ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER

Υπό Μ. Χανιά

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Περιοδική συνάρτηση με περίοδο *2l* όταν πληρεί την σχέση

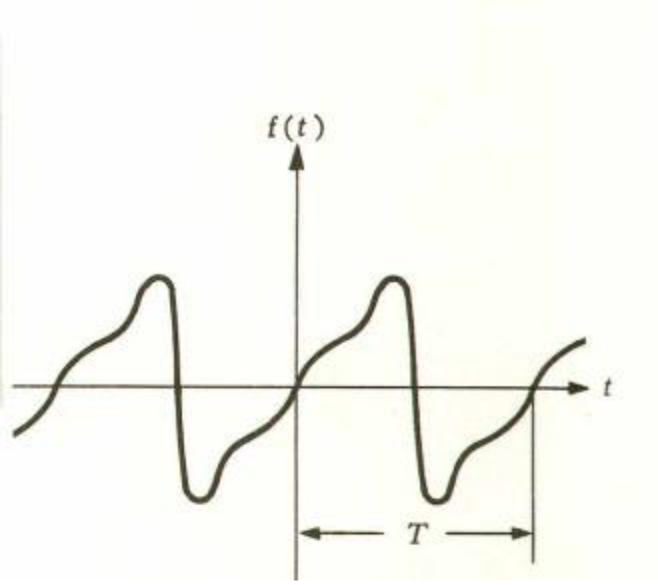
$$f(x + 2l) = f(x) \tag{1.1}$$

Ισχύει

$f(x + 2nl) = f(x + 2nl + 2l - 2l) = f(x + (2n - 2)l + 2l) = f(x + (2n - 2)l = f(x + 2l) = f(x)$ (1.2)

Για $n = \pm1, \pm2, \pm3 \dots ..$

Επομένως ότι εκτός της περιόδου $2l$ έχει και την περίοδο $2nl$



Για $x = t, 2l = T$ (1.3)

Περιττή αρμονική σε διάστημα *2l*

$$f(x+l) = -f(x) \tag{1.4}$$

Περιττή συνάρτηση

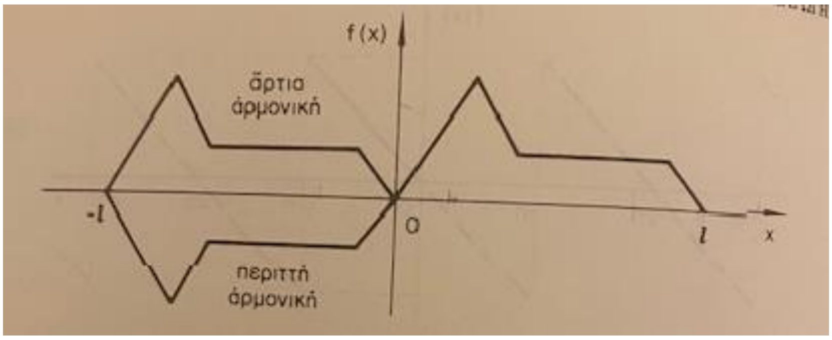
$$f(-x) = -f(x) \tag{1.5}$$

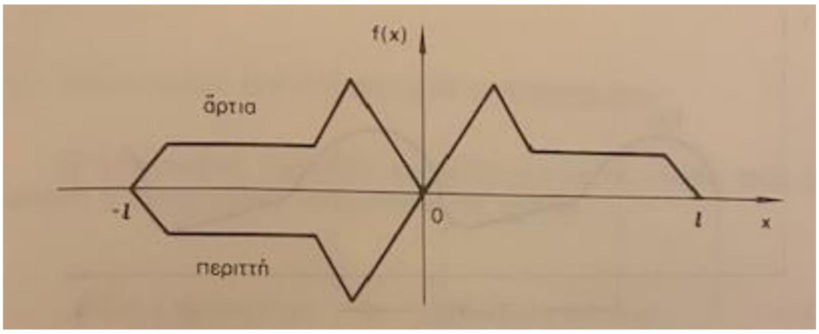
Άρτια αρμονική σε διάστημα *2l*

$$f(x+l) = f(x) \tag{1.6}$$

Άρτια συνάρτηση

$$f(-x) = f(x) \tag{1.7}$$





Οι αρμονικές συναρτήσεις είναι περιοδικές με περίοδο *2l*

Για τις περιττές αρμονικές συναρτήσεις ισχύει η σχέση

$$\int_{-l}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{l} f(x)dx \tag{1.8}$$

Και

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0 \tag{1.9}$$

Για τις άρτιες αρμονικές συναρτήσεις ισχύει η σχέση

$$\int_{0}^{l} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} f(x)dx \tag{1.10}$$

Οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$ περιοδική ή μη μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα μιας άρτιας (even) συνιστώσας $f_e(x)$ και μιας περιττής $f_o(x)$ της μορφής

$$f_e(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \tag{1.11}$$

$$f_o(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \tag{1.12}$$

2. ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

2.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ

Συνθήκες του Dirichlet

1. Η $f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα
2. Η $f(x)$ και η $f'(x)$ είναι συνεχείς ή κατά τμήματα συνεχείς στο διάστημα αυτό. Στο σημείο ασυνέχειας

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] \tag{2.1}$$

3. $\int_{0}^{2l} |(x)| dx = \pi\varepsilon\pi\varepsilon\rho\alpha\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu o$
4. $f(x + 2nl) = f(x)$

Τότε

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cos\frac{n\pi x}{l} + B_n sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{2.2}$$

Σειρά Fourier , A_n, B_n συντελεστές Fourier

Για $l = \pi$, δηλαδή για διάστημα (-π,π) ή (0,2π)

$$f(x) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n cosnx + B_n sinnx) \quad (2.3)$$

Για $l = \frac{T}{2}$

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega\tau)) \quad (2.4)$$

Οι συντελεστές Fourier A_n, B_n παριστάνουν τα πλάτη των αρμονικών συνιστωσών.

Υπολογισμός συντελεστών Fourier

Για $l = \pi$, δηλαδή για διάστημα (-π,π) ή (0,2π)

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx \quad (2.7)$$

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad (2.8)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx \quad (2.9)$$

Για δονήσεις

Για $x = t$, δηλαδή για διάστημα $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ ή (0,T)

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)cosn\omega tdt \quad (2.10)$$

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \quad (2.11)$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{2}{T}} f(x)sinn\omega tdt \quad (2.12)$$

Για κύμα με κυματάριθμο $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$A_n = \frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} f(x)cosnkxdx \quad (2.13)$$

$$A_0 = \frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} f(x)dx \quad (2.14)$$

$$B_n = \frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{2}{\lambda}} f(x)sinnxkdx \quad (2.15)$$

- <u>Υπολογισμός συντελεστών Fourier αρτίων και περιττών περιοδικών συναρτήσεων</u>

Για $l = \pi$, δηλαδή για διάστημα (-π,π) ή (0,2π)

<u>Άρτιες συναρτήσεις $f(-x) = f(x)$</u>

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cosnx \quad (2.16)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cosnxdx \quad (2.17)$$

$$B_n = 0 \quad (2.18)$$

<u>Περιττές συναρτήσεις $f(-x) = -f(x)$</u>

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sinnx \quad (2.19)$$

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sinnxdx \quad (2.20)$$

$$A_n = 0 \quad (2.21)$$

- <u>Υπολογισμός συντελεστών Fourier αρμονικών συναρτήσεων</u>

<u>Περιττές αρμονικές συναρτήσεις</u>

$A_n = 0$,για n=2k (2.22)

$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cosnxdx$, για n=2k+1 (2.23)

$B_n = 0$,για n=2k (2.24)

$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sinnxdx$, για n=2k+1 (2.25)

<u>Αρτιες αρμονικές συναρτήσεις</u>

$A_n = 0$,για n=2k+1 (2.26)

$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cosnxdx$, για n=2κ (2.27)

$B_n = 0$,για n=2k+1 (2.28)

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) sinnxdx \text{ , για n=2k} \tag{2.29}$$

$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cos\frac{\pi n x}{l} + B_n sin\frac{\pi n x}{l}\right)$ (2.30)

Επειδή

$A_n cos\frac{\pi n x}{l} + B_n sin\frac{\pi n x}{l} = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}\left[\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}} cos\frac{\pi n x}{l} + \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}} sin\frac{\pi n x}{l}\right] =$
$C_n cos\left(\frac{\pi n x}{l} - \varphi_n\right)$ (2.31)

Με

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \tag{2.32}$$

$$tan\varphi_n = \frac{B_n}{A_n} \tag{2.33}$$

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n cos\left(\frac{n\pi x}{l} - \varphi_n\right) \tag{2.34}$$

Γραμμικό φάσμα περιοδικής συνάρτησης

σε συνάρτηση του n ή της συχνότητας nω

2.2 ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ

Η (2.34) για l=π γίνεται

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n cos(nx - \varphi_n) \tag{2.35}$$

Επειδή είναι

$$\cos(nx - \varphi_n) = \frac{1}{2}\left[e^{i(nx-\varphi_n)} + e^{-i(nx-\varphi_n)}\right] \tag{2.36}$$

Προκύπτει με αντικατάσταση στην (2.35)

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2} C_n \left[e^{i(nx-\varphi_n)} + e^{-i(nx-\varphi_n)}\right] \tag{2.37}$$

Μετά από διερεύνηση της (2.37) προκύπτει ότι

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} \tag{2.38}$$

Όπου

$$\alpha_n = \frac{1}{2} C_n e^{-i\varphi_n} \quad (2.39)$$

Για διάστημα (*-l,l*)

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} \quad (2.40)$$

Για $l = \frac{T}{2}$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t} \quad (2.41)$$

Και

$$l = \frac{\lambda}{2}$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\frac{2\pi n x}{\lambda}} \quad (2.42)$$

$$a_n = \frac{1}{2}(A_n - iB_n) \quad (2.43)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2}(A_n + iB_n) \quad (2.44)$$

$$a_{-n} = a_n^* \quad (2.45)$$

Και

$$A_n = a_n + a_{-n} \quad (2.46)$$

$$B_n = i(a_n - a_{-n}) \quad (2.47)$$

$$C_n = |a_n| + |a_{-n}| \quad (2.48)$$

<u>Άρτιες συναρτήσεις $f(-x) = f(x)$</u>

$B_n = 0$ και οι συντελεστές a_n γίνονται πραγματικοί

<u>Περιττές συναρτήσεις $f(-x) = -f(x)$</u>

$A_n = 0$ και οι συντελεστές a_n γίνονται φανταστικοί

Για

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} \tag{2.49}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{2.50}$$

Για διάστημα (-*l*,*l*)

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} \tag{2.51}$$

$$a_n = \frac{1}{2l}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx \tag{2.52}$$

Για $l = \frac{T}{2}$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t} \tag{2.53}$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}dt \tag{2.54}$$

3. ΧΡΗΣΙΜΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

3.1 Η μέση τιμή $\bar{y}$ του γινομένου δύο περιοδικών συναρτήσεων $f_1(x)$ και $f_2(x)$ στο διάστημα (-π,π) ισούται με

$$\bar{y} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (a_1)_n (a_2)_{-n} \qquad (3.1)$$

3.2 Θεώρημα του Parseval : Το μέσο τετράγωνο μιάς περιοδικής συναρτήσεως f(x) σε διάστημα μιάς περιόδου (Ισχύς) δίνεται από την σχέση

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 dx = \frac{1}{4}A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(A_n^2 + B_n^2) \qquad (3.2)$$

3.3 Η τετραγωνική ρίζα του μέσου τετραγώνου (ενεργός τιμή) της f(x) δίνεται από την

$$F_{rms} = \sqrt{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 dx\right]} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}C_0\right)^2 + \frac{1}{2}C_1^2 + \frac{1}{2}C_2^2 + ..} \quad (3.3)$$

4. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ FOURIER

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega\tau)) \qquad (2.4)$$

Στην γραφική παράσταση των A_n , B_n συναρτήσει της συχνότητας (nω) δίνει γραμμικό φάσμα με ισαπόσταση των γραμμών ίση με $\omega = \frac{2\pi}{T}$ αντί για 1. Όταν $T \to \infty$ δηλαδή για μη περιοδική συνάρτηση η απόσταση των γραμμών τείνει προς το μηδέν

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) cos\omega(x-\xi) d\xi \qquad (4.1)$$

$\underline{f(x) \text{ άρτια }, f(-x) = f(x)}$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos{(\omega x)} d\omega \int_0^\infty f(\xi) cos(\omega\xi) d\xi \qquad (4.2)$$

$\underline{f(x) \text{ περιττή }, f(-x) = -f(x)}$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty sin\,(\omega x) d\omega \int_0^\infty f(\xi) sin(\omega\xi) d\xi \qquad (4.3)$$

5. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ FOURIER

Είναι ειδική περίπτωση του γενικού ολοκληρωτικού μετασχηματισμού μιάς συνάρτησης $f(x)$

$$F(\omega) = \int_a^\beta f(x) K(\omega, x) dx \qquad (5.1)$$

Η συνάρτηση $K(\omega, x)$ ονομάζεται πυρήνας του μετασχηματισμού

Για τον μετασχηματισμό Fourier

$$K(\omega, x) = \cos{(\omega x)} \qquad (5.2)$$

Ή

$$K(\omega, x) = sin\,(\omega x) \qquad (5.3)$$

Ή

$$K(\omega, x) = e^{-i\omega x} \qquad (5.4)$$

$$\alpha = 0 \text{ ή } -\infty$$

$$\beta = \infty$$

Συνήθως μετατρέπει μια μαθηματική συνάρτηση του χρόνου, f(t), σε μια νέα συνάρτηση, που μερικές φορές συμβολίζεται με F, της οποίας η μονάδα μέτρησής τους είναι η συχνότητα με την οποία εμφανίζουν μονάδες κύκλου / δευτερόλεπτο (Hertz) ή ακτίνια ανά δευτερόλεπτο. Η νέα συνάρτηση είναι τότε γνωστή ως μετασχηματισμός Fourier ή και ως φάσμα συχνοτήτων της συνάρτησης f.

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι επίσης μια αντιστρέψιμη συνάρτηση. Έτσι, με δεδομένη την συνάρτηση F μπορεί να προσδιοριστεί η αρχική συνάρτηση, f. Οι f και F είναι, επίσης, αντίστοιχα, γνωστές ως πεδίο του χρόνου και της συχνότητας, αναπαραστάσεις του ίδιου «γεγονότος».

Τις περισσότερες φορές ίσως, η f είναι μια πραγματική συνάρτηση, και η F είναι μια μιγαδική συνάρτηση, όπου ένας μιγαδικός αριθμός περιγράφει τόσο το πλάτος όσο και τη φάση της αντίστοιχης συνιστώσας συχνότητας. Σε γενικές γραμμές, η f είναι επίσης σύνθετη, όπως η αναλυτική αναπαράσταση μιας πραγματικής συνάρτησης. Ο όρος "μετασχηματισμός Fourier" αναφέρεται τόσο στην συνάρτηση μετασχηματισμού όσο και στην μιγαδική συνάρτηση που παράγει.

5.1 Τριγωνομετρικός μετασχηματισμός Fourier

Συνημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)\,d\xi \qquad (5.5)$$

Ημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,sin(\omega\xi)\,d\xi \qquad (5.6)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}[A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)]d\omega \qquad (5.7)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} C(\omega)cos[\omega x - \varphi(\omega)]d\omega \qquad (5.8)$$

$$C(\omega) = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2} \qquad (5.9)$$

$$tan\varphi(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \qquad (5.10)$$

Εάν $0 \leq x \leq \infty$

Για άρτια συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} A(\omega)\cos(\omega x)d\omega \qquad (5.11)$$

Για περιττή συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} B(\omega)\,sin(\omega x)d\omega \qquad (5.12)$$

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $A(\omega)$ ή $f(x)$ και $B(\omega)$ ονομάζονται **ζεύγη Fourier**

Η συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier** των συναρτήσεων $A(\omega)$ ή $B(\omega)$

5.2 Εκθετικός μετασχηματισμός Fourier

Ορίζεται η συνάρτηση

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\, dx \qquad (5.13)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x} d\omega \qquad (5.14)$$

Η $f(x)$ αποτελεί τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $F(\omega)$

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $F(\omega)$ αποτελούν **ζεύγη Fourier**

Γενικά αν δύο συναρτήσεις $g(x)$ και $G(u)$ αποτελούν ζεύγος Fourier το γινόμενο των μεταβλητών xu είναι αριθμός χωρίς διαστάσεις

Π.χ ωt

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos \omega x - isin\omega x]dx =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)cos\omega xdx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)sin\omega xdx \rightarrow F(\omega) = A(\omega) - iB(\omega) \qquad (5.15)$$

Ισχύει

$$A(-\omega) = A(\omega) \text{ , άρτια} \qquad (5.16)$$

$$B(-\omega) = -B(\omega) \text{ , περιττή} \qquad (5.17)$$

$$F(-\omega) = A(-\omega) - iB(-\omega) = A(\omega) + iB(\omega) = F^*(\omega) \qquad (5.18)$$

<u>Εάν $f(x)$ άρτια</u> τότε

$$B(\omega) = 0 \qquad (5.19)$$

$$F(\omega) = A(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(x)cos\omega xdx \qquad (5.20)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(\omega)cos\omega xd\omega \qquad (5.21)$$

<u>Εάν $f(x)$ περιττή</u> τότε

$$A(\omega) = 0 \qquad (5.22)$$

$$F(\omega) = -iB(\omega) = -i2\int_0^{\infty} f(x)sin\omega xdx \qquad (5.23)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} B(\omega)sin\omega xd\omega \qquad (5.24)$$

5.3 Άλλες μορφές εκθετικού μετασχηματισμού Fourier

Εάν ορισθεί ως μ.F της $f(x)$ η

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}\, d\xi \tag{5.25}$$

Τότε

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega x}\, d\omega \tag{5.26}$$

Συμμετρικά ζεύγη τα οποία έχουν πυρήνες μετασχηματισμού με αντίθετους εκθέτες

5.4 Πεπερασμένοι μετασχηματισμοί Fourier

Ας θεωρήσουμε την περιοδική συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται στο (-π,π). Το ανάπτυγμα σε τριγωνομετρική σειρά Fourier είναι

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n cosnx + B_n sinnx] \tag{5.27}$$

Με

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx \tag{5.28}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx \tag{5.29}$$

Ο πεπερασμένος συνημιτονοειδής και ημιτονοειδής μ.F της $f(x)$ είναι συναρτήσεις του n που ορίζονται από τις

$$A(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx \tag{5.30}$$

$$B(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx \tag{5.31}$$

Και η (5.27) γράφεται

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}A(0) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[A(n)cosnx + B(n)sinnx] \tag{5.32}$$

Εάν $f(x)$ είναι άρτια

$$f(x) = \frac{1}{\pi}A(0) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} A(n)cosnx \tag{5.33}$$

Με

$$A(n) = \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx \tag{5.34}$$

Εάν $f(x)$ είναι περιττή

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} B(n) sinnx \tag{5.35}$$

Με

$$B(n) = \int_0^{\pi} f(x)\, sin(nx)\, dx \tag{5.36}$$

Εάν η μεταβλητή x ορίζεται στο διάστημα 0<x<l τότε έχουμε τις περιπτώσεις

Εάν $f(x)$ είναι άρτια

$$f(x) = \frac{1}{l}A(0) + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} A(n)\frac{n\pi x}{l} \tag{5.37}$$

$$A(n) = \int_0^{l} f(x)\cos\frac{npx}{l}\, dx \tag{5.38}$$

Εάν $f(x)$ είναι περιττή

$$f(x) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} B(n) sin\frac{n\pi x}{l} \tag{5.39}$$

$$B(n) = \int_0^{l} f(x) sin\frac{n\pi x}{l}\, dx \tag{5.40}$$

6. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ FOURIER

6.1 Θεώρημα επαλληλίας ή γραμμικότητας

Εάν $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$, και α_1 , α_2 αυθαίρετες σταθερές, τότε

$$a_1\, f_1(t) + a_2\, f_2(t) \leftrightarrow a_1\, F(\omega) + a_2\, F_2(\omega) \tag{6.1}$$

Το φάσμα του αθροίσματος ενός πεπερασμένου πλήθους σημάτων ισούται με το άθροισμα των επιμέρους φασμάτων.

6.2 Θεώρημα κλίμακας

Εάν $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ και α μία πραγματική σταθερά τότε

$$f(t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \tag{6.2}$$

Η συμπίεση στην περιοχή του χρόνου ισοδυναμεί με διαστολή στην περιοχή των συχνοτήτων και αντιστρόφως.

6.2 Θεώρημα μετατοπίσεως χρόνου

Εάν $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ και t_0 μία σταθερά τότε

$$f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-i\omega t_0} F(\omega) \tag{6.3}$$

$$F[f(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} F(\omega) \tag{6.4}$$

Εάν η $f(t)$ παριστάνει σήμα η $f(t - t_0)$ παριστάνει το ίδιο σήμα με χρονική καθυστέρηση κατά χρόνο t_0 . Το φάσμα συχνοτήτων του καθυστερημένου σήματος δίνεται από την σχέση…

6.3 Θεώρημα μετατοπίσεως συχνότητας

Εάν $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ και ω_0 μία σταθερά τότε

$$e^{i\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_0) \tag{6.5}$$

Η $f(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση ενώ η $F(\omega - \omega_0)$ είναι γενικά μιγαδική.

6.4 Θεώρημα γινομένου

Εάν $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$ τότε είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)\, F_2(\omega) dt \tag{6.6}$$

6.5 Θεώρημα Parserval

Εάν $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ τότε ισχύει γενικά η σχέση

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega \qquad (6.7)$$

6.5 Φάσμα ενέργειας

Το ολοκλήρωμα

$$E=\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega \qquad (6.8)$$

Ονομάζεται ποσότητα ενέργειας μια μη περιοδικής συνάρτησης $f(t)$