SEARS & ZEMANSKY

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ με Σύγχρονη Φυσική

3η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Τόμος Β

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ
ΟΠΤΙΚΗ - ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

YOUNG ΚΑΙ FREEDMAN

Θ.Η. Αλεξόπουλος, ΕΜΠ
Ι.Α. Αρβανιτίδης, ΑΠΘ
Α.Α. Αργυρίου, Π. Πατρών
Ε.Α. Δρης, ΕΜΠ
Η.Σ. Ζουμπούλης, ΕΜΠ
Η.Κ. Κατσούφης, ΕΜΠ
Γ.Α. Κουρούκλης, ΑΠΘ
Κ.Ε. Παρασκευαΐδης, ΕΜΠ
Μ.Ν. Πιζάνιας, Π. Πατρών
Ι.Π. Ρίζος, Π. Ιωαννίνων
Θ.Ν. Τομαράς, Π. Κρήτης
Κ. Χριστοδουλίδης, ΕΜΠ

ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

1. ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

**ΕΠΙΛΟΓΗ,
ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ
ΚΑΙ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:**
Ηλίας Κατσούφης

**ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟ
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ:**
Τζένη Πάλμου

copyright @ 2020 ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΠΑΖΗΣΗ

Απόδοση βιβλίου στην Ελληνική γλώσσα και Επιμέλεια (αλφαβητικά):

Θ.Η. Αλεξόπουλος, *Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Ι.Α. Αρβανιτίδης, *Αναπλ. Καθηγητής Φυσικής του Τμήματος Φυσικής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης*

Α.Α. Αργυρίου, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών*

Ε.Α. Δρης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επστημών, του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Η.Σ. Ζουμπούλης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Η.Κ. Κατσούφης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Γ.Α. Κουρούκλης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής του Τμήματος Χημικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης*

Κ.Ε. Παρασκευαΐδης, *τ. Αναπλ. Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

Μ.Ν. Πιζάνιας, *Ομότιμος Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών*

Ι.Π. Ρίζος, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων*

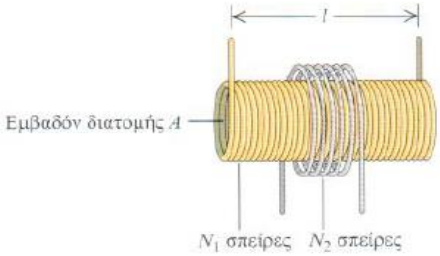
Θ.Ν. Τομαράς, *Καθηγητής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Κρήτης*

Κ. Χριστοδουλίδης, *Ομότιμος Καθηγητής Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου*

copyright @ 2020 ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΠΑΖΗΣΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΜΟΙΒΑΙΑΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Σε μια μορφή του πηνίου Tesla (μια γεννήτρια υψηλής τάσης που είναι δημοφιλής στα μουσεία επιστημών), ένα μακρύ σωληνοειδές πηνίο μήκους l και με εμβαδόν διατομής A φέρει πολύ πυκνά περιτυλιγμένες N_1 σπείρες σύρματος. Ένα πηνίο με N_2 σπείρες το περιβάλλει στο κέντρο του (**Σχ. 30.3**). Να βρείτε την αμοιβαία επαγωγή M.



30.3 Ένα μακρύ σωληνοειδές πηνίο με εμβαδόν διατομής A και N_1 σπείρες περιβάλλεται στο κέντρο του από πηνίο με N_2 σπείρες.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Η αμοιβαία επαγωγή συμβαίνει στην παρούσα περίπτωση γιατί ένα ρεύμα στο ένα από τα πηνία δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο που προκαλεί ροή μέσω του άλλου πηνίου. Από το Παράδ. 28.9 (Εδ. 28.7) έχουμε μία έκφραση [Εξ. (28.23)] για το μέτρο του πεδίου B_1 στο κέντρο ενός σωληνοειδούς (πηνίο 1) συναρτήσει του ρεύματος i_1 του σωληνοειδούς. Αυτό μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τη ροή μέσα από μια διατομή του σωληνοειδούς. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει σχεδόν καθόλου μαγνητικό πεδίο εκτός ενός πολύ μακρού σωληνοειδούς, αυτή είναι επίσης ίση με τη ροή Φ_{B2} μέσα από κάθε σπείρα του *εξωτερικού* πηνίου (2). Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την Εξ. (30.5), με τη μορφή $M = N_2\Phi_{B2}/i_1$, για τον προσδιορισμό της M.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Η Εξ. (28.23) είναι εκπεφρασμένη συναρτήσει του αριθμού των σπειρών ανά μονάδα μήκους, η οποία για το σωληνοειδές (1) είναι $n_1 = N_1/L$. Συνεπώς,

$$B_1 = \mu_0 n_1 i_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}$$

Η ροή μέσω της διατομής του σωληνοειδούς ισούται με $B_1 A$. Όπως αναφέραμε παραπάνω, αυτή ισούται επίσης με τη ροή Φ_{B2} μέσω κάθε σπείρας του εξωτερικού πηνίου, ανεξαρτήτως της επιφάνειας της διατομής του. Από την Εξ. (30.5), η αμοιβαία επαγωγή M είναι τότε

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_2 B_1 A}{i_1} = \frac{N_2}{i_1}\frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}A = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{l}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Η αμοιβαία επαγωγή M οποιωνδήποτε δύο πηνίων είναι πάντοτε ανάλογη προς το γινόμενο N_1N_2 των αριθμών των σπειρών τους. Σημειώστε ότι η M εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία των δύο πηνίων, όχι από το ρεύμα.

Ακολουθεί ένα αριθμητικό παράδειγμα για να πάρετε μια ιδέα των μεγεθών. Υποθέστε ότι $l = 0{,}50$ m, $A = 10\ \text{cm}^2 = 1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$, $N_1 = 1000$ σπείρες και $N_2 = 10$ σπείρες. Τότε

$$M = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A}\cdot\text{m})(1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)(1000)(10)}{0{,}50\ \text{m}}$$
$$= 25 \times 10^{-6}\ \text{Wb/A} = 25 \times 10^{-6}\ \text{H} = 25\ \mu\text{H}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30.2 ΗΕΔ ΟΦΕΙΛΟΜΕΝΗ ΣΤΗΝ ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

Στο Παράδ. 30.1 υποθέστε ότι το ρεύμα i_2 στο εξωτερικό πηνίο δίνεται από τη σχέση $i_2 = (2{,}0 \times 10^6\ \text{A/s})t$. (Ρεύματα σε σύρματα μπορεί πράγματι να αυξηθούν τόσο γρήγορα για βραχείες χρονικές περιόδους). (a) Τη χρονική στιγμή $t = 3{,}0\ \mu$s, πόση είναι η μέση μαγνητική ροή μέσω κάθε σπείρας του σωληνοειδούς (πηνίο 1) που προκαλείται από το ρεύμα στο εξωτερικό πηνίο; (b) Πόση είναι η επαγόμενη ΗΕΔ στο σωληνοειδές;

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Στο Παράδ. 30.1 βρήκαμε την αμοιβαία επαγωγή συσχετίζοντας το ρεύμα στο σωληνοειδές με τη ροή που παράγεται στο εξωτερικό πηνίο· για να το πετύχουμε αυτό, χρησιμοποιήσαμε την Εξ. (30.5) στη μορφή $M = N_2\Phi_{B2}/i_1$. Τώρα μας δίνεται το ρεύμα i_2 στο εξωτερικό πηνίο και θέλουμε να βρούμε την προκύπτουσα ροή Φ_1 στο σωληνοειδές. Η αμοιβαία επαγωγή είναι η *ίδια* σε κάθε περίπτωση και από το Παράδ. 30.1 έχουμε $M = 25\ \mu$H. Χρησιμοποιούμε την Εξ. (30.5) στη μορφή $M = N_1\Phi_{B1}/i_2$ για να προσδιορίσουμε τη μέση ροή Φ_{B1} μέσα από κάθε σπείρα του σωληνοειδούς που προκαλείται από το ρεύμα i_2 στο εξωτερικό πηνίο. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τις Εξ. (30.4) για να προσδιορίσουμε την ΗΕΔ που επάγεται στο σωληνοειδές από τη χρονική μεταβολή του i_2.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Τη χρονική στιγμή $t = 3{,}0\ \mu\text{s} = 3{,}0 \times 10^{-6}$ s, το ρεύμα στο εξωτερικό πηνίο είναι $i_2 = (2{,}0 \times 10^6\ \text{A/s})\ (3{,}0 \times 10^{-6}\ \text{s}) = 6{,}0$ A. Λύνουμε την Εξ. (30.5) ως προς τη ροή Φ_{B1} μέσω κάθε σπείρας του πηνίου 1:

$$\Phi_{B1} = \frac{Mi_2}{N_1} = \frac{(25 \times 10^{-6}\ \text{H})(6{,}0\ \text{A})}{1000} = 1{,}5 \times 10^{-7}\ \text{Wb}$$

Τονίζουμε ότι αυτή είναι μια *μέση* τιμή· η ροή μπορεί να μεταβάλλεται σημαντικά μεταξύ του κέντρου και των άκρων του σωληνοειδούς.

(b) Μας δίνεται ότι $i_2 = (2{,}0 \times 10^6\ \text{A/s})t$, άρα $di_2/dt = 2{,}0 \times 10^6$ A/s· συνεπώς, από τις Εξ. (30.4) η επαγόμενη ΗΕΔ στο σωληνοειδές είναι

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} = -(25 \times 10^{-6}\ \text{H})(2{,}0 \times 10^6\ \text{A/s}) = -50\ \text{V}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Αυτή είναι μια σημαντική επαγόμενη ΗΕΔ ως απόκριση ενός πολύ γρήγορου ρυθμού μεταβολής του ρεύματος. Σε ένα πηνίο Tesla σε λειτουργία, υπάρχει συνήθως ένα υψηλής συχνότητας εναλλασσόμενο ρεύμα παρά ένα συνεχώς αυξανόμενο ρεύμα όπως σε αυτό το παράδειγμα· αμφότερα τα di_2/dt και $\mathcal{E}_1$ είναι επίσης εναλλασσόμενα, με πλάτη που μπορεί να είναι χιλιάδες φορές μεγαλύτερα απ' ό,τι σε αυτό το παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗΣ

Προσδιορίστε την αυτεπαγωγή ενός τοροειδούς σωληνοειδούς (δακτυλιοειδούς) πηνίου με εμβαδόν διατομής A και μέση ακτίνα r, που φέρει πολύ πυκνά περιτυλιγμένες N σπείρες σύρματος γύρω από έναν μη μαγνητικό πυρήνα (**Σχ. 30.8**). Υποθέστε ότι το B είναι ομογενές σε όλη την επιφάνεια της διατομής (δηλαδή θεωρήστε αμελητέα τη μεταβολή του B με την απόσταση από τον άξονα του τόρου).

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Η ζητούμενη μεταβλητή είναι η αυτεπαγωγή L του δακτυλιοειδούς πηνίου. Μπορούμε να βρούμε την L μέσω της Εξ. (30.6), η οποία απαιτεί τη γνώση της ροής Φ_B μέσω κάθε σπείρας και του ρεύματος i στο πηνίο. Χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα του Παραδ. 28.10 (Εδ. 28.7), στο οποίο βρήκαμε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό ενός δακτυλιοειδούς πηνίου.

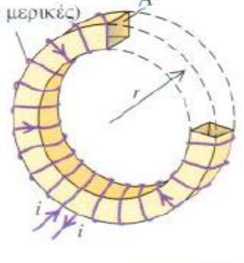
ΕΠΙΛΥΣΗ: Από την Εξ. (30.6), η αυτεπαγωγή είναι $L = N\Phi_B/i$. Από το Παράδ. 28.10, το μέτρο του πεδίου σε απόσταση r από τον άξονα του τόρου είναι $B = \mu_0 Ni/2\pi r$. Εάν υποθέσουμε ότι το πεδίο έχει αυτό το μέτρο σε ολόκληρη τη διατομή A, τότε

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 NiA}{2\pi r}$$

Η ροή Φ_B είναι ίδια μέσω κάθε σπείρας, και

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} \quad \text{(αυτεπαγωγή ενός δακτυλιοειδούς πηνίου)}$$

30.8 Προσδιορισμός της αυτεπαγωγής ενός πυκνά περιτυλιγμένου τοροειδούς σωληνοειδούς (δακτυλιοειδούς) πηνίου. Για σαφήνεια, μόνο μερικές σπείρες του περιτυλίγματος φαίνονται. Μέρος του τόρου έχει αποκοπεί για να φανεί η διατομή A και η ακτίνα r.



ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Υποθέστε ότι $N = 200$ σπείρες, $A = 5{,}0\ \text{cm}^2 = 5{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$ και $r = 0{,}10$ m· τότε

$$L = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A}\cdot\text{m})(200)^2(5{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}{2\pi(0{,}10\ \text{m})}$$
$$= 40 \times 10^{-6}\ \text{H} = 40\ \mu\text{H}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΗΕΔ ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗΣ

Εάν το ρεύμα στο δακτυλιοειδές πηνίο του Παραδ. 30.3 αυξάνεται ομοιόμορφα από μηδέν σε 6,0 A σε 3,0 μs, να βρείτε το μέτρο και τη διεύθυνση της ΗΕΔ αυτεπαγωγής.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Μας δίνονται η L, η αυτεπαγωγή, και ο di/dt, ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος στο σωληνοειδές. Υπολογίζουμε την ΗΕΔ αυτεπαγωγής $\mathcal{E}$ χρησιμοποιώντας την Εξ. (30.7) και την κατεύθυνσή της χρησιμοποιώντας τον νόμο του Lenz.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Έχουμε $di/dt = (6{,}0\ \text{A})/(3{,}0 \times 10^{-6}\ \text{s}) = 2{,}0 \times 10^6\ \text{A/s}$. Από την Εξ. (30.7), το μέτρο της επαγόμενης ΗΕΔ είναι

$$|\mathcal{E}| = L\left|\frac{di}{dt}\right| = (40 \times 10^{-6}\ \text{H})(2{,}0 \times 10^6\ \text{A/s}) = 80\ \text{V}$$

Το ρεύμα αυξάνεται, οπότε, σύμφωνα με τον νόμο του Lenz, η κατεύθυνση της ΗΕΔ είναι αντίθετη αυτής του ρεύματος. Αυτό αντιστοιχεί στην κατάσταση του Σχ. 30.6c· η κατεύθυνση της ΗΕΔ είναι από το b προς το a, όπως σε μια μπαταρία με το a ως τον πόλο + και το b ως τον πόλο −, με τάση να αντιστέκεται στην αύξηση του ρεύματος από το εξωτερικό κύκλωμα.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Αυτό το παράδειγμα δείχνει πως ακόμη και μια μικρή αυτεπαγωγή L μπορεί να δημιουργήσει μια σημαντική επαγόμενη ΗΕΔ εάν το ρεύμα μεταβάλλεται γρήγορα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30.5 ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΣΕ ΕΝΑ ΠΗΝΙΟ

Η βιομηχανία παραγωγής ηλεκτρικής ισχύος θα ήθελε να βρει αποδοτικούς τρόπους αποθήκευσης της ενέργειας που παράγεται κατά τις ώρες χαμηλής ζήτησης ώστε να ικανοποιεί τις απαιτήσεις των καταναλωτών στις ώρες υψηλής ζήτησης. Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ένα μεγάλο πηνίο; Πόση αυτεπαγωγή θα χρειαζόταν για την αποθήκευση ενέργειας 1,00 kW · h σε ένα πηνίο που διαρρέεται από ρεύμα 200 A;

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Μας δίνονται η απαιτούμενη ποσότητα αποθηκεύσιμης ενέργειας U και το ρεύμα $I = 200$ A. Χρησιμοποιούμε την Εξ. (30.9) για να βρούμε την αυτεπαγωγή L.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Έχουμε $I = 200$ A και $U = 1{,}00\ \text{kW}\cdot\text{h} = (1{,}00 \times 10^3\ \text{W})(3600\ \text{s}) = 3{,}60 \times 10^6$ J. Λύνοντας την Εξ. (30.9) ως προς L βρίσκουμε

$$L = \frac{2U}{I^2} = \frac{2(3{,}60 \times 10^6\ \text{J})}{(200\ \text{A})^2} = 180\ \text{H}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Η απαιτούμενη αυτεπαγωγή είναι περισσότερο από ένα εκατομμύριο φορές μεγαλύτερη από την αυτεπαγωγή του σωληνοειδούς του Παραδ. 30.3. Τα συνηθισμένα σύρματα που είναι ικανά να φέρουν 200 A θα πρέπει να είναι μεγάλης διαμέτρου ώστε να έχουν χαμηλή αντίσταση για να αποφευχθεί η απώλεια ενέργειας που οφείλεται στη θέρμανση I^2R. Ως αποτέλεσμα, ένα πηνίο 180 H με συνηθισμένο σύρμα θα ήταν πολύ μεγάλο (σε μέγεθος δωματίου). Ένα υπεραγώγιμο πηνίο θα ήταν πολύ μικρότερο, αφού η αντίσταση του υπεραγωγού είναι μηδενική και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν πολύ λεπτότερα σύρματα· ένα μειονέκτημα είναι ότι τα σύρματα θα πρέπει να διατηρούνται σε χαμηλή θερμοκρασία για να παραμένουν υπεραγώγιμα και απαιτείται ενέργεια για να συντηρεί αυτήν τη χαμηλή θερμοκρασία. Συνεπώς, αυτή η λύση είναι μη πρακτική με την υπάρχουσα τεχνολογία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30.6 ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ *R-L*

Μια ευαίσθητη ηλεκτρονική συσκευή με αντίσταση $R = 175\ \Omega$ πρόκειται να συνδεθεί με πηγή ΗΕΔ (αμελητέας εσωτερικής αντίστασης) μέσω ενός διακόπτη. Η συσκευή είναι σχεδιασμένη να λειτουργεί με ρεύμα 36 mA, όμως για να αποφευχθεί βλάβη στη συσκευή, το ρεύμα μπορεί να αυξάνεται όχι περισσότερο από 4,9 mA στα πρώτα 58 μs μετά το κλείσιμο του διακόπτη. Για τον λόγο αυτό, ένα πηνίο συνδέεται σε σειρά με τη συσκευή, όπως στο Σχ. 30.11· ο διακόπτης που μας αφορά είναι ο S_1. (a) Πόση είναι η απαιτούμενη ΗΕΔ $\mathcal{E}$ της πηγής; (b) Πόση είναι η απαιτούμενη αυτεπαγωγή L; (c) Ποια είναι η σταθερά χρόνου τ του κυκλώματος *R-L*;

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Αυτό το πρόβλημα αφορά το ρεύμα και την αύξηση του ρεύματος σε ένα κύκλωμα *R-L*, έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες αυτής της ενότητας. Στο Σχ. 30.12 παρουσιάζεται το ρεύμα i συναρτήσει του χρόνου t που πέρασε από το κλείσιμο του S_1. Το γράφημα δείχνει ότι το τελικό ρεύμα είναι $I = \mathcal{E}/R$· μας δίνεται ότι $R = 175\ \Omega$, συνεπώς η ΗΕΔ προσδιορίζεται από την απαίτηση ότι το τελικό ρεύμα πρέπει να είναι 36 mA. Η άλλη απαίτηση είναι ότι το ρεύμα δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από $i = 4{,}9$ mA για $t = 58$ μs· για να ικανοποιηθεί αυτό, χρησιμοποιούμε την Εξ. (30.14) για το ρεύμα συναρτήσει του χρόνου και τη λύνουμε ως προς την αυτεπαγωγή, η οποία είναι η μόνη άγνωστη ποσότητα. Η Εξ. (30.16) μας δίνει τότε τη σταθερά χρόνου.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Λύνουμε την $I = \mathcal{E}/R$ ως προς $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = IR = (0{,}036\ \text{A})(175\ \Omega) = 6{,}3\ \text{V}$$

(b) Για να βρούμε την απαιτούμενη αυτεπαγωγή, λύνουμε την Εξ. (30.14) ως προς L. Πρώτα πολλαπλασιάζουμε με $(-R/\mathcal{E})$ και μετά προσθέτουμε 1 και στα δύο μέλη:

$$1 - \frac{iR}{\mathcal{E}} = e^{-(R/L)t}$$

Στη συνέχεια, παίρνουμε τους φυσικούς λογαρίθμους των δύο μελών, λύνουμε ως προς L και αντικαθιστώντας:

$$L = \frac{-Rt}{\ln(1 - iR/\mathcal{E})}$$

$$= \frac{-(175\ \Omega)(58 \times 10^{-6}\ \text{s})}{\ln[1 - (4{,}9 \times 10^{-3}\ \text{A})(175\ \Omega)/(6{,}3\ \text{V})]} = 69\ \text{mH}$$

(c) Από την Εξ. (30.16),

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{69 \times 10^{-3}\ \text{H}}{175\ \Omega} = 3{,}9 \times 10^{-4}\ \text{s} = 390\ \mu\text{s}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Σημειώνουμε ότι τα 58 μs είναι πολύ λιγότερα από τη σταθερά χρόνου. Σε 58 μs το ρεύμα αυξάνεται από μηδέν σε 4,9 mA, ένα μικρό κλάσμα της τελικής του τιμής των 36 mA· μετά από 390 μs το ρεύμα ισούται με το $(1 - 1/e)$ της τελικής του τιμής, ή περίπου (0,63)(36 mA) = 23 mA.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30.7 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΕ ΕΝΑ ΚΥΚΛΩΜΑ *R-L*

Όταν το ρεύμα σε ένα κύκλωμα *R-L* αποσβένεται, τι κλάσμα της αρχικής ενέργειας της αποθηκευμένης στο πηνίο έχει καταναλωθεί μετά από 2,3 σταθερές χρόνου;

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το πρόβλημα αυτό αφορά την απόσβεση του ρεύματος σε ένα κύκλωμα *R-L* καθώς και στη σχέση ανάμεσα στο ρεύμα σε ένα πηνίο και την ποσότητα της αποθηκευμένης ενέργειας. Το ρεύμα i σε κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από την Εξ. (30.18)· η αποθηκευμένη ενέργεια που σχετίζεται με αυτό το ρεύμα δίνεται από την Εξ. (30.9), $U = \frac{1}{2}Li^2$.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Από την Εξ. (30.18), το ρεύμα i σε κάθε χρονική στιγμή t είναι

$$i = I_0 e^{-(R/L)t}$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση αυτή στη $U = \frac{1}{2}Li^2$ για να καταλήξουμε σε μια έκφραση για την αποθηκευμένη ενέργεια σε κάθε χρονική στιγμή:

$$U = \tfrac{1}{2}LI_0^2 e^{-2(R/L)t} = U_0 e^{-2(R/L)t}$$

όπου $U_0 = \frac{1}{2}LI_0^2$ είναι η ενέργεια την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$. Όταν $t = 2{,}3\tau = 2{,}3\ L/R$, έχουμε

$$U = U_0 e^{-2(2{,}3)} = U_0 e^{-4{,}6} = 0{,}010 U_0$$

Δηλαδή, μόνο το 0,010 ή το 1,0 % της ενέργειας που ήταν αρχικά αποθηκευμένη στο πηνίο παραμένει, οπότε το 99 % έχει καταναλωθεί στον αντιστάτη.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Για να αποκτήσετε μια αίσθηση του τι σημαίνει αυτό το αποτέλεσμα, θεωρήστε το κύκλωμα *R-L* που αναλύσαμε στο Παράδ. 30.6, για το οποίο η σταθερά χρόνου είναι $\tau = 390$ μs. Με $L = 69$ mH και $I_0 = 36\ \text{mA} = 0{,}036$ A, έχουμε $U_0 = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}(0{,}069\ \text{H})(0{,}036\ \text{A})^2 = 4{,}5 \times 10^{-5}$ J. Από αυτήν, το 99,0 % ή $4{,}4 \times 10^{-5}$ J καταναλώνεται σε 2,3(390 μs) = $9{,}0 \times 10^{-4}\ \text{s} = 0{,}90$ ms. Με άλλα λόγια, αυτό το κύκλωμα μπορεί σχεδόν πλήρως να απενεργοποιηθεί (ή να ενεργοποιηθεί) σε 0,90 ms, οπότε ο ελάχιστος χρόνος για έναν πλήρη κύκλο φόρτισης - αποφόρτισης είναι 1,8 ms. Σε πολλές εφαρμογές απαιτείται ένας ακόμη βραχύτερος κύκλος, όπως σε δίκτυα γρήγορης μεταλλαγής για τηλεπικοινωνίες. Σε τέτοιες περιπτώσεις απαιτείται μια μικρότερη σταθερά χρόνου $\tau = L/R$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30.8 ΕΝΑ ΚΥΚΛΩΜΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

Τροφοδοτικό 300 V dc χρησιμοποιείται για να φορτίσει έναν πυκνωτή 25 μF. Μετά την πλήρη φόρτισή του, ο πυκνωτής αποσυνδέεται από την πηγή τροφοδοσίας και συνδέεται με ένα πηνίο 10 mH. Η αντίσταση στο κύκλωμα είναι αμελητέα. (a) Βρείτε τη συχνότητα και την περίοδο ταλάντωσης του κυκλώματος. (b) Βρείτε το φορτίο του πυκνωτή και το ρεύμα στο κύκλωμα 1,2 ms μετά τη σύνδεση του πυκνωτή με το πηνίο.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Οι ζητούμενες μεταβλητές είναι η συχνότητα ταλάντωσης f και η περίοδος T, καθώς και το φορτίο q και το ρεύμα i σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t. Μας δίνεται η χωρητικότητα C και η αυτεπαγωγή L, από τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε τη συχνότητα και την περίοδο χρησιμοποιώντας την Εξ. (30.22). Υπολογίζουμε επίσης το φορτίο και το ρεύμα από τις Εξ. (30.21) και (30.23). Αρχικά ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος και το ρεύμα είναι μηδέν, όπως στο Σχ. 30.14a, οπότε η αρχική φάση είναι $\phi = 0$ [δείτε τη συζήτηση που ακολουθεί την Εξ. (30.23)].

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Η φυσική γωνιακή συχνότητα είναι

συνεχίζεται

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(10 \times 10^{-3}\ \text{H})(25 \times 10^{-6}\ \text{F})}}$$
$$= 2{,}0 \times 10^3\ \text{rad/s}$$

Η συχνότητα f και η περίοδος T είναι τότε

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2{,}0 \times 10^3\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad/cycle}} = 320\ \text{Hz}$$
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{320\ \text{Hz}}$$
$$= 3{,}1 \times 10^{-3}\ \text{s} = 3{,}1\ \text{ms}$$

(b) Αφού η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = 3{,}1$ ms, το $t = 1{,}2$ ms ισούται με 0,38 T· αυτό αντιστοιχεί σε μια ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ εκείνων των Σχ. 30.14b ($t = T/4$) και 30.14c ($t = T/2$). Συγκρίνοντας εκείνα τα σχήματα με το Σχ. 30.15, αναμένουμε το φορτίο q του πυκνωτή να είναι αρνητικό (δηλαδή θα υπάρχει αρνητικό φορτίο στον αριστερό οπλισμό του πυκνωτή) και το ρεύμα i να είναι επίσης αρνητικό (δηλαδή το ρεύμα θα οδεύει αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού).

Για να βρούμε την τιμή του q, χρησιμοποιούμε την Εξ. (30.21), $q = Q\cos(\omega t + \phi)$. Το φορτίο είναι μέγιστο για $t = 0$, οπότε $\phi = 0$ και $Q = C\mathcal{E} = (25\ 10^{-6}\ \text{F}) \times (300\ \text{V}) = 7{,}5 \times 10^{-3}$ C. Συνεπώς η Εξ. (30.21) γίνεται

$$q = (7{,}5 \times 10^{-3}\ \text{C})\cos\omega t$$

Τη χρονική στιγμή $t = 1{,}2 \times 10^{-3}$ s,

$$\omega t = (2{,}0 \times 10^3\ \text{rad/s})(1{,}2 \times 10^{-3}\ \text{s}) = 2{,}4\ \text{rad}$$
$$q = (7{,}5 \times 10^{-3}\ \text{C})\cos(2{,}4\ \text{rad}) = -5{,}5 \times 10^{-3}\ \text{C}$$

Από την Εξ. (30.23), το ρεύμα i σε κάθε χρονική στιγμή είναι $i = -\omega Q \sin \omega t$. Για $t = 1{,}2 \times 10^{-3}$ s,

$$i = -(2{,}0 \times 10^3\ \text{rad/s})(7{,}5 \times 10^{-3}\ \text{C})\sin(2{,}4\ \text{rad}) = -10\ \text{A}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Τα πρόσημα των q και i είναι αμφότερα αρνητικά, όπως είχαμε προβλέψει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30.9 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΕ ΕΝΑ ΚΥΚΛΩΜΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

Για το κύκλωμα L-C του Παραδ. 30.8. Βρείτε τη μαγνητική και την ηλεκτρική ενέργεια (a) για $t = 0$, (b) για $t = 1{,}2$ ms.

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Θα πρέπει να υπολογίσουμε τη μαγνητική ενέργεια U_B (αποθηκευμένη στο πηνίο) και την ηλεκτρική ενέργεια U_E (αποθηκευμένη στον πυκνωτή) σε δύο χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του κυκλώματος L-C. Από το Παράδ. 30.8 γνωρίζουμε τις τιμές του φορτίου q του πυκνωτή και του ρεύματος i του κυκλώματος και για τις δύο αυτές χρονικές στιγμές. Τις χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε τις $U_B = \frac{1}{2}Li^2$ και $U_E = q^2/2C$.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (a) Για $t = 0$ δεν υπάρχει ρεύμα και $q = Q$. Συνεπώς, δεν υπάρχει καθόλου μαγνητική ενέργεια και όλη η ενέργεια στο κύκλωμα είναι υπό τη μορφή ηλεκτρικής ενέργειας στον πυκνωτή:

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2 = 0 \qquad U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(7{,}5 \times 10^{-3}\ \text{C})^2}{2(25 \times 10^{-6}\ \text{F})} = 1{,}1\ \text{J}$$

(b) Από το Παράδ. 30.8, για $t = 1{,}2$ ms έχουμε $i = -10$ A και $q = -5{,}5 \times 10^{-3}$ C. Οπότε

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2 = \tfrac{1}{2}(10 \times 10^{-3}\ \text{H})(-10\ \text{A})^2 = 0{,}5\ \text{J}$$
$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{(-5{,}5 \times 10^{-3}\ \text{C})^2}{2(25 \times 10^{-6}\ \text{F})} = 0{,}6\ \text{J}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Η μαγνητική και η ηλεκτρική ενέργεια είναι ίδιες για $t = 3T/8 = 0{,}375T$, ακριβώς στο μέσο μεταξύ των καταστάσεων στα Σχ. 30.14b και Σχ. 30.14c. Είδαμε στο Παράδ. 30.8 ότι ο χρόνος που εξετάσαμε στο μέρος (b), $t = 1{,}2$ ms, ισούται με $0{,}38T$· αυτός είναι λίγο μεγαλύτερος από $0{,}375T$, άρα η U_B είναι ελαφρώς μικρότερη από τη U_E. Σε *όλους* τους χρόνους η *ολική* ενέργεια $E = U_B + U_E$ έχει την ίδια τιμή, 1,1 J. Ένα κύκλωμα L-C χωρίς αντίσταση είναι ένα διατηρητικό σύστημα· δεν καταναλώνεται καθόλου ενέργεια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 30.10 ΕΝΑ ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΑ ΑΠΟΣΒΕΝΟΜΕΝΟ ΚΥΚΛΩΜΑ *L-R-C* ΣΕ ΣΕΙΡΑ

Πόση αντίσταση R (συναρτήσει των L και C) απαιτείται για να δώσει σε ένα κύκλωμα L-R-C συχνότητα που είναι το ένα δεύτερο της συχνότητας χωρίς απόσβεση;

ΛΥΣΗ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ και ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ: Το πρόβλημα αυτό αφορά ένα υποκρίσιμα αποσβενόμενο κύκλωμα L-R-C σε σειρά (Σχ. 30.16a). Θέλουμε απλώς αρκετή αντίσταση για να μειώσουμε τη συχνότητα ταλάντωσης στο μισό της τιμής χωρίς απόσβεση. Η Εξ. (30.29) δίνει τη γωνιακή συχνότητα ω' ενός υποκρίσιμα αποσβενόμενου κυκλώματος L-R-C σε σειρά· η Εξ. (30.22) δίνει τη γωνιακή συχνότητα ω ενός κυκλώματος L-C χωρίς απόσβεση. Χρησιμοποιούμε αυτές τις δύο εξισώσεις για να λύσουμε ως προς R.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Από τις Εξ. (30.29) και (30.22), η απαίτηση $\omega' = \omega/2$ δίνει

$$\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

συνεχίζεται

Όταν υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη και λύσουμε ως προς R, βρίσκουμε:

$$R = \sqrt{\frac{3L}{C}}$$

Για παράδειγμα, προσθέτοντας 35 Ω στο κύκλωμα του Παραδ. 30.8 ($L = 10$ mH, $C = 25$ μF), μειώνουμε τη συχνότητα από 320 Hz σε 160 Hz.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: Το κύκλωμα γίνεται κρίσιμα αποσβενόμενο χωρίς ταλάντωση όταν $R = \sqrt{4L/C}$. Το αποτέλεσμά μας για την R είναι μικρότερο από αυτό, όπως θα έπρεπε· θέλουμε το κύκλωμα να είναι *υποκρίσιμα* αποσβενόμενο.