 και C_2. Για δύο πυκνωτές σε σειρά, όπως στο (a), το φορτίο είναι το ίδιο στον κάθε πυκνωτή και η *μεγαλύτερη* διαφορά δυναμικού αναπτύσσεται στα άκρα του πυκνωτή με τη *μικρότερη* χωρητικότητα. Επιπλέον, το άθροισμα των διαφορών δυναμικού στα άκρα των επιμέρους πυκνωτών σε σειρά ισούται με τη διαφορά δυναμικού του ισοδύναμου πυκνωτή: $V_{ac} + V_{cb} = V_{ab} = 18$ V. Αντιθέτως, για δύο πυκνωτές παράλληλα, όπως στο (b), ο κάθε πυκνωτής έχει την ίδια διαφορά δυναμικού και το *μεγαλύτερο* φορτίο αναπτύσσεται στον πυκνωτή με τη *μεγαλύτερη* χωρητικότητα. Μπορείτε να δείξετε ότι το ολικό φορτίο $Q_1 + Q_2$ στον παράλληλο συνδυασμό ισούται με το φορτίο $Q = C_{eq}V$ στον ισοδύναμο πυκνωτή;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.6 ΕΝΑ ΚΥΚΛΩΜΑ ΠΥΚΝΩΤΩΝ

Βρείτε την ισοδύναμη χωρητικότητα του κυκλώματος (δικτυώματος) με πέντε πυκνωτές που φαίνεται στο **Σχ. 24.10a**.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Αυτοί οι πυκνωτές δεν είναι όλοι ούτε σε σειρά ούτε παράλληλα. Μπορούμε, όμως, να αναγνωρίσουμε τμήματα της διάταξης που *είναι* είτε σε σειρά είτε παράλληλα. Αυτά τα συνδυάζουμε όπως περιγράψαμε στη Στρατηγική Επίλυσης Προβλημάτων 24.1 για να βρούμε την ολική ισοδύναμη χωρητικότητα, χρησιμοποιώντας την Εξ. (24.5) για συνδέσεις σε σειρά και την Εξ. (24.7) για συνδέσεις παράλληλα.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Η λεζάντα του Σχ. 24.10 συνοψίζει τη διαδικασία μας. Πρώτα χρησιμοποιούμε την Εξ. (24.5) για να αντικαταστήσουμε τον συνδυασμό σειράς των 12 μF και 6 μF με την ισοδύναμη χωρητικότητά τους C':

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{12\ \mu\text{F}} + \frac{1}{6\ \mu\text{F}} \qquad C' = 4\ \mu\text{F}$$

Αυτό μας δίνει τον ισοδύναμο συνδυασμό του Σχ.24.10b. Τώρα βλέπουμε τρεις πυκνωτές παράλληλα και χρησιμοποιούμε την Εξ. (24.7) για να τους αντικαταστήσουμε με την ισοδύναμη χωρητικότητά τους C'':

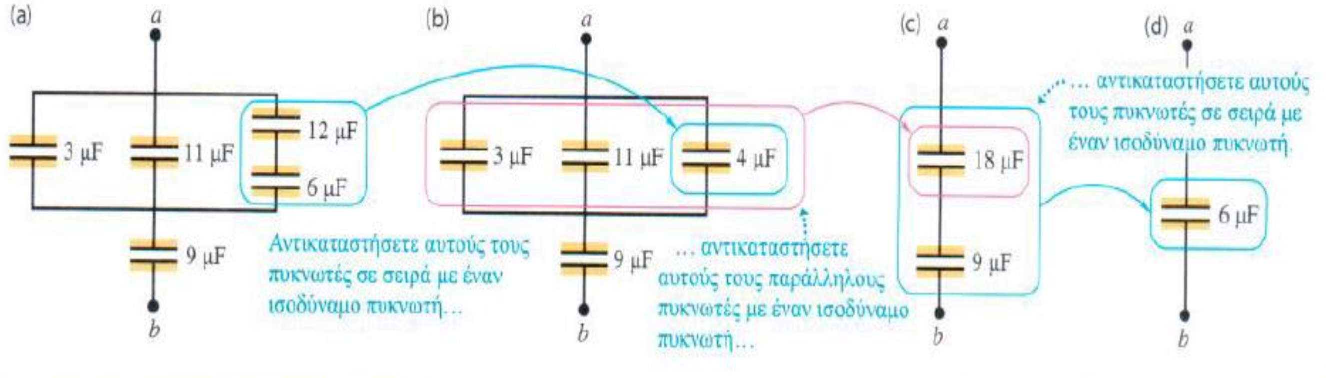
$$C'' = 3\ \mu\text{F} + 11\ \mu\text{F} + 4\ \mu\text{F} = 18\ \mu\text{F}$$

Αυτό μας δίνει τον ισοδύναμο συνδυασμό του Σχ. 24.10c, που έχει δύο πυκνωτές σε σειρά. Χρησιμοποιούμε την Εξ. (24.5) και τους αντικαθιστούμε με την ισοδύναμη χωρητικότητά τους C_{eq}, που είναι και ο στόχος μας (Σχ. 24.10d):

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{18\ \mu\text{F}} + \frac{1}{9\ \mu\text{F}} \qquad C_{eq} = 6\mu\text{F}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Αν η διαφορά δυναμικού στα άκρα του όλου δικτυώματος στο Σχ. 24.10a είναι $V_{ab} = 9{,}0$ V, το ολικό φορτίο στο δικτύωμα είναι $Q = C_{eq}V_{ab} = (6\ \mu\text{F})(9{,}0\ \text{V}) = 54\ \mu\text{C}$. Μπορείτε να βρείτε το φορτίο και την τάση για τον καθένα από τους πέντε επιμέρους πυκνωτές;

24.10 (a) Κύκλωμα (δικτύωμα) πυκνωτών μεταξύ των σημείων *a* και *b*. (b) Οι πυκνωτές των 12 μF και 6 μF σε σειρά στο (a) έχουν αντικατασταθεί με έναν ισοδύναμο πυκνωτή 4 μF. (c) Οι παράλληλοι πυκνωτές των 3 μF, 11 μF, και 4 μF στο (b) έχουν αντικατασταθεί με έναν ισοδύναμο πυκνωτή 18 μF. (d) Τελικώς, οι πυκνωτές των 18 μF και 9 μF σε σειρά στο (c) έχουν αντικατασταθεί με έναν ισοδύναμο πυκνωτή 6 μF.

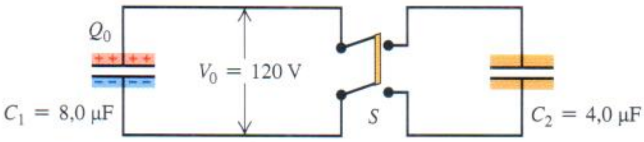


Αυτό *δεν* είναι σωστό· είναι απλώς ένας διαφορετικός τρόπος ερμηνείας της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας. Μπορούμε να θεωρούμε την ενέργεια δεδομένου συστήματος φορτίων ως μια ιδιότητα που μοιράζεται μεταξύ όλων των φορτίων ή μπορούμε να σκεφτόμαστε την ενέργεια ως μια ιδιότητα του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργούν τα φορτία. Και οι δύο ερμηνείες οδηγούν στην ίδια τιμή για τη δυναμική ενέργεια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.7 ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΦΟΡΤΙΟΥ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΥΚΝΩΤΩΝ

Συνδέουμε έναν πυκνωτή $C_1 = 8{,}0\ \mu F$ σε ένα τροφοδοτικό, τον φορτίζουμε σε τάση $V_0 = 120$ V και αποσυνδέουμε το τροφοδοτικό (**Σχ. 24.12**). Ο διακόπτης S είναι ανοιχτός. (a) Πόσο είναι το φορτίο Q_0 στον C_1; (b) Πόση ενέργεια έχει αποθηκευτεί στον C_1; (c) Ο πυκνωτής χωρητικότητας $C_2 = 4{,}0\ \mu F$ είναι αρχικά αφόρτιστος. Κλείνουμε τον διακόπτη S. Αφού πάψει η ροή φορτίου, πόση είναι η διαφορά δυναμικού στα άκρα του κάθε πυκνωτή και πόσο είναι το φορτίο στον κάθε πυκνωτή; (d) Ποια είναι η τελική ενέργεια του συστήματος;

24.12 Όταν κλείσει ο διακόπτης S, ο φορτισμένος πυκνωτής C_1 συνδέεται με τον αφόρτιστο πυκνωτή C_2. Το κεντρικό μέρος του διακόπτη είναι ένα μονωτικό χερούλι· φορτίο μπορεί να κινηθεί μόνο μεταξύ των δύο άνω ακροδεκτών και μεταξύ των δύο κάτω ακροδεκτών.



ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Στα (a) και (b) βρίσκουμε το φορτίο Q_0 και την αποθηκευμένη ενέργεια U_{initial} για τον έναν φορτισμένο πυκνωτή C_1 από τις Εξ. (24.1) και (24.9), αντιστοίχως. Μετά το κλείσιμο του διακόπτη S, ένα σύρμα συνδέει τους πάνω οπλισμούς των δύο πυκνωτών και ένα άλλο σύρμα συνδέει τους κάτω οπλισμούς· τώρα οι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Στο (c) χρησιμοποιούμε το χαρακτηριστικό της παράλληλης σύνδεσης για να προσδιορίσουμε πώς κατανέμεται το φορτίο Q_0 μεταξύ των δύο πυκνωτών. Στο (d) χρησιμοποιούμε ξανά την Εξ. (24.9) για να βρούμε την αποθηκευμένη ενέργεια στους πυκνωτές C_1 και C_2· η ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα αυτών των τιμών.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Το αρχικό φορτίο Q_0 στον C_1 είναι

$$Q_0 = C_1 V_0 = (8{,}0\ \mu F)(120\ V) = 960\ \mu C$$

(b) Η αρχική αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή C_1 είναι

$$U_{\text{initial}} = \tfrac{1}{2} Q_0 V_0 = \tfrac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ C)(120\ V) = 0{,}058\ J$$

(c) Μετά το κλείσιμο του διακόπτη, το θετικό φορτίο Q_0 κατανέμεται στους πάνω οπλισμούς και των δύο πυκνωτών και το αρνητικό φορτίο $-Q_0$ κατανέμεται στους κάτω οπλισμούς. Έστω Q_1 και Q_2 τα μέτρα των τελικών φορτίων στους δύο πυκνωτές. Η διατήρηση του φορτίου επιβάλλει ότι $Q_1 + Q_2 = Q_0$. Η διαφορά δυναμικού V μεταξύ των οπλισμών είναι ίδια και για τους δύο πυκνωτές διότι είναι συνδεδεμένοι παράλληλα, οπότε τα φορτία είναι $Q_1 = C_1 V$ και $Q_2 = C_2 V$. Τώρα έχουμε τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις που συνδέουν τους τρεις αγνώστους Q_1, Q_2 και V. Τις λύνουμε και βρίσκουμε

$$V = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = \frac{960\ \mu C}{8{,}0\ \mu F + 4{,}0\ \mu F} = 80\ V$$

$$Q_1 = 640\ \mu C \qquad Q_2 = 320\ \mu C$$

(d) Η τελική ενέργεια του συστήματος είναι

$$U_{\text{final}} = \tfrac{1}{2} Q_1 V + \tfrac{1}{2} Q_2 V = \tfrac{1}{2} Q_0 V$$
$$= \tfrac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ C)(80\ V) = 0{,}038\ J$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Η τελική ενέργεια είναι μικρότερη από την αρχική ενέργεια· η διαφορά μετατράπηκε σε ενέργεια άλλης μορφής. Οι αγωγοί γίνονται λίγο πιο θερμοί ένεκα της ωμικής αντίστασής τους και μέρος της ενέργειας εκπέμπεται ως ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Θα μελετήσουμε πιο λεπτομερειακά τη συμπεριφορά των πυκνωτών στα Κεφ. 26 και 31.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.8 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

(a) Πόσο είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που χρειάζεται για να αποθηκευτεί 1,00 J ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας σε όγκο 1,00 m³ στο κενό; (b) Αν το μέτρο του πεδίου είναι δέκα φορές το προηγούμενο, πόση ενέργεια είναι αποθηκευμένη ανά κυβικό μέτρο;

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Χρησιμοποιούμε τη σχέση μεταξύ του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου E και της πυκνότητας ενέργειας u. Στο (a) χρησιμοποιούμε την πληροφορία που μας δίνεται για να βρούμε το u· μετά χρησιμοποιούμε την Εξ. (24.11) για να βρούμε την αντίστοιχη τιμή του E. Στο (b) η Εξ. (24.11) μας λέει πώς μεταβάλλεται το u με το E.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Η ενεργειακή πυκνότητα που θέλουμε είναι $u = 1{,}00\ J/m^3$. Κατόπιν, από την Εξ. (24.11),

$$E = \sqrt{\frac{2u}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1{,}00\ J/m^3)}{8{,}85 \times 10^{-12}\ C^2/N \cdot m^2}}$$
$$= 4{,}75 \times 10^5\ N/C = 4{,}75 \times 10^5\ V/m$$

(b) Η Εξ. (24.11) δείχνει ότι το u είναι ανάλογο του E^2. Αν το E πολλαπλασιαστεί κατά παράγοντα 10, το u πολλαπλασιάζεται κατά παράγοντα $10^2 = 100$, οπότε η πυκνότητα ενέργειας γίνεται $u = 100\ J/m^3$.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Ο ξηρός αέρας μπορεί να κρατήσει ηλεκτρικό πεδίο περίπου 3×10^6 V/m χωρίς να υποστεί *διηλεκτρική κατάρρευση*, κάτι που θα συζητήσουμε στο Εδ. 24.4. Εκεί θα δούμε ότι τα μέτρα των πεδίων σε μονωτές στην πράξη μπορεί να είναι ακόμη μεγαλύτερα από αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.9 ΔΥΟ ΤΡΟΠΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΑΠΟΘΗΚΕΥΜΕΝΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΣΕ ΠΥΚΝΩΤΗ

Ο σφαιρικός πυκνωτής που περιγράψαμε στο Παράδ. 24.3 (Εδ. 24.1) έχει φορτία $+Q$ και $-Q$ στον εσωτερικό και στον εξωτερικό του οπλισμό. Βρείτε την αποθηκευμένη στον πυκνωτή ηλεκτρική δυναμική ενέργεια (a) χρησιμοποιώντας τη χωρητικότητα C που βρέθηκε στο Παράδ. 24.3, και (b) ολοκληρώνοντας την πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου u.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Μπορούμε να προσδιορίσομε την αποθηκευμένη ενέργεια U σε έναν πυκνωτή με δύο τρόπους: από το έργο που εκτελείται για να τοποθετηθούν τα φορτία στους δύο οπλισμούς και από την ενέργεια του μεταξύ των οπλισμών ηλεκτρικού πεδίου. Οι περιγραφές είναι ισοδύναμες, άρα πρέπει να μας δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα. Στο Παράδ. 24.3 βρήκαμε τη χωρητικότητα C και το μέτρο του πεδίου E στον χώρο μεταξύ των οπλισμών. (Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν μέσα στην εσωτερική σφαίρα· είναι επίσης μηδέν έξω από την εσωτερική επιφάνεια της εξωτερικής σφαίρας, διότι μια γκαουσιανή επιφάνεια με ακτίνα $r < r_a$ ή $r > r_b$ περικλείει μηδενικό ολικό φορτίο. Επομένως, η πυκνότητα ενέργειας είναι μη μηδενική μόνο στον χώρο μεταξύ των σφαιρών, $r_a < r < r_b$). Στο (a) χρησιμοποιούμε την Εξ. (24.9) για να βρούμε το U. Στο (b) χρησιμοποιούμε την Εξ. (24.11) για να βρούμε το u, το οποίο ολοκληρώνουμε πάνω στον όγκο μεταξύ των σφαιρών για να βρούμε το U.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Από το Παράδ. 24.3, ο σφαιρικός πυκνωτής έχει χωρητικότητα

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

Όπου r_a και r_b είναι οι ακτίνες της εσωτερικής και της εξωτερικής αγώγιμης σφαίρας, αντιστοίχως. Από την Εξ. (24.9) η αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή είναι

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

(b) Το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή $r_a < r < r_b$ μεταξύ των δύο αγώγιμων σφαιρών έχει μέτρο $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Η πυκνότητα ενέργειας σε αυτήν την περιοχή είναι

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

Η πυκνότητα ενέργειας *δεν* είναι *ομοιόμορφη*· μειώνεται γρήγορα με την αύξηση της απόστασης από το κέντρο του πυκνωτή. Για να βρεθεί η ολική ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου, ολοκληρώνουμε το u (ενέργεια ανά μονάδα όγκου) πάνω στην περιοχή $r_a < r < r_b$. Χωρίζουμε αυτήν την περιοχή σε σφαιρικούς φλοιούς ακτίνας r, επιφάνειας εμβαδού $4\pi r^2$, πάχους dr και όγκου $dV = 4\pi r^2\,dr$. Οπότε

$$U = \int u\,dV = \int_{r_a}^{r_b}\left(\frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}\right)4\pi r^2\,dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a}\right)$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια μπορεί να σχετιστεί είτε με τα *φορτία*, όπως στο (a), είτε με το *πεδίο*, όπως στο (b)· το υπολογιζόμενο ποσό ενέργειας είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.10 ΠΥΚΝΩΤΗΣ ΜΕ ΚΑΙ ΧΩΡΙΣ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ

Έστω ότι η καθεμιά από τις παράλληλες πλάκες στο Σχ. 24.15 έχει επιφάνεια 2000 cm^2 ($2{,}00 \times 10^{-1}$ m^2) και βρίσκονται σε μεταξύ τους απόσταση 1,00 cm ($1{,}00 \times 10^{-2}$ m). Συνδέουμε τον πυκνωτή με ένα τροφοδοτικό και φορτίζεται σε διαφορά δυναμικού $V_0 = 3{,}00$ kV, κατόπιν τον αποσυνδέουμε από το τροφοδοτικό. Μεταξύ των πλακών εισάγουμε ένα φύλλο μονωτικού πλαστικού υλικού, που γεμίζει πλήρως τον χώρο μεταξύ τους. Βρίσκουμε ότι η διαφορά δυναμικού μειώνεται σε 1,00 kV ενώ το φορτίο στην κάθε πλάκα του πυκνωτή παραμένει σταθερό. Υπολογίστε (a) την αρχική χωρητικότητα C_0· (b) το μέτρο του φορτίου Q σε κάθε πλάκα· (c) τη χωρητικότητα C αφού μπήκε το διηλεκτρικό· (d) τη διηλεκτρική σταθερά K του διηλεκτρικού· (e) την επιτρεπτότητα ϵ του διηλεκτρικού· (f) το μέτρο του επαγόμενου φορτίου Q_i στην κάθε πλευρά του διηλεκτρικού· (g) το αρχικό ηλεκτρικό πεδίο E_0 μεταξύ των οπλισμών, και (h) το ηλεκτρικό πεδίο E μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιεί τις περισσότερες από τις σχέσεις που συζητήσαμε για πυκνωτές και διηλεκτρικά. (Σχέσεις ενέργειας χρησιμοποιούνται στο Παράδ. 24.11.) Οι περισσότερες από τις ζητούμενες μεταβλητές μπορούν να βρεθούν με πολλούς τρόπους. Ένα δείγμα αποτελούν οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στα επόμενα· σας ενθαρρύνουμε να σκεφτείτε και άλλες μεθόδους και να συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Με κενό μεταξύ των πλακών, χρησιμοποιούμε την Εξ. (24.19) με $K = 1$:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}) \frac{2{,}00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2}{1{,}00 \times 10^{-2}\ \text{m}}$$
$$= 1{,}77 \times 10^{-10}\ \text{F} = 177\ \text{pF}$$

(b) Από τον ορισμό της χωρητικότητας, Εξ. (24.1),

$$Q = C_0 V_0 = (1{,}77 \times 10^{-10}\ \text{F})(3{,}00 \times 10^3\ \text{V})$$
$$= 5{,}31 \times 10^{-7}\ \text{C} = 0{,}531\ \mu\text{C}$$

(c) Όταν εισαχθεί το διηλεκτρικό, το Q μένει το ίδιο αλλά η διαφορά δυναμικού μειώνεται σε $V = 1{,}00$ kV. Επομένως, από την Εξ. (24.1), η νέα χωρητικότητα είναι

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{5{,}31 \times 10^{-7}\ \text{C}}{1{,}00 \times 10^3\ \text{V}} = 5{,}31 \times 10^{-10}\ \text{F}$$
$$= 531\ \text{pF}$$

(d) Από την Εξ. (24.12), η σχετική διηλεκτρική σταθερά είναι

$$K = \frac{C}{C_0} = \frac{5{,}31 \times 10^{-10}\ \text{F}}{1{,}77 \times 10^{-10}\ \text{F}} = \frac{531\ \text{pF}}{177\ \text{pF}}$$
$$= 3{,}00$$

Εναλλακτικά, από την Εξ. (24.13),

$$K = \frac{V_0}{V} = \frac{3000\ \text{V}}{1000\ \text{V}} = 3{,}00$$

(e) Χρησιμοποιώντας το K από το (d) στην Εξ. (24.17), η επιτρεπτότητα είναι

$$\epsilon = K\epsilon_0 = (3{,}00)(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)$$
$$= 2{,}66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

(f) Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της Εξ. (24.16) επί την επιφάνεια του κάθε οπλισμού A βρίσκουμε το επαγόμενο φορτίο $Q_i = \sigma_i A$ σε σχέση με το φορτίο $Q = \sigma A$ στον κάθε οπλισμό:

$$Q_i = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right) = (5{,}31 \times 10^{-7}\ \text{C})\left(1 - \frac{1}{3{,}00}\right)$$
$$= 3{,}54 \times 10^{-7}\ \text{C}$$

(g) Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των πλακών είναι ομογενές, το μέτρο του είναι η διαφορά δυναμικού διαιρεμένη διά της μεταξύ τους απόστασης:

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{3000\ \text{V}}{1{,}00 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 3{,}00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

συνεχίζεται

(h) Μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού,

$$E = \frac{V}{d} = \frac{1000\ \text{V}}{1{,}00 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 1{,}00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

ή, από την Εξ. (24.18),

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon A} = \frac{5{,}31 \times 10^{-7}\ \text{C}}{(2{,}66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2{,}00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2)}$$
$$= 1{,}00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

ή, από την Εξ. (24.15),

$$E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q_i}{\epsilon_0 A}$$
$$= \frac{(5{,}31 - 3{,}54) \times 10^{-7}\ \text{C}}{(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2{,}00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2)}$$
$$= 1{,}00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

ή, από την Εξ. (24.14),

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{3{,}00 \times 10^5\ \text{V/m}}{3{,}00} = 1{,}00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Η εισαγωγή του διηλεκτρικού αύξησε τη χωρητικότητα κατά έναν παράγοντα $K = 3{,}00$ και μείωσε το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών κατά έναν παράγοντα $1/K = 1/3{,}00$. Αυτά έγιναν διότι αναπτύχθηκαν επαγόμενα φορτία στις επιφάνειες του διηλεκτρικού μέτρου $Q(1 - 1/K) = Q(1 - 1/3{,}00) = 0{,}667Q$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.11 ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΜΕ ΚΑΙ ΧΩΡΙΣ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ

Βρείτε την αποθηκευμένη ενέργεια στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή στο Παράδ. 24.10 και την ενεργειακή πυκνότητα, πριν και μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού φύλλου.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Θεωρούμε τις ιδέες για την ενέργεια που αποθηκεύεται σε πυκνωτή και την πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου. Χρησιμοποιούμε την Εξ. (24.9) για να βρούμε την ενεργειακή πυκνότητα.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Από την Εξ. (24.9), οι αποθηκευμένες ενέργειες U_0 και U χωρίς και με διηλεκτρικό μεταξύ των οπλισμών είναι

$$U_0 = \tfrac{1}{2}C_0V_0^2 = \tfrac{1}{2}(1{,}77 \times 10^{-10}\ \mathrm{F})(3000\ \mathrm{V})^2 = 7{,}97 \times 10^{-4}\ \mathrm{J}$$

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}(5{,}31 \times 10^{-10}\ \mathrm{F})(1000\ \mathrm{V})^2 = 2{,}66 \times 10^{-4}\ \mathrm{J}$$

Η τελική ενέργεια είναι το ένα τρίτο της αρχικής.

Η Εξ. (24.20) δίνει τις ενεργειακές πυκνότητες χωρίς και με το διηλεκτρικό:

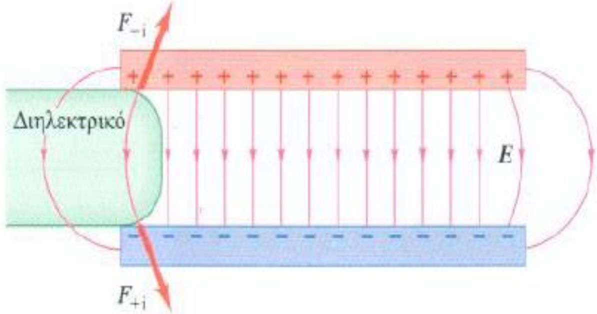
$$u_0 = \tfrac{1}{2}\epsilon_0E_0^2 = \tfrac{1}{2}(8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(3{,}00 \times 10^5\ \mathrm{N/C})^2$$
$$= 0{,}398\ \mathrm{J/m^3}$$

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2 = \tfrac{1}{2}(2{,}66 \times 10^{-11}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(1{,}00 \times 10^5\ \mathrm{N/C})^2$$
$$= 0{,}133\ \mathrm{J/m^3}$$

Η ενεργειακή πυκνότητα με το διηλεκτρικό είναι το ένα τρίτο της αρχικής ενεργειακής πυκνότητας.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Μπορούμε να ελέγξουμε την απάντησή μας για το u_0 λαμβάνοντας υπόψη ότι ο όγκος μεταξύ των πλακών είναι $V = (0{,}200\ \mathrm{m^2})(0{,}0100\mathrm{m}) = 0{,}002\ 00\mathrm{m^3}$. Αφού το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των πλακών είναι ομογενές (ομοιόμορφο), το u_0 είναι επίσης ομοιόμορφο και επομένως η πυκνότητα ενέργειας είναι απλώς η αποθηκευμένη ενέργεια διαιρεμένη διά του όγκου:

24.16 Το κροσσωτό πεδίο στα άκρα του πυκνωτή ασκεί δυνάμεις F_{-i} και F_{+i} στα αρνητικά και θετικά επαγόμενα επιφανειακά φορτία του διηλεκτρικού, έλκοντας το διηλεκτρικό μέσα στον πυκνωτή.



$$u_0 = \frac{U_0}{V} = \frac{7{,}97 \times 10^{-4}\ \mathrm{J}}{0{,}002\ 00\ \mathrm{m^3}} = 0{,}398\ \mathrm{J/m^3}$$

Αυτό συμφωνεί με την προηγούμενη απάντησή μας. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ίδια διαδικασία για να ελέγξετε το αποτέλεσμά μας για το u.

Γενικώς, όταν εισάγεται διηλεκτρικό στον πυκνωτή ενώ το φορτίο στην κάθε πλάκα παραμένει το ίδιο, η επιτρεπτότητα του μέσου ϵ αυξάνεται κατά παράγοντα K (τη διηλεκτρική σταθερά), ενώ το ηλεκτρικό πεδίο E και η ενεργειακή πυκνότητα $u = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ μειώνονται κατά παράγοντα $1/K$. Πού πήγε η ενέργεια; Η απάντηση σχετίζεται με το ανομοιογενές κροσσωτό πεδίο στα άκρα ενός πραγματικού επίπεδου πυκνωτή. Όπως δείχνει το **Σχ. 24.16**, αυτό το πεδίο τείνει να τραβήξει το διηλεκτρικό στον χώρο μεταξύ των πλακών, εκτελώντας πάνω του έργο. Θα μπορούσαμε να δέσουμε ένα ελατήριο στο αριστερό μέρος του διηλεκτρικού στο Σχ. 24.16 και να χρησιμοποιήσουμε αυτήν τη δύναμη για να τεντώσουμε το ελατήριο. Επειδή εκτελείται έργο από το πεδίο, η ενεργειακή πυκνότητα του πεδίου μειώνεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24.12 ΣΦΑΙΡΙΚΟΣ ΠΥΚΝΩΤΗΣ ΜΕ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ

Χρησιμοποιήστε τον νόμο του Gauss για να βρείτε τη χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή του Παραδ. 24.3 (Εδ. 24.1) όταν ο όγκος μεταξύ των φλοιών είναι γεμάτος με ένα μονωτικό λάδι με διηλεκτρική σταθερά K.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Η σφαιρική συμμετρία του προβλήματος δεν άλλαξε με την παρουσία του διηλεκτρικού, επομένως, όπως στο Παράδ. 24.3, χρησιμοποιούμε μεταξύ των δύο σφαιρών μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας r. Αφού υπάρχει διηλεκτρικό, χρησιμοποιούμε τον νόμο του Gauss στη μορφή της Εξ. (24.23).

ΕΠΙΛΥΣΗ: Από την Εξ. (24.23),

$$\oint K\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint KE\, dA = KE \oint dA = (KE)(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi K\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

όπου $\epsilon = K\epsilon_0$. Σε σύγκριση με την περίπτωση που υπάρχει κενό μεταξύ των αγώγιμων φλοιών, το ηλεκτρικό πεδίο είναι μικρότερο κατά έναν παράγοντα $1/K$. Η διαφορά δυναμικού V_{ab} μεταξύ των φλοιών είναι επίσης μικρότερη κατά τον ίδιο παράγοντα και έτσι η χωρητικότητα $C = Q/V_{ab}$ έχει αυξηθεί κατά παράγοντα K, ακριβώς όπως για επίπεδο πυκνωτή με διηλεκτρικό. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για κενό του Παραδ. 24.3, βρίσκουμε ότι η χωρητικότητα με το διηλεκτρικό είναι

$$C = \frac{4\pi K\epsilon_0 r_a r_b}{r_b - r_a} = \frac{4\pi\epsilon r_a r_b}{r_b - r_a}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Όταν το διηλεκτρικό γεμίζει τον όγκο μεταξύ των δύο αγωγών, η χωρητικότητα είναι απλώς K φορές η χωρητικότητα χωρίς διηλεκτρικό. Το αποτέλεσμα είναι πιο πολύπλοκο αν το διηλεκτρικό γεμίζει μερικώς αυτόν τον όγκο.