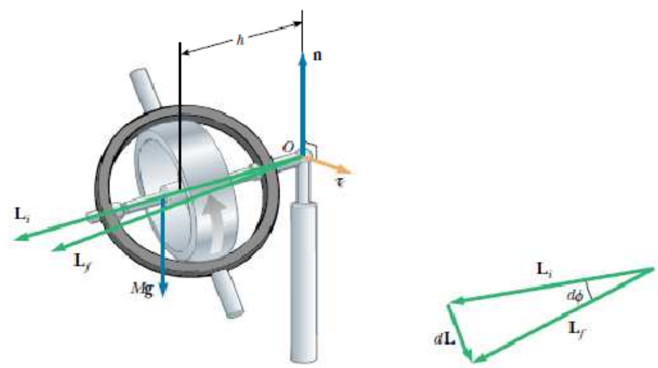
ΦΥΣΙΚΗ Ι

Υπό Δρ Μ.Χανιά



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

1.1 Περιοδική κίνηση- Απλός Αρμονικός ταλαντωτής

Περιοδική ή Αρμονική κίνηση ή Ταλάντωση ή Δόνηση είναι η κίνηση εκείνη η οποία επαναλαμβάνεται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Η κίνηση αυτή είναι μία ειδική περίπτωση κίνησης η οποία συμβαίνει όταν η δύναμη που δρα σε ένα σώμα είναι ανάλογη της μετατόπισης του σώματος από κάποια θέση ισορροπίας και κατευθύνεται πάντα προς την θέση ισορροπίας . Η κίνηση είναι επαναλαμβανομένη πίσω – μπρός ως προς την θέση αυτή.

Όταν ένα σώμα που εκτελεί Αρμονική κίνηση διέρχεται από το σημείο ισορροπίας, τότε η δυναμική του ενέργεια είναι ελάχιστη. Η σχέση που συνδέει την δύναμη F(x) με την Δυναμική ενέργεια U(x) δίνεται από τη σχέση

$$F = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad (1.1)$$

Στην περίπτωση που η δυναμική ενέργεια ανάλογη του x^2 όπως στην σχέση (1.2)

$U(x) - \frac{1}{2}kx^2$ (1.2),

τότε η αλγεβρική τιμή της δύναμης μετά την παραγώγιση της 1.1 δίνεται από τη σχέση

F=-kx (1.3).

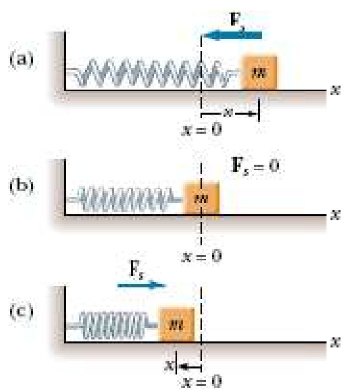
Διανυσματικά, εάν $\vec{x} = x\hat{\imath}$ τότε

$\vec{F}$ =-kx$\hat{\imath}$ (1.3.1),

ενώ εάν x=-x$\hat{\imath}$

τότε $\vec{F}$=-k(-x)$\hat{\imath}$=kx$\hat{\imath}$ (1.3.2), δηλαδή η δύναμη είναι πάντα αντίθετη της μετατόπισης.

Ένα τέτοιο ταλαντούμενο σώμα του οποίου η δυναμική ενέργεια δίνεται από τη σχέση 1.2 λέγεται **απλός αρμονικός ταλαντωτής** και η κίνηση του **απλή αρμονική ταλάντωση**. Ένα παράδειγμα απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι ένα σώμα μάζας m που προσδένεται σε ένα ιδανικό αβαρές ελατήριο που είναι ελεύθερο να κινηθεί σε μία λεία επιφάνεια (Σχήμα 1)



Σχήμα 1

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε,

$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow -kx\hat{\imath} = m\vec{a} \rightarrow kx\hat{\imath} = -ma\hat{\imath}$,δηλαδή με τις αλγεβρικές τιμές,

$$F = -kx \dashrightarrow ma = -kx \dashrightarrow m\frac{dx^2}{dt^2} = -kx \dashrightarrow m\frac{dx^2}{dt^2} + kx = 0 \quad (1.4).$$

Η εξίσωση αυτή που περιέχει παραγώγους ονομάζεται **διαφορική εξίσωση (ΔΕ)**. Η λύση της δίνει την μετατόπιση της μάζας σαν συνάρτηση του χρόνου.

Στην περίπτωση του ελατηρίου, η εξίσωση (1.3) αποτελεί τον **νόμο του Hooke** και η σταθερά k αποτελεί την σταθερά του ελατηρίου. Η ΔΕ (1.4) ισχύει για οποιονδήποτε απλό αρμονικό ταλαντωτή όπου η σταθερά k μπορεί να σχετίζεται με άλλα χαρακτηριστικά του συστήματος.

Αποδεικνύεται ότι η λύση της (1.4) είναι η x=Acos(ωt+φ) (1.5)

όπου A είναι το πλάτος που είναι η μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας,

x_{max}=A (1.6)

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ είναι η κυκλική συχνότητα ή γωνιακή ταχύτητα σε μονάδες rad s^{-1}.

T είναι η περίοδος και $f = \frac{1}{T}$ (1.7) η συχνότητα σε Hz. Η συχνότητα μιας απλής αρμονικής κίνησης είναι ανεξάρτητη του πλάτους της κίνησης. Επίσης φ είναι η **αρχική φάση** και η παράσταση (ωt+φ) η **φάση.**

Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητα της κίνησης δίνεται από τη σχέση

$v - \frac{dx}{dt} - -\omega\Lambda\sin\,(\omega t + \varphi)$ (1.8)

Με μέγιστη τιμή υ_{max}=ωA (1.9)

Και η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης

$\text{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv^2}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$ (1.10)

Με μέγιστη τιμή την

a_{max}=ω^2A (1.11)

Εάν γνωρίζουμε την τιμή x(t) και την ταχύτητα v(t) σε μία χρονική στιγμή π.χ.

Για t=0 x=A και v=-Aω βρίσκουμε την ω.

Από τις σχέσεις (1.4) καί (1.10) προκύπτει

Ότι

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (1.12), οπότε

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (1.13),

και

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ (1.14)

Η συχνότητα f που δίνεται από την σχέση (1.14) και η είναι η συχνότητα που ταλαντώνεται το σώμα όταν αφεθεί ελεύθερο λέγεται **φυσική συχνότητα** ή **ιδιοσυχνότητα** του σώματος.

Η δυναμική ενέργεια σε οποιαδήποτε στιγμή

$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega\tau + \varphi)$ *(1.15)*

Η κινητική ενέργεια σε οποιαδήποτε τη στιγμή

$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\kappa A^2sin^2(\omega t + \varphi)$ (1.16)

Οι μέγιστες τιμές τους είναι

$U_{max} = \frac{1}{2}kA^2$ (1.17)

$K_{max} = \frac{1}{2}kA^2$ (1.18)

Η ολική μηχανική ενέργεια είναι

$E = U + K = \frac{1}{2}kA^2$ (1.19)

Από τη (1.16) προκύπτει

$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$ (1.20)

1.2 Φθίνουσα αρμονική κίνηση

Εάν η απλή αρμονική κίνηση υπόκειται σε τριβές τότε η κίνηση εξασθενεί λόγω της τριβής και λέγεται **φθίνουσα αρμονική κίνηση**. Θεωρώντας ότι η δύναμη της τριβής είναι αντίθετη και ανάλογη της ταχύτητας F=-bv (1.21) η διαφορική εξίσωση της κίνησης γίνεται

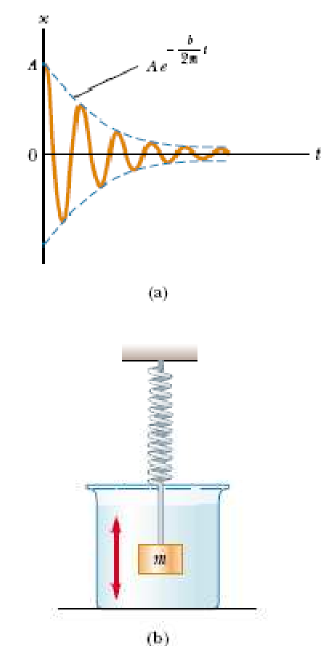
$ma = -kx - bv \longrightarrow m\frac{dx^2}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} \longrightarrow m\frac{dx^2}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$ (1.22) όπου b σταθερά αναλογίας (**σταθερά απόσβεσης**). Εάν η b είναι μικρή η λύση της ΔΕ (1.18) δίνεται από τη σχέση

$x = Ae^{-\frac{bt}{2m}}\cos\left(\omega' t + \varphi\right)$ (1.23)

Όπου

$\omega' = 2\pi f' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ (1.24)

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.12) και (1.24) η συχνότητα f'<f είναι μικρότερη και η T'>T από την κίνηση χωρίς τριβή. Η τριβή κάνει πιο αργή την κίνηση. Για b=0 έχουμε ω΄=ω. Το πλάτος της κίνησης βαθμιαία μειώνεται στο μηδέν. Ο χρόνος τ μέσα στον οποίο το πλάτος πέφτει στο 1/e της αρχικής τιμής του λέγεται **μέσος χρόνος ζωής** της ταλάντωσης (σχήμα -2)



Σχήμα -2

Εάν στη σχέση (1.23) θέσουμε t=τ , προκύπτει ότι τ=2m/b (1.25).

Στην περίπτωση που το b αποκτήσει την κρίσιμη τιμή b_c,

$b_c = 2m\omega$ (1.25)

τότε το σύστημα δεν ταλαντώνεται και λέμε ότι είναι **κρίσιμα αποσβενύμενο**. Στην περίπτωση αυτή όταν το σύστημα αφεθεί από την θέση ισορροπίας γυρίζει στην θέση ισορροπίας και παραμένει εκεί. . Εάν η τριβή είναι μεγάλη το b γίνεται τόσο μεγάλο που το υπόρριζο στην σχέση (1.24) γίνεται αρνητικό και η σχέση (1.24) δεν είναι πλέον λύση της ΔΕ (1.22) , η κίνηση δεν είναι καν περιοδική. Το σώμα όταν το σύστημα αφεθεί από την θέση ισορροπίας γυρίζει στην θέση ισορροπίας και παραμένει εκεί αλλά κάνει πολύ περισσότερο χρόνο να γυρίσει από οτι στην προηγούμενη περίπτωση.

1.3 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις και συντονισμός

Εάν στο σώμα ασκείται μία εξωτερική περιοδική δύναμη τότε εκτελεί εξαναγκασμένη περιοδική κίνηση. Η αντίστοιχη ταλάντωση λέγεται **εξαναγκασμένη ταλάντωση**. Εάν θεωρήσουμε ότι η εξωτερική περιοδική δύναμη δίνεται από τη σχέση

$F'' = F_m \cos(\omega'' t)$ (1.26)

τότε η διαφορική εξίσωση της κίνησης γίνεται

$$-kx - bv + F'' = ma \rightarrow -kx - b\frac{dx}{dt} + F_m \cos(\omega'' t) = ma$$

$\rightarrow ma + b\frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos(\omega'' t)$ (1.27)

Η σχέση (1.27) αποτελεί την ΔΕ της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

Η λύση της ΔΕ (1.27) δίνεται από τη σχέση

$x = \frac{F_m}{G} sin(\omega'' t - \varphi)$ (1.28)

με

$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2}$ (1.29)

και

$\varphi = cos^{-1}\frac{b\omega''}{G}$ (1.30)

Ενώ το πλάτος είναι

$A' = \frac{F_m}{G}$ (1.31)

Από τη σχέση (1.28) προκύπτει ότι η εξαναγκασμένη ταλάντωση έχει την συχνότητα της εξωτερικής δύναμης και όχι τη **φυσική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα) f** του σώματος. Η απόκριση όμως του σώματος εξαρτάται από την σχέση μεταξύ εξωτερικής συχνότητας και της φυσικής συχνότητας. **Η κίνηση είναι αμείωτη αρμονική κίνηση με συχνότητα f''.**

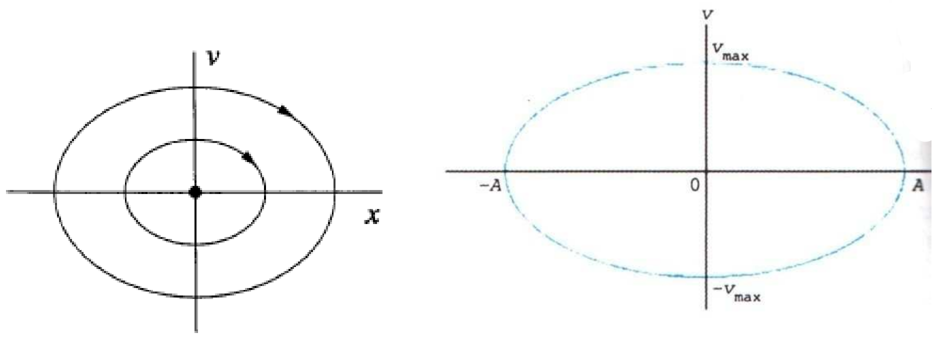
Στην περίπτωση που δεν υπάρχει τριβή b=0 και ω=ω'' ο παράγοντας G=0 και το πλάτος A' γίνεται άπειρο. Στην πραγματικότητα υπάρχει πάντα κάποια τριβή και έτσι στην πράξη το A' γίνεται πολύ μεγάλο αλλά πεπερασμένο.

Όταν έχουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση υπάρχει μία χαρακτηριστική τιμή της εξωτερικής συχνότητας f'' για την οποία το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο. Η κατάσταση αυτή λέγεται **συντονισμός** και η συχνότητα για την οποία συμβαίνει συντονισμός λέγεται **συχνότητα συντονισμού**. Όσο πιο μικρή είναι η σταθερά b τόσο η συχνότητα συντονισμού πλησιάζει την φυσική συχνότητα ταλάντωσης. Για μικρό b η συχνότητα συντονισμού ισούται πρακτικά με f.

1.4 ΧΑΟΣ

Σε ένα αρμονικό ταλαντωτή οι εξισώσεις (1.5), (1.8), (1.10) δίνουν την θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση σε οποιαδήποτε μεταγενέστερη χρονική στιγμή, εφόσον έχουν δοθεί οι τιμές της αρχικής μετατόπισης x_0 και αρχικής ταχύτητας v_0. Οποιοδήποτε σύστημα του οποίου την κίνηση μπορούμε να προβλέψουμε πλήρως, εφόσον γνωρίζουμε τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες ονομάζεται **αιτιοκρατικό σύστημα**. Στη φύση όμως υπάρχουν συστήματα πού περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις , αλλά η χρονική τους εξέλιξη δεν μπορεί να περιγραφεί ή μπορεί να προβλεφθεί σε μικρό μόνο βαθμό. Τα συστήματα αυτά ονομάζονται **χαοτικά.**

Το χαρακτηριστικό των χαοτικών συστημάτων είναι η ευαισθησία τους στις αρχικές συνθήκες. **Μια μικρή αλλαγή στις αρχικές συνθήκες προκαλεί μια μεγάλη αλλαγή στο τελικό αποτέλεσμα**. Για την μελέτη των χαοτικών συστημάτων χρησιμοποιούμε το χώρο των φάσεων. Ο **χώρος των φάσεων** είναι ένας καρτεσιανός (ορθογώνιος χώρος) με συντεταγμένες τις μεταβλητές που χρειάζονται για να περιγραφή πλήρως το σύστημα. Το πλήθος των μεταβλητών αυτών μας δίνει και το πλήθος των αρχικών συνθηκών. Για παράδειγμα εάν εξετάσουμε τον απλό αρμονικό ταλαντωτή χωρίς τριβές τότε ο φασικός χώρος είναι δυο διαστάσεων με μεταβλητές την θέση x και την ταχύτητα v. Ένα σημείο στο χώρο των φάσεων αντιπροσωπεύει τη στιγμιαία θέση και ταχύτητα του σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Ο χώρος των φάσεων για ένα αρμονικό ταλαντωτή χωρίς τριβές φαίνεται στο σχήμα - 3



Σχήμα – 3

Τα x και v σχετίζονται μέσω της σχέσης (1.19) και το φασικό διάγραμμα είναι μία έλλειψη αφού η (1.19) μας δίνει την εξίσωση

$kx^2+mv^2=kA^2$ (1.32).

Η (1.32) γράφεται σαν

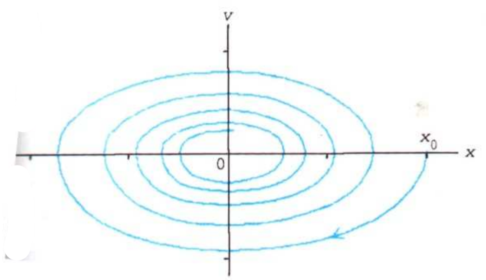
$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{mv^2}{kA^2}=1 \quad (1.33)$$

Η (1.33) λόγω των (1.9) και (1.21) γίνεται

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{v^2}{v_{max}^2}=1 \quad (1.34).$$

Η (1.34) είναι εξίσωση μίας έλλειψης με μήκος ημιαξόνα x ,το πλάτος της κίνησης και μήκος ημιάξονα y, την μέγιστη ταχύτητα. Ένα σημείο της έλλειψης επανέρχεται στην αρχική του θέση μετά από χρόνο Τ.

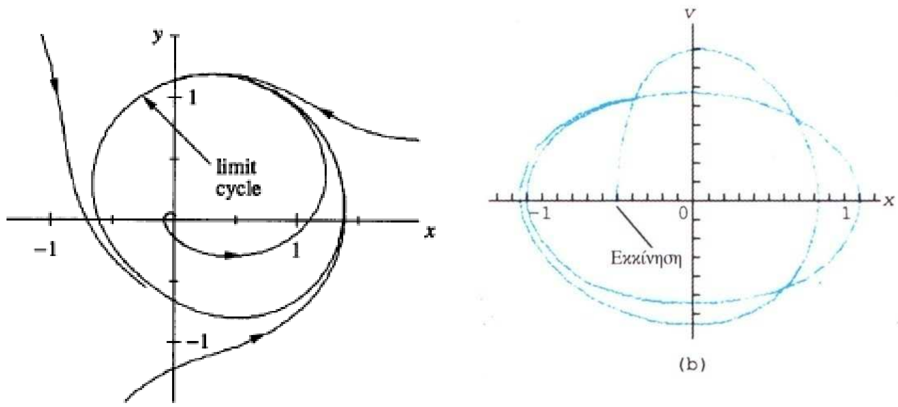
Εάν τώρα η κίνηση είναι φθίνουσα αρμονική τότε ο φασικός χώρος παριστάνεται στο σχήμα 4.



Σχήμα 4

Στην περίπτωση αυτή η ολική ενέργεια μειώνεται συνεχώς το ίδιο και το πλάτος και η μέγιστη ταχύτητα και το φασικό διάγραμμα είναι μία σπείρα που καταλήγει σε ένα σημείο.

Στην περίπτωση της εξαναγκασμένης περιοδικής κίνησης τότε η λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.27) είναι η (1.28) όταν η τριβή είναι ασθενής. Στην περίπτωση που η τριβή είναι ισχυρή μπορούμε να την δούμε την λύση σαν να σύνθεση δύο κινήσεων. Μιας απλής αρμονικής με γωνιακή ταχύτητα ω'' και πλάτους που δίνεται από τη σχέση (1.31). Αυτό το είδος της κίνησης ονομάζεται κίνηση **μόνιμης κατάστασης** και διατηρείται όσο ασκείται η εξωτερική δύναμη. Το άλλο είδος κίνησης διαμορφώνεται από τον εκθετικό όρο που περιγράφει μία φθίνουσα αρμονική κίνηση και εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Αυτή η κατάσταση είναι **μεταβατική**. Έτσι η κίνηση μπορεί να ξεκινήσει με ένα μεταβατικό ακανόνιστο τρόπο αλλά θα καταλήξει σε αρμονική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα ω'' και θα απεικονίζεται με μία έλλειψη στον χώρο των φάσεων που ονομάζεται **οριακός κύκλος** γιατί σε αυτήν καταλήγουν τελικά όλες οι τροχιές (Σχήμα -5).



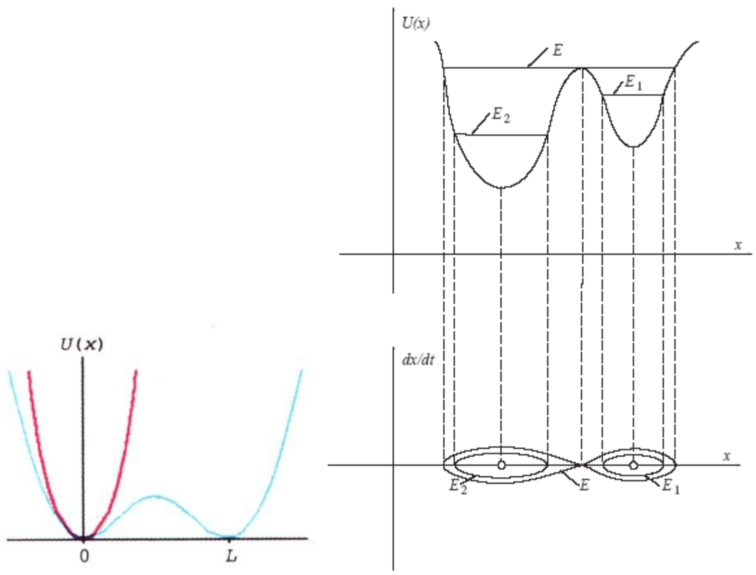
Σχήμα -5

Η επίδραση των οριακών συνθηκών είναι μεταβατικό φαινόμενο που εξασθενεί μετά από πολύ χρόνο αφήνοντας το σύστημα σε μια μόνιμη κατάσταση που είναι ανεξάρτητη από τις αρχικές συνθήκες.

Αν θεωρήσουμε τώρα ένα ελατήριο που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση αλλά η δυναμική ενέργεια του δεν περιγράφεται από την σχέση (1.2) αλλά από την σχέση

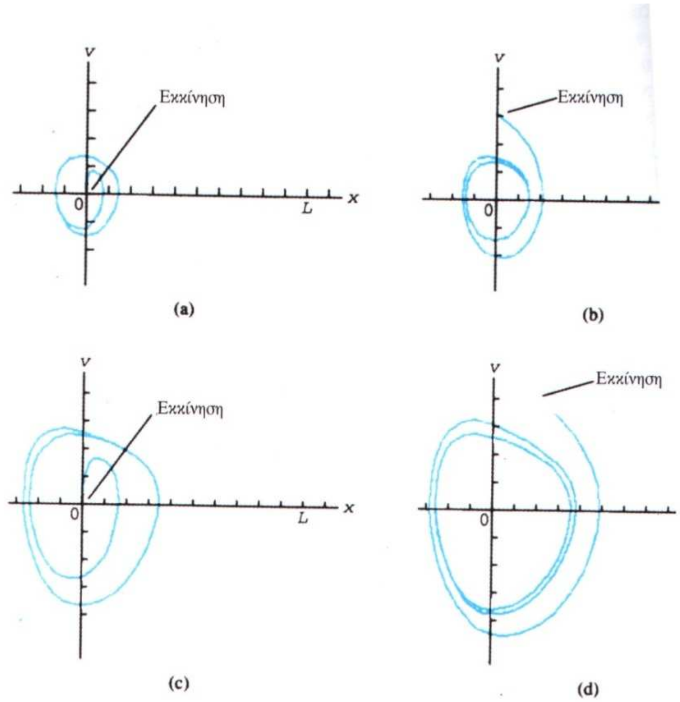
$U(x) = \frac{1}{2}kx^2\left(1-\frac{x}{L}\right)^2$ (1.32)

Η γραφική παράσταση της (1.32) μαζί με την γραφική παράσταση της (1.2) φαίνεται στο σχήμα -6



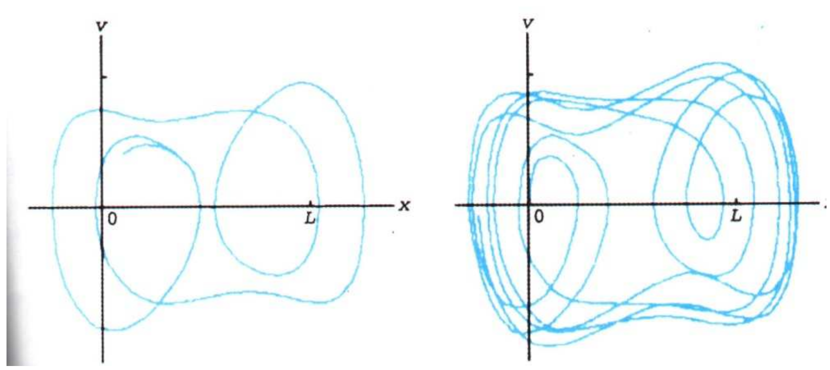
Σχήμα 6

Στην περίπτωση που x<< L τότε η (1.32) ταυτίζεται με τη (1.2). Εάν το x είναι μεγάλο τότε οι συναρτήσεις του δυναμικού διαφέρουν αρκετά. Εάν λοιπόν x<<L τότε το φασικό διάγραμμα του συστήματος θα είναι όμοιο με τις προηγούμενης περίπτωσης και η επίδραση των αρχικών συνθηκών θα εξαλειφθεί μετά από πολύ χρόνο. Στο σχήμα -7 παριστάνονται τα φασικά διαγράμματα του συστήματος που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με μικρό πλάτος για δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Παρατηρούμε ότι ο οριακός κύκλος είναι ο ίδιος στις δύο περιπτώσεις.



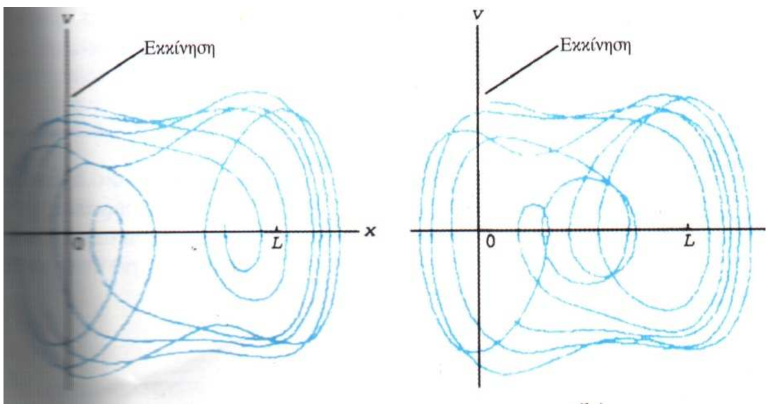
Σχήμα -7

Εάν τώρα η F_m γίνει μεγάλη τότε το σώμα ταλαντώνεται ανάμεσα σε δύο καταστάσεις δυναμικής ενέργειας όπως φαίνεται και στο σχήμα -6 Το αντίστοιχο φασικό διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα -8



Σχήμα -8

Για μια κρίσιμη τιμή της F_m δεν υπάρχει κλειστή καμπύλη στον χώρο των φάσεων αλλά ένα πολύπλοκο σχήμα σαν κουβάρι που ονομάζεται **χαοτικός ελκυστής**. Το σώμα φαίνεται να ταλαντώνεται πότε στο ένα πότε στο άλλο πηγάδι δυναμικού η περιφέρεται μεταξύ των δύο χωρίς συγκεκριμένες τάσεις όπως φαίνεται στο σχήμα -9



Σχήμα -9

Λέμε τότε ότι η κίνηση είναι **χαοτική**. Χαρακτηριστικό της χαοτικής κίνησης είναι η ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Όταν αφήσουμε το σύστημα να ξεκινήσει από δύο ελαφρώς διαφορετικές αρχικές συνθήκες που απεικονίζονται από δύο διαφορετικά γειτονικά σημεία στον χώρο των φάσεων οι δύο κινήσεις που θα προκύψουν θα αποκλίνουν πολύ γρήγορα η μία από την άλλη. Η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου θα δίνεται από τη σχέση (1.1) και μετά την παραγώγιση θα είναι

$$F(x) = -kx\left(1-\frac{x}{L}\right)\left(1-\frac{2x}{L}\right) \qquad (1.33)$$

και η διαφορική εξίσωση θα δίνεται από τη σχέση

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx\left(1-\frac{x}{L}\right)\left(1-\frac{2x}{L}\right) + b\frac{dx}{dt} = F_m\cos\left(\omega'' t\right) \quad (1.34)$$

Η (1.34) λύνεται μόνο αριθμητικά

Ερώτηση 1 :Ποια η διαφορά ανάμεσα στην απλή αρμονική κίνηση και στην αρμονική κίνηση

Απόντιση 1: Στην απλή αρμονική κίνηση η U(x) είναι ανάλογη του x^2 ενώ στην αρμονική κίνηση μπορεί να έχει άλλη μορφή

Στην απλή αρμονική κίνηση τα όρια ταλάντωσης απέχουν εξ ίσου από τη θέση ισορροπίας ενώ στην αρμονική κίνηση όχι.

Άσκηση 1

Έχουμε ένα σώμα άγνωστης μάζας και ένα ελατήριο άγνωστης σταθεράς k. Πως μπορούμε να βρούμε την περίοδο ταλάντωσης του συστήματος μάζα – ελατήριο μετρώντας την επιμήκυνση του ελατηρίου έαν κρεμάσουμε σε αυτό τη μάζα m;

Λύση

Το βάρος του σώματος θα είναι και δύναμη επαναφοράς. Έτσι

$mg = kx \longrightarrow \frac{m}{k} = \frac{x}{g}$ (1) Οπότε η περίοδος θα είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$$

Άσκηση 2

Ένα σώμα μάζας 200g είναι συνδεδεμένο με ένα ελατήριο σταθεράς $5Nm^{-1}$,και ταλαντώνεται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5cm από τη θέση ισορροπίας του. Να βρεθούν α) Η περίοδος της κίνησης β) Η μέγιστη ταχύτητα του σώματος γ) Η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος. Δ) Εάν το σώμα αφεθεί από την ίδια αρχική θέση αλλά με αρχική ταχύτητα $\vec{v_i} = -0.1ms^{-1}\vec{i}$, όπου $\vec{i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα x,να απαντηθούν ξανά οι ερωτήσεις α,β,γ.

Λύση

α) Από τη σχέση (1.13) T=1.26s β) Από την σχέση (1.9) v_{max}=.25ms^{-1} γ) Από τη σχέση (1.11) a_{max}=1.25ms^{-2} δ) Η περίοδος δεν αλλάζει εξαρτάται μόνο από τα m, k.

Σε χρόνο t=0 x(0)=A cosφ=x_i (1) και v(0)=-ωAsin(φ)=v_i. Από (1) και, (2),

$$\frac{-\omega A \sin(\varphi)}{A \cos(\varphi)} = \frac{v_i}{x_i} \rightarrow tan\varphi = \frac{v_i}{\omega x_i} \rightarrow \varphi = .12\pi.$$

Θέτωντας φ=0.12π στην (1) βρίσκουμε το A=0.0539m. Με την σχέση (1.9) βρίσκουμε v_{max}=.269ms^{-1}. Από τη σχέση (1.11) a_{max}=1.35ms^{-2}

Άσκηση 3

Ένα αυτοκίνητο μάζας 1300Kg είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε να στηρίζεται σε 4 ελατήρια (αμορτισερ). Κάθε ελατήριο έχει σταθερά k=20000Nm^{-1}. Εάν δύο άνθρωποι που επιβαίνουν στο αυτοκίνητο έχουν συνολική μάζα 160Kg βρείτε την συχνότητα ταλάντωσης του αμαξώματος όταν το αυτοκίνητο πέσει σε μία λακούβα του οδοστρώματος.

Λύση

Η ολική δύναμη επαναφοράς θα είναι

F_{ol}= -4kx=-$k_{εν}$x δηλαδή ισοδυναμεί με ελατήριο σταθεράς $k_{εν}$=4k=4x20000Nm^{-1}=80000Nm^{-1}.

Από τη σχέση (1.14) παίρνουμε θέτωντας m=160Kg+1300Kg=1460Kg

,f=1.18Hz.

Άσκηση 4

Ένα σώμα μάζας 10.6Kg ταλαντώνεται δεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k=2.05Nm^{-1}$. Λόγω αντίστασης του αέρα υφίσταται τριβή με σταθερά απόσβεσης $b=3Nsm^{-1}$. Να βρεθεί α) η συχνότητα της ταλάντωσης β) Ποιο είναι το ποσοστό ελάττωσης του πλάτους σε μία περίοδο;

Λύση

A) Από τη σχέση (1.24) με m=10.6Kg, $k=2.05Nm^{-1}$, $b=3Nsm^{-1}$ βρίσκουμε

f''=7Hz. B) Στη σχέση (1.23) για t=T' πλάτος γίνεται $Ae^{-\frac{bT'}{2m}} = Ae^{-\frac{b2\pi}{2m\omega'}} = Ae^{-\frac{b\pi}{m\omega'}}$ (1), όπου ω'=2πf''. Και το ποσοστό

$$\frac{A - Ae^{-\frac{b\pi}{m\omega'}}}{A} = 1 - e^{-\frac{b\pi}{m\omega'}} = 0.02 = 2\%$$

Άσκηση 5

Ένα σώμα βάρους 40N κρέμεται από ελατήριο σταθεράς $200Nm^{-1}$ Το σύστημα δέχεται εξωτερική περιοδική δύναμη συχνότητας 10Hz και εκτελεί εξαναγκασμένη περιοδική κίνηση με πλάτος 2cm. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της εξωτερικής περιοδικής δύναμης

Λύση

Για βάρος w=40N παίρνουμε από τη σχέση w=mg→m=4.07Kg. Επίσης έχουμε k=200Nm^{-1} , f’’=10Hz ,A=2cm=2x10^{-2}m και η ιδιοσυχνότητα ω δίνεται από τη σχέση (1.12)

Από τις σχέσεις (1.28) και (1.29) με b=0 παίρνουμε F_0=318N

Άσκηση 6

Τέσσερεις άνθρωποι μάζας 73Kg ο καθένας βρίσκονται μέσα σε ένα αυτοκίνητο μάζας 1266Kg . Την στιγμή εκείνη γίνεται σεισμός με συχνότητα δόνησης 1.8Hz ο οδηγός ακινητοποιεί το αυτοκίνητο το οποίο ταλαντώνεται κάθετα με τα ελατήρια της ανάρτησης του να βρίσκονται στο μέγιστο πλάτος ταλάντωσης τους . Μετά το τέλος του σεισμού οι τέσσερεις επιβάτες εγκαταλείπουν το αυτοκίνητο όσο πιο γρήγορα μπορούν. Σε τη απόσταση τα ελατήρια της ανάρτησης σηκώνουν το αυτοκίνητο καθώς οι επιβάτες εγκαταλείπουν το όχημα;

Λύση

‘Εχουμε m=73Kg , m_a=1266Kg

M=4m+m_a= 4*73Kg+1266Kg=1558Kg

Αφού έχουμε μέγιστο πλάτος έχουμε συντονισμό και ω’’=ω ή f’’=f=1.8Hz (1) . Ισχύει

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} \rightarrow k=4\pi^2f^2M=1.82x10^5Kgs^{-2} \quad (1)$$

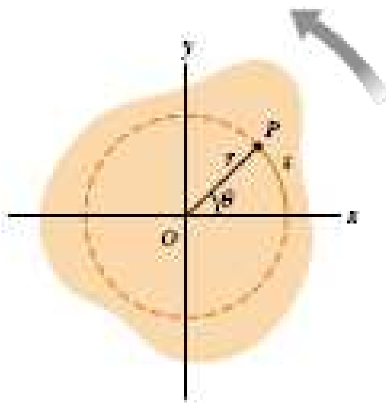
Μετά την εγκατάλειψη του αυτοκινήτου η δύναμη του βάρους των επιβατών είναι η δύναμη επαναφοράς. Έτσι

$$4mg = kx \longrightarrow x = \frac{4mg}{k} = 1.56x10^{-2}m$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Περιστροφική κίνηση εκτελεί ένα σώμα όταν κάθε σωμάτιο του σώματος διαγράφει κύκλο , τα κέντρα δε όλων των κύκλων βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία που λέγεται άξονας της περιστροφής, π.χ. Ο άξονας περιστροφής στο σχήμα 2.1 είναι ο z.



Σχήμα 2.1

Η γωνία που διαγράφει το διάνυσμα θέσης **r** ενός σημείου του σώματος είναι θ. Εάν μετράμε την θ σε ακτίνια (rad) τότε εξ ορισμού :

$\theta = \frac{s}{r}$ (2.1)

όπου s το μήκος του τόξου που φαίνεται στο σχήμα 2.1.

Εάν σε χρόνο Δt η γωνία μεταβάλλεται κατά Δθ η **μέση γωνιακή ταχύτητα** του σώματος στο χρονικό διάστημα Δt ορίζεται σαν

$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ (2.2)

Και η **στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα** θα είναι το όριο της σχέσης 2.2 για απειροστή μεταβολή του χρόνου.

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ (2.3)

Εάν σε χρόνο Δt η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται κατά Δω **η μέση γωνιακή επιτάχυνση α** του σώματος στο χρονικό διάστημα Δt ορίζεται σαν

$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ (2.4)

Και **η στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση** θα είναι το όριο της σχέσης 2.4 για απειροστή μεταβολή του χρόνου.

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ (2.5)

Από τη σχέση (2.1) παίρνουμε s=rθ (2.6) Παραγωγίζοντας την σχέση (2.6) ως προς τον χρόνο

$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r$ (2.6) Επειδή η γραμμική ταχύτητα v είναι $v = \frac{ds}{dt}$ (2.7) με βάση και τη σχέση (2.3) παίρνουμε,

v=ωr (2.8),

και σε διανυσματική μορφή

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} x \boldsymbol{r} = \omega \hat{k} x r \hat{\imath} = \omega r \hat{\jmath}$ (2.9),

όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.

Παραγωγίζοντας την σχέση (2.9) ως προς τον χρόνο

$$\mathbf{a}=\frac{dv}{dt}=\frac{d\omega}{dt}xr+\omega x\frac{dr}{dt}=\boldsymbol{\alpha x r}+\boldsymbol{\omega x v}=a\hat{k}xr\hat{\imath}+\omega\hat{k}xv\hat{\jmath}=ar(\hat{k}x\hat{\imath})+\omega v(\hat{k}x\hat{\jmath})=ar\hat{\jmath}+\omega v(-\hat{\imath})$$
(2.10)

Ισχύει

$\boldsymbol{\alpha_{tan}}=ar\hat{\jmath}$ (2.11),

όπου α_{tan}

είναι η **εφαπτομενική ή επιτρόχιος** συνιστώσα της επιτάχυνσης του σωματιδίου με διάνυσμα θέσης **r**, οπότε

$\alpha_{tan}=\alpha r$ (2.12).

και

$\boldsymbol{\alpha_{rad}}=v\omega(-\hat{\imath})$ (2.13)

είναι η **ακτινική η κεντρομόλο επιτάχυνση** επειδή το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση.

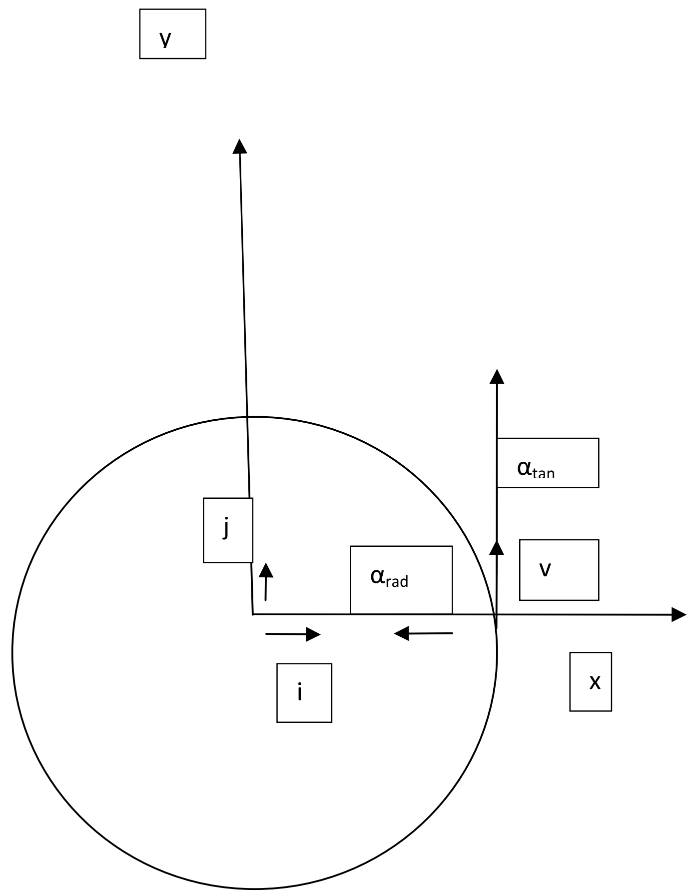
Για **την ακτινική ή κεντρομόλο** συνιστώσα της επιτάχυνσης ισχύει

$\alpha_{rad}=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r$ (2.14).

Η φυσική της σημασία είναι ότι περιγράφει τη μεταβολή μόνο της διεύθυνσης της ταχύτητας.

Από (2.10), (2.11), (2.13) παίρνουμε

$\mathbf{a}=\boldsymbol{\alpha_{tan}}+\boldsymbol{\alpha_{rad}}$ (2.15)



Σχήμα 2.2

Η ακτινική ή κεντρομόλος επιτάχυνση οφείλεται στις ενδοατομικές δυνάμεις συνοχής οι οποίες είναι υπεύθυνες για την σχετική θέση των ατόμων στο στερεό σώμα, ενώ η εφαπτομενική ή επιτρόχιος επιτάχυνση προκαλείται από μία εξωτερική δύναμη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

3.1 Η έννοια της ροπής – Μηχανική ροπή

Η ροπή ενός φυσικού διανυσματικού μεγέθους **Α** το οποίο προσδιορίζεται με διάνυσμα θέσης **r,**

ΡΟΠΗ Α=rx**Α** (3.1.1)

Στην περίπτωση που το διάνυσμα **Α** παριστάνει δύναμη έχουμε την μηχανική ροπή **τ** που ορίζεται σαν

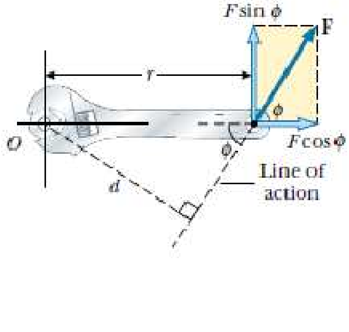
τ=rx**F (3.1.2)**

με μέτρο

τ=rFsinφ (3.1.3)

και μονάδα το 1Nm

Στο σχήμα 3.1 φαίνεται η εφαρμογή δύναμης F και η αντίστοιχη ροπή τα ως προς άξονα Ο.



Σχήμα 3.1

Επειδή η ποσότητα rsinφ ισούται με την απόσταση του φορεά της δύναμης από το σημείο Ο , δηλαδή τον άξονα περιστροφής d=rsinφ το μέτρο της ροπής γράφεται σαν

τ=Fd (3.1.4).

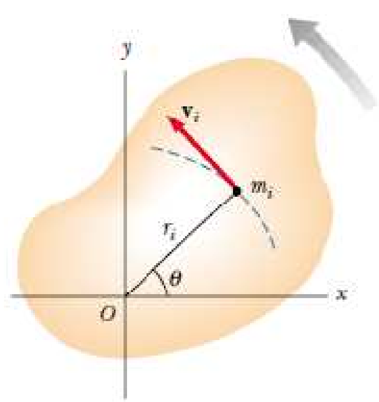
Η ποσότητα d ονομάζεται **μοχλοβραχίονας**. Για την μηχανική ροπή ισχύει

$\boldsymbol{\Sigma\tau=\tau_1+\tau_2+\ldots.\tau_N}$ (3.1.5)

Επίσης εάν σε ένα σώμα ασκηθεί μηχανική ροπή **τ** θα αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση **α**.

3.2 Κινητική ενέργεια στερεού σώματος που περιστρέφεται ως προς άξονα.

Έστω το σώμα του σχήματος που περιστρέφεται ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο



Σχήμα 3.2

Θεωρούμε ένα μία στοιχειώδη μάζα m_i η οποία έχει γραμμική ταχύτητα $\mathbf{v_i}$. Η κινητική ενέργεια της στοιχειώδους αυτής μάζας θα είναι

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (3.2.1)$$

Η ολική κινητική ενέργεια θα είναι

$$K = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (3.2.2)$$

Η (3.2.2) με την σχέση (2.8) δίνει

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2) \omega^2 \qquad (3.2.3).$$

Θέτοντας σαν

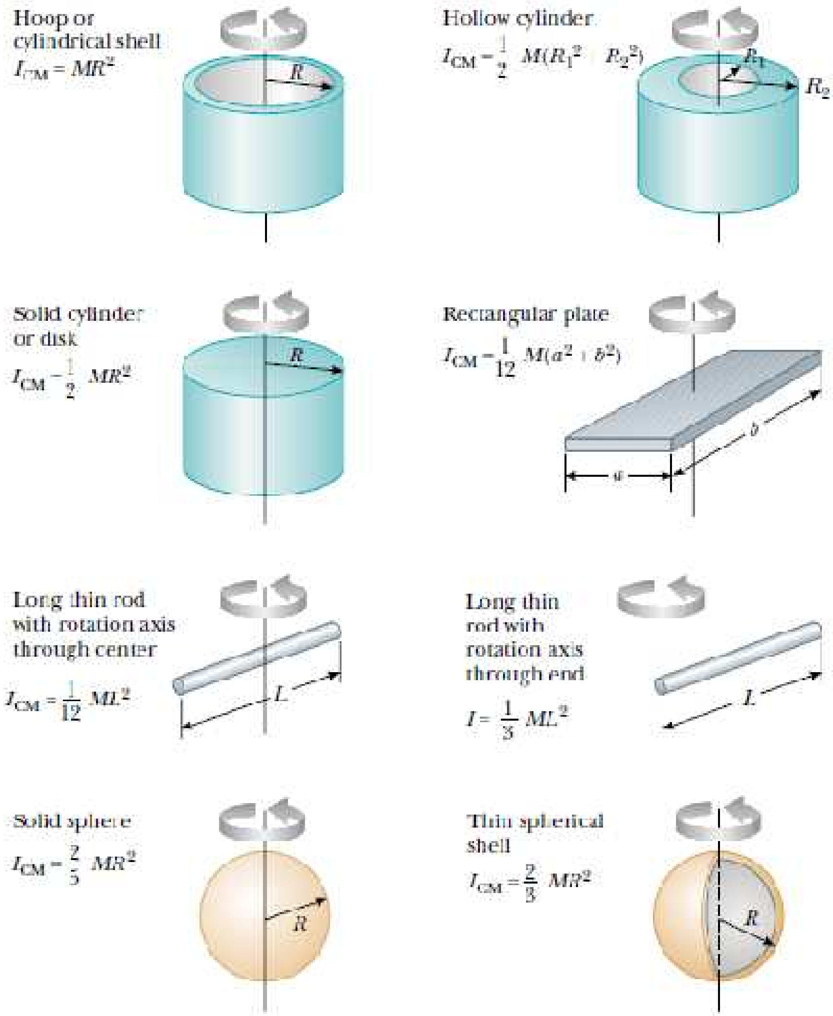
$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2 \quad (3.2.4)$$

Η (3.2.3) γίνεται

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (3.2.5).$$

Ο όρος Ι που ορίζεται μέσω της σχέσης (3.2.4) ονομάζεται **ροπή αδράνειας** του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής. Μονάδα της ροπής αδράνειας είναι το 1Kgm^2 ,όπως προκύπτει από τον ορισμό της. Η κινητική ενέργεια περιστροφικής κίνησης σώματος ως προς άξονα δίνεται από την σχέση (3.2.5). Η ροπή αδράνειας είναι το αντίστοιχο μέγεθος της μάζας στην περιστροφική κίνηση. Εκφράζει την δυσκολία να θέσουμε ένα σώμα σε περιστροφική κίνηση ή με άλλα λόγια την τάση του σώματος να ανθίσταται σε μεταβολή της γωνιακής του ταχύτητας.

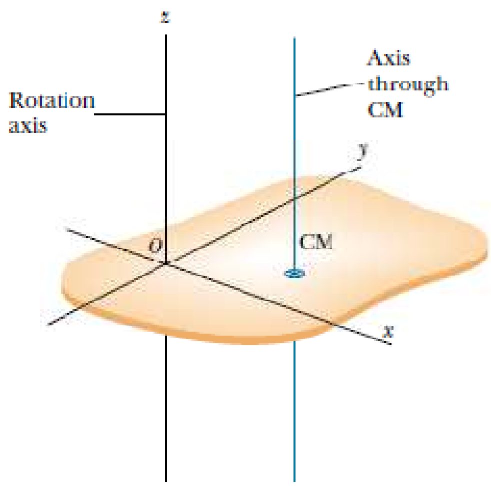
Όπως προκύπτει από τον ορισμό της ροπής αδράνειας , το μέγεθος της εξαρτάται από την σχετική θέση του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής και την κατανομή μάζας του σώματος. Στο σχήμα (3.3) έχουμε την ροπή αδράνειας διαφόρων σωμάτων με διαφορετική γεωμετρία και διαφορετική κατανομής μάζας.



Σχήμα 3.3.

Υπάρχει μια χρήσιμη σχέση ανάμεσα στην ροπή αδράνειας I ενός σώματος ως προς ένα άξονα και της ροπής αδράνειας I_{cm} ως προς ένα παράλληλο άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του. Εάν M είναι η ολική μάζα του σώματος και D η απόσταση μεταξύ των δύο αξόνων τότε σύμφωνα με το λεγόμενο **θεώρημα των παραλλήλων αξόνων**

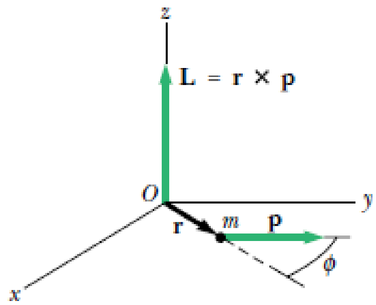
$I=I_{cm}+MD^2$ (3.2.6), σχήμα (3.4)



Σχήμα 3.4

3.2 Γωνιακή ορμή (Στροφορμή)

Η ροπή της ορμής ενός υλικού σημείου ως προς άξονα εξ ορισμού ονομάζεται **γωνιακή ορμή ή στροφορμή**. Στο σχήμα (3.5) φαίνεται η στροφορμή ενός υλικού σημείου μάζας m που κινείται με ταχύτητα **v** ως προς τον άξονα z



Σχήμα 3.5

L=**r**x**p**=**r**xm**v** (3.2.1)

Μονάδα της στροφορμής είναι 1Kg $m^2s^{-1.}$

Εάν θεωρήσουμε στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από άξονα συμμετρίας ο οποίος συμπίπτει μετ ον άξονα z καρτεσιανού συστήματος αναφοράς τότε

Η ολική στροφορμή του θα είναι

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L_1} + \boldsymbol{L_2} + \cdots \boldsymbol{L}_N = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{L}_i$ (3.2.2)

Από τον ορισμό της μηχανικής ροπής **τ**=**r**x**F**

$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r x F} = \boldsymbol{r x}\frac{\boldsymbol{dp}}{\boldsymbol{dt}}$ (3.2.3)

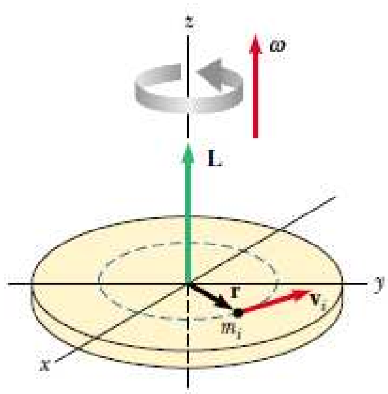
Εάν παραγωγίσουμε την σχέση (3.2.1) ως προς τον χρόνο έχουμε

$\frac{dL}{dt} = \frac{d(rxp)}{dt} = rx\frac{dp}{dt} + \frac{dr}{dt}x\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r}x\frac{dp}{dt}$ (3.2.4)

Από (3.2.3) και (3.2.4)

$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$ (3.2.5)

Όταν ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από ένα σταθερό άξονα που είναι άξονας συμμετρίας τότε τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας **ω** και της στροφορμής **L** καθώς και της μηχανικής ροπής **τ** είναι παράλληλα και οι διευθύνσεις τους συμπίπτουν με τον άξονα περιστροφής (Σχήμα 3.6).



Σχήμα 3.6

Εάν το σώμα είναι ομογενές και συμμετρικό ως προς άξονα περιστροφής π.χ. ως προς τον άξονα z τότε **L**=L**k**. Σε κάθε άλλη περίπτωση ενώ **ω**=ω**k** το διάνυσμα της στροφορμής **L** δεν έχει την κατεύθυνση του μοναδιαίου **k**. Στην περίπτωση αυτή με σκοπό να υπολογίσουμε την γωνιακή επιτάχυνση **α** βρίσκουμε την προβολή $\mathbf{L_z}$ του **L** στον άξονα z οπότε

$L_z=\mathbf{Lk}$ (3.2.7) και

$\mathbf{L_z}$=Ι$\boldsymbol{\omega}$ (3.2.8) ,

Έτσι έχουμε

$$\tau_z = \boldsymbol{\tau k} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\boldsymbol{k} = \frac{d(\boldsymbol{Lk})}{dt} = \frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \text{ (3.2.9)}$$

Στην περίπτωση που το σώμα είναι συμμετρικό και ομογενές ως προς τον άξονα περιστροφής έστω τον άξονα z τότε

L=L**k** ή L=L_z και **L**=Ι**ω**. Η μηχανική ροπή θα είναι

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha} \text{ (3.2.10)}$$

Εάν **τ**=0 τότε $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0$ δηλαδή η στροφορμή παραμένει σταθερή και επειδή **L**=Ι**ω** και η γωνιακή ταχύτητα να παραμένει σταθερή.

Αυτό σημαίνει ότι όταν απομακρύνουμε τις δυνάμεις που ενεργούν πάνω στο στερεό ο άξονας περιστροφής θα διατηρεί σταθερή την διεύθυνση στο χώρο αφού η **ω** είναι σταθερή. Ένας άξονας του οποίου η διεύθυνση στο χώρο παραμένει σταθερή όταν ένα σώμα περιστρέφεται γύρω από αυτόν απουσία εξωτερικών δυνάμεων ονομάζεται **ελεύθερος άξονας** του σώματος. Αποδεικνύεται ότι σε κάθε στερεό σώμα οποιουδήποτε σχήματος και με οποιαδήποτε κατανομή μάζας υπάρχουν 3 τουλάχιστον άξονες που ανά δύο είναι κάθετοι μεταξύ τους που περνάνε από το κέντρο μάζας οι οποίοι είναι ελεύθεροι άξονες. Αυτοί ονομάζονται **κύριοι άξονες αδράνειας** Εφ όσον το στερεό έχει άξονες συμμετρίας οι κύριοι άξονες αδράνειας συμπίπτουν με τους άξονες αδράνειας.

Μπορούμε να πούμε εναλλακτικά ότι κύριος άξονας αδράνειας είναι ο άξονας ως προς τον οποίο όταν περιστραφεί το στερεό το διάνυσμα της στροφορμής είναι παράλληλό με τον ίδιο τον άξονα και με το με το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας. Οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας ως προς τους κύριους άξονες αδράνειας λέγονται **κύριες ροπές αδράνειας**. Οι κύριες ροπές αδράνειας γενικά διαφέρουν μεταξύ τους

$I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Σε κεντροσυμμετρικά σώματα ισχύει $I_1=I_2=I_3$. Τα σώματα αυτά λέγονται **σφαιρικοί στρόμβοι** π.χ. ομογενής σφαίρα ή ομογενής κύβος.

Εάν θεωρήσουμε ένα σωματίδιο μάζας m_i του στερεού που απέχει απόσταση r_i από τον άξονα περιστροφής τότε το μέτρο της στροφορμής του δίνεται από τη σχέση

$L_i=r_i m_i v_i$ (3.2.11)

Με βάση τη σχέση (2.8) η (3.2.7) γίνεται

$L_i=m_i r_i^2 \omega$ (3.2.12)

Για ολόκληρο το στερεό θα ισχύει

$L_z = (\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2)\omega$ (3.2.13)

Και τελικά

$L_z=I\omega$ (3.2.14)

Εάν παραγωγίσουμε την σχέση (3.2.14) ως προς τον χρόνο θα λάβουμε

$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = Ia$ (3.2.11)

‘Ετσι στην περίπτωση ολικής εξωτερικής μηχανικής ροπής $\Sigma\tau_{ext}$

Θα εχουμε

$\sum \tau_{ext} = \frac{dL_z}{dt} = I\alpha$ (3.2.12)

3.3 Αρχή διατήρησης της στροφορμής

Η ολική στροφορμή ενός συστήματος είναι σταθερή τόσο στο μέτρο όσο και στην κατεύθυνση της εάν η συνολική εξωτερική ροπή που δρά πάνω στο σύστημα είναι ίση με μηδέν Αυτή η πρόταση αποτελεί την **αρχή διατήρηση της στροφορμής** και φορμαλιστικά περιγράφεται από την σχέση

$\sum \tau_{ext} = \frac{dL}{dt} = 0$ (3.2.13)

Από την (3.2.13) προκύπτει **L=σταθερή ή**

$\mathbf{L_i}$**=**$\mathbf{L_f}$ =σταθερή (3.2.14)

όπου $\mathbf{L_i}$ είναι η αρχική στροφορμή καί $\mathbf{L_f}$ η τελική στροφορμή.

Από την (3.2.14) και (3.2.12) προκύπτει

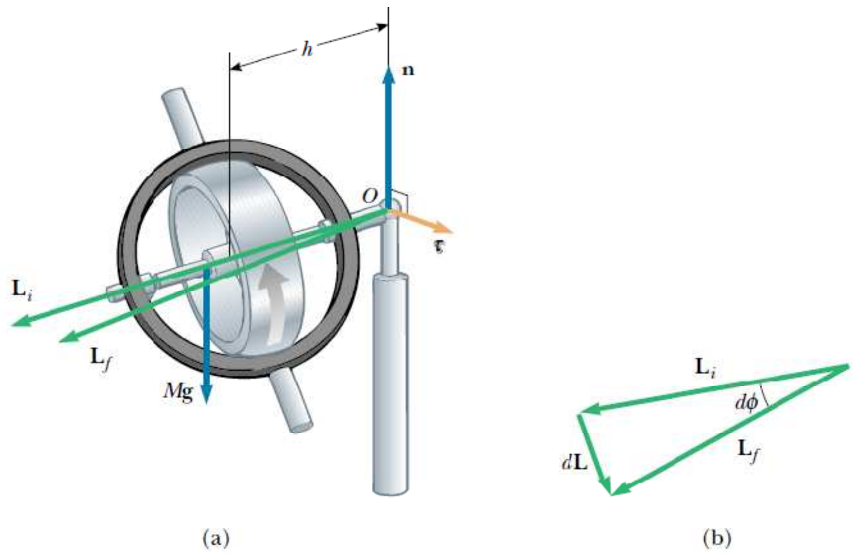
Στην περίπτωση που η η συνολική εξωτερική ροπή που δρά πάνω στο σύστημα είναι ίση με μηδέν

L=Ιω=σταθερή (3.2.15)

Στην περίπτωση που η I μεταβάλλεται μέσω μεταβολής της r, χωρίς όμως η μεταβολή να είναι αποτέλεσμα εξωτερικής ροπής η διατήρηση της στροφορμής επιβάλλει να μεταβληθεί η ω. Τότε πρέπει αναγκαστικά να υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση που όμως δεν δικαιολογείται χωρίς την ύπαρξη δύναμης Coriolis

3.4 Γυροσκόπιο

Όταν ένα στερεό περιστρέφεται γύρω από ένα σταθερό άξονα που είναι άξονας συμμετρίας τότε όπως αναφέρθηκε πριν το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας **ω**, της στροφορμής **L** και της μηχανικής ροπής **τ** είναι παράλληλα και οι διευθύνσεις τους συμπίπτουν με τον άξονα περιστροφής. Ας μελετήσουμε το γυροσκόπιο του



Σχήμα 3.7

σχήματος 3.7

Όριζουμε τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων όπου ο άξονας z είναι ο άξονας στήριξης και ο άξονας x είναι ο άξονας περιστροφής.

Εξαιτίας του βάρους του

w =M**g** (3.4.1)

δημιουργείται μηχανική ροπή **τ,**

τ=**r**x**w**=r**i**x (-w**k**)=rMg**j** (3.4.2)

Οταν ο τροχός είναι ακίνητος η συνολική ροπή είναι

Σ$\boldsymbol{\tau}_{ext}$=**τ** (3.4.3),

αφού η αντίδραση **n** από τον άξονα περιστροφής δεν προκαλεί μηχανική ροπή.

Από την (3.2.13)

d**L**=**τ**dt (3.4.4)

οολοκληρώνοντας και εφόσον η αρχική στροφορμή $\mathbf{L}_i$=0 τότε

$\int_0^{L_f} d\boldsymbol{L} = \tau \int_0^t dt \longrightarrow \boldsymbol{L_f} = \boldsymbol{\tau} t$ (3.4.5)

Καθώς ο χρόνος περνάει η μεταβολή της στροφορμής θα περιγράφεται από ένα διάνυσμα $\mathbf{L_f}$ σταθερής κατεύθυνσης συγγραμικό με το διάνυσμα **τ** του οποίου το μέτρο αυξάνει διότι αυξάνει λόγω της (3.4.5) έως ότου το άκρο του γυροσκοπίου συναντήσει το έδαφος. Τι συμβαίνει όταν υπάρχει αρχική στροφορμή $\mathbf{L_i}$=**L,** δηλαδή το γυροσκόπιο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα **ω.** Τότε η αρχική αυτή στροφορμή δίνεται από τη σχέση

L=I**ω** (3.4.6)

όπου I η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής.

Επειδή ο τροχός περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής , θα έχει κατεύθυνση την κατεύθυνση της **ω**, δηλαδή θα ισχύει

L=L**i** (3.4.7)

Επειδή υπάρχει η ροπή του βάρους τότε λόγω της (3.2.13) η ροπή του βάρους θα προκαλέσει μεταβολή της αρχικής στροφορμής **L** κατά d**L**

έτσι ώστε

dL=L_f-L_i-->L_f=L_i+dL=L+dL (3.4.8)

όπως φαίνεται στο σχήμα (3.7.b).

Η μεταβολή της στροφορμής κατά d**L** είναι κάθετη στον άξονα περιστροφής δηλαδή στην αρχική στροφορμή **L** έτσι της αλλάζει την κατεύθυνση μόνο και όχι το μέτρο. Εάν δεν περιστρέφετε ο τροχός τότε όλα τα d**L** θα ήταν παράλληλα και θα προστίθενται μέχρι να δώσουν την τελική στροφορμή της σχέσης 3.4.5 Η φορά του d**L** είναι ίδια με την φορά του **τ**. Στο τέλος του διαστήματος dt η στροφορμή είναι L+dL. Αυτό σημαίνει ότι ο άξονας του γυροσκοπίου έχει στραφεί κατά μια μικρή γωνία dφ

Για μικρή μεταβολή dφ τότε ισχύει

$$\tan(\varphi) \sim d\varphi = \frac{dL}{L} \; (3.4.9)$$

Άρα μέσα σε χρόνο dt ο άξονας περιστροφής έχει στραφεί κατά μικρή γωνία dφ.

Η μεταβολή της γωνίας αυτής με τον χρόνο ονομάζεται **γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης Ω**. Ισχύει

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{dL}{dt}}{L} = \frac{\tau}{L} = \frac{rw}{I\omega} = \frac{rMg}{I\omega} \; (3.4.10)$$

Η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης ονομάζεται και **γωνιακή συχνότητα μετάπτωσης**, και είναι ανεξάρτητη της γωνίας που σχηματίζει το αρχικό διάνυσμα L_i της στροφορμής με τον άξονα περιστροφής. Η κυκλική κίνηση του γυροσκοπίου με μεταπτωτική ταχύτητα Ω, προσθέτει μία συνιστώσα γωνιακής ταχύτητας κατά τον άξονα z στην γωνιακή ταχύτητα ω , με αποτέλεσμα η κυκλική κίνηση του κέντρου μάζας να διαταράσσεται λόγω της μετάπτωσης και να μετατρέπεται σε ελικοειδή κίνηση. Αυτή η διαταραγμένη κυκλική κίνηση ονομάζεται **κλόνιση**. Όταν $\omega \gg \Omega$ το φαινόμενο της κλόνησης είναι ασθενές. Από τη σχέση (3.4.10) φαίνεται ότι η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης είναι αντιστρόφως ανάλογη της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του τροχού

Άσκηση 7

Μία ομογενής ράβδος μήκους L=6l και μάζας M=8m βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το μέσον της. Εάν δύο σημειακές μάζες m_1=m και m_2=2m κινούμενες με ταχύτητες v_1=2v και v_2=v και εβρισκόμενες στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με την ράβδο χτυπούν την ράβδο και ενσωματώνονται σε αυτή με πλαστική κρούση, σε απόσταση 2l και l αντίστοιχα από το κάθετο επίπεδο στο μέσο της ράβδου. Να βρεθούν α) η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά την κρούση β) Η απώλεια ενέργειας. (Ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της $\frac{1}{12}ML^2$).

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε το σύστημα της ράβδου και των σφαιρών ως απομονωμένο. Τότε ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής

$\mathbf{L_1}=\mathbf{L_2}$ (1),

Όπου $\mathbf{L_1}$ η αρχική και $\mathbf{L_2}$ η τελική στροφορμή.

Έχουμε

$\mathbf{L_1}=\mathbf{L_\rho}+\mathbf{L_{m1}}+\mathbf{L_{m2}} =\mathbf{0}+ \mathbf{L_{m1}}+\mathbf{L_{m2}}= \mathbf{L_{m1}}+\mathbf{L_{m2}}$ (2).

Όπου $\mathbf{L_\rho}$ η στροφορμή της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής και $\mathbf{L_{m1}},\mathbf{L_{m2}}$ οι στροφορμές των σημειακών μαζών m_1 και m_2 αντίστοιχα ως προς τον άξονα περιστροφής.

Ισχύει

$\mathbf{L_{m1}}$=$\mathbf{r_1}$x$\mathbf{p_1}$=$\mathbf{r_1}$xm$\mathbf{v_1}$=($\mathbf{r_{1x}}$+r_{1y})x$m_1\mathbf{v_1}$=($r_{1x}\mathbf{i}$+$r_{1y}\mathbf{j}$)x$m_1v_1\mathbf{j}$=m_1v_1[r_{1x}($\mathbf{ixj}$)+r_{1y}($\mathbf{jxj}$)]= $m_1v_1r_{1x}\mathbf{k}$= $m_1v_1r_1$ sin(π-φ_1)$\mathbf{k}$= $m_1v_1r_1$ sin(φ_1)$\mathbf{k}$= $m_1v_1r_1$ 2l$\mathbf{k}$=4mvl$\mathbf{k}$ (3)

Ομοίως

$\mathbf{L_{m2}}$=$\mathbf{r_2}$x$\mathbf{p_2}$=$\mathbf{r_2}$xm$\mathbf{v_2}$=($\mathbf{r_{2x}}$+r_{2y})x$m_2\mathbf{v_2}$=(r_{2x}(-$\mathbf{i}$)+$r_{2y}\mathbf{j}$)x$m_1v_{2(-}\mathbf{j})$=m_2v_2[r_{2x}($\mathbf{ixj}$)+r_{2y}(-$\mathbf{jxj}$)]= $m_2v_2r_{2x}\mathbf{k}$= $m_2v_2r_2$ sin(π-φ_2)$\mathbf{k}$= $m_2v_2r_2$ sin(φ_2)$\mathbf{k}$=2mvl$\mathbf{k}$ (4)

Από (2),(3),(4)

$\mathbf{L_1}$=6mvl$\mathbf{k}$=mvL$\mathbf{k}$ (5)

Μετά την ενσωμάτωση λόγω πλαστικής κρούσης,

$\mathbf{L_2}$=I$\boldsymbol{\omega}$=(I_ρ+I_1+$I_{2)}$$\boldsymbol{\omega}$=$\left[\frac{1}{12}ML^2+m_1(2l)^2+m_2l^2\right]\boldsymbol{\omega}$ =30ml$^2\boldsymbol{\omega}$ (6)

Από (1),(4),(5),(6) προκύπτει,

$\boldsymbol{\omega}=\frac{v}{5l}\boldsymbol{k}$ (6)

Για τις ενέργειες ισχύει

$K_{m1}=\frac{1}{2}m_1v_1^2$ (7) ,

Είναι η κινητική ενέργεια της σημειακής μάζας m_1 πριν την κρούση.

$K_{m2}=\frac{1}{2}m_2v_2^2$ (8) ,

Είναι η κινητική ενέργεια της σημειακής μάζας m_2 πριν την κρούση.

Ενώ η κινητική ενέργεια της ράβδου είναι μηδενική γιατί είναι ακίνητη.

Έτσι η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι

K_1=K_{m1}+K_{m2}=3mv^2 (9)

Ενώ μετά την κρούση

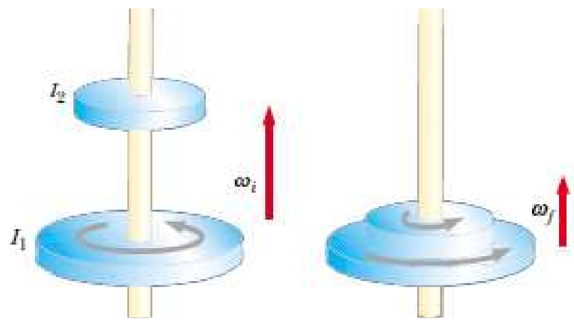
$$K_2=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{3}{4}mv^2 \ (10)$$

Ενώ

ΔK=K_2-K_1=$-\frac{9}{4}mv^2$ (11)

Άσκηση 9

Ενας δίσκος με ροπή αδράνειας I_1 περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ένα άξονα όπως φαίνεται στο σχήμα με γωνιακή ταχύτητα ω_i.



Ένας άλλος δίσκος με ροπή αδράνειας I_2, που αρχικά δεν περιστρέφεται πέφτει και εξαιτίας της τριβής ανάμεσα στους δίσκους το συσσωμάτωμα αυτό αποκτά μία τελική γωνιακή ταχύτητα ω_f. Να βρεθούν α) η ω_f β) Το ποσοστό ελάττωσης της κινητικής ενέργειας

Λύση

a)Αρχή διατήρηση της στροφορμής

$L_i=L_f$ οπότε $I_1\omega_i=(I_1+I_2)\omega_f$ (1)

Από τη (1) βρίσκουμε την ω_f

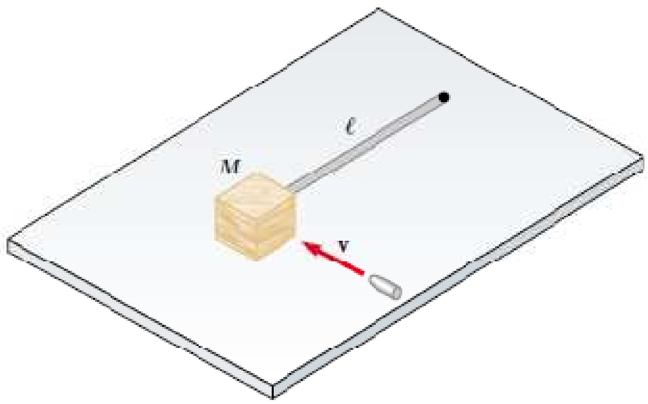
b) $K_i = \frac{1}{2} I_1 \omega_i^2$ (2)

$K_f = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_f^2$ (3)

Από (2) και (3) βρίσκουμε το ποσοστό της απολεσθείσας κινητικής ενέργειας

Άσκηση 10

Μια σφαίρα μάζας m κινείται με ταχύτητα v και ενσωματώνεται στην ξύλινη μάζα M η οποία περιστρέφεται χωρίς τριβές μέσω του στελέχους μήκους l



Να βρεθεί α) η στροφορμή του συστήματος σφαίρα- ξύλινου κύβου β) το ποσοστό της απολεσθείσας κινητικής ενέργειας

Λύση

Α)Θεωρώ ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο στήριξης του στελέχους. Η αρχική στροφορμή είναι

$\mathbf{L_i}=\mathbf{r}\mathrm{x}m\mathbf{v}=(\mathbf{r_x}+\mathbf{r_y})\mathrm{x}m\mathbf{v}=\mathbf{r_x}\mathrm{x}m\mathbf{v}+\mathbf{r_y}\mathrm{x}m\mathbf{v}=-r_x\mathbf{i}\,\mathrm{x}\,(-mv\mathbf{j})-r_y\mathbf{j}\,\mathrm{x}\,mv\mathbf{j} = -r_x mv(\mathbf{i}\mathrm{x}\mathbf{j}) = -r_x mv\mathbf{k} = -lmv\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{L_i} = -lmv\mathbf{k}$ (1)

Η τελική στροφορμή

$\mathbf{L_f}=\mathbf{r}\mathrm{x}(m+M)\mathbf{v_f} = -l\mathbf{i}\ \mathrm{x}\ (m+M)v_f\,\mathbf{j} = -l(m+M)v_f\,(\mathbf{i}\mathrm{x}\mathbf{j}) = -l(m+M)v_f\mathbf{k}$ (2)

Με μέτρο

$L_f=l(m+M)v_f$ (3)

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής

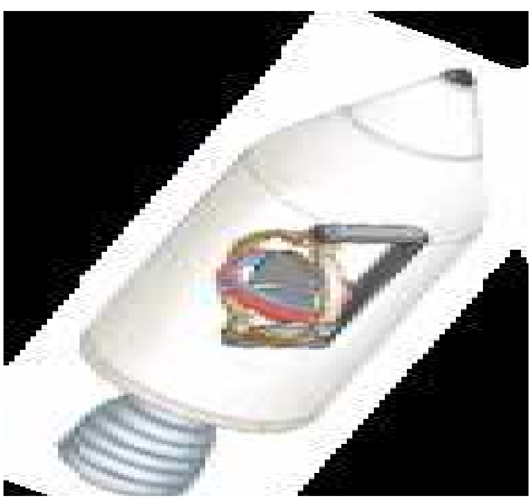
$L_i=L_f$ βρίσκουμε την v_f

B) $K_\iota = \frac{1}{2}mv^2$ (4)

$K_f = \frac{1}{2}(m+M)v_f^2$ (5)

Άσκηση 10

Ένα διαστημόπλοιο βρίσκεται στο κενό διάστημα και μέσα σε αυτό ευρίσκεται ένα γυροσκόπιο



με ροπή αδράνειας Ig =20Kgm2 ως προς τον άξονα του γυροσκοπίου. Το διαστημόπλοιο έχει ροπή αδράνειας ως προς τον ίδιο άξονα $I_s=5x10^5 Kg\ m^2$. Αρχικά δεν περιστρέφεται ούτε το γυροσκόπιο ούτε το διαστημόπλοιο. Το γυροσκόπιο σε πρακτικά αμελητέο χρονικό διάστημα αποκτά γωνιακή ταχύτητα ίση με $100rads^{-1}$. Εάν ο προσανατολισμός του διαστημοπλοίου αλλάξει κατά 30^0 ως προς τον άξονα του γυροσκοπίου να βρεθεί για πόσο χρόνο θα λειτουργεί το γυροσκόπιο.

Λύση

Η αρχή διατήρησης της στροφορμής δίνει

$\mathbf{L_i}=\mathbf{L_f}$. Αρχικά $\mathbf{L_i}=\mathbf{0}$. (1)

Και $\mathbf{L_f}=\mathbf{L_g}+\mathbf{L_s}$ (2)

Όπου L_g η στροφορμή του γυροσκοπίου και L_s η στροφορμή του διαστημοπλοίου .

Από (1) και (2)

$0=I_g\boldsymbol{\omega_g} + I_s\boldsymbol{\omega_s} \rightarrow I_s\boldsymbol{\omega_s}= - I_g\boldsymbol{\omega_g} \rightarrow I_s\omega_g\, \mathbf{i} = -I_g\, \omega_s\mathbf{i}$ (3),

Και για τα μέτρα

$I_s\omega_g = I_g\, \omega_s \rightarrow I_s\omega_g = I_g\frac{\theta}{t}$ (4)

Θέτωντας

ω_g =100rads^{-1}, $\theta = \frac{30\pi rad}{180}$, βρίσκουμε t=131s

Άσκηση 11

Εάν υποθέσουμε ότι όλοι οι κάτοικοι της Γής συγκεντρώνονται στον Ισημερινό και αρχίζουν να τρέχουν κατά μήκος του Ισημερινού, σε ευθεία γραμμή, με ταχύτητα 2.5ms^{-1} σχετικά με την επιφάνεια της Γής Όσο συμβαίνει αυτό πόσο θα αυξηθεί η διάρκεια της ημέρας ; Υποθέτουμε ότι η πληθυσμός της Γής ανέρχεται σε 5.50x10^{9} ανθρώπους και η μέση μάζα κάθε ανθρώπου είναι 70Kg και ότι η Γή είναι μία ομογενής στερεά σφαίρα με ακτίνα R= 6.37x10^{6} m , μάζα M=5.28x10^{24}Kg και ροπή αδράνειας $I_E = \frac{2}{m}MR^2$

Λύση

Λόγω της αρχής διατήρησης της στροφορμής έχουμε

$L_i=L_f$ (1)

Επίσης ο συνολικός πληθυσμός είναι

$N=5x10^6$ άνθρωποι και η μέση μάζα εκάστου $m_i=70Kg$.

Η L_i ισούται με

$L_i=L_E+L_m$ (2)

Όπου L_E η στροφορμή της Γής και Lm η στροφορμή που εχουν οι άνθρωποι λόγω της κίνησης τους γύρω από τον ισημερινό.

Εάν m είναι η συνολική μάζα των ανθρώπων τότε

$m=Nm_i$ (3)

και

$L_E=I_E\omega$ (4)

$L_m=I_m\omega$ (5)

Η ροπή αδράνειας πού έχουν οι άνθρωποι κατά την κινησή τους είναι

$I_m=mR^2$ (6)

Από (2),(4),(5) έχουμε

$L_i=I_E\omega+I_m\omega=\omega(I_E+I_m)$ (7)

Η L_f είναι

$L_f=L_{Ef}+L_{mf}$ (8)

Η L_{Ef} είναι

$L_{Ef}=I_{Ef}\omega_f$ (9)

Όπου ω_f η νέα γωνιακή ταχύτητα της Γης.

Και η L_{mf}

$L_{mf}=I_m\omega_m$ (10)

Όπου ωm η γωνιακή ταχύτητα που οφείλεται στην σχετική κίνηση των ανθρώπων ως προς τη Γη. Αυτό προκύπτει από τον ακόλουθο συλλογισμό.

Εάν v_E εφαπτομενική ταχύτητα που έχει ένας άνθρωπος ακίνητος ως προς την επιφάνεια της Γης η οποία περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_f και v_m η ταχύτητα που έχει ένας άνθρωπος λογω της κινησης του ως προς την Γη τότε ως προς ακίνητο σύστημα αναφοράς η ταχύτητα του θα είναι

$v=v_m+v_E$ (11).

Διαιρώντας την 11 με R

$$\omega_m = \frac{v_m}{R} + \omega_f \qquad (13)$$

Από (8),(9),(10),(13) έχουμε

$$L_f = I_E\omega_f + I_m\left(\frac{v_m}{R} + \omega_f\right) \qquad (14)$$

Από (1),(3),(4),(5),(6),(7),(14) βρίσκουμε την ω_f

Και από τη σχέση

$$\omega_f = \frac{2\pi}{T_f} \qquad (15)$$

Βρίσκουμε ότι $\Delta T = T_f - T = 7.5 \times 10^{-11} s$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΡΕΥΣΤΑ

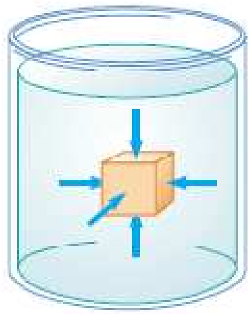
4.1 Υγρή κατάσταση

Σαν ρευστό χαρακτηρίζουμε εκείνη την κατάσταση της ύλης η οποία έχει καθορισμένο όγκο αλλά όχι καθορισμένο σχήμα (παίρνει το ρευστό το σχήμα του δοχείου το οποίο βρίσκεται) σε αντίθεση με την στερεά κατάσταση όπου η ύλη έχει καθορισμένο όγκο και καθορισμένο σχήμα και την αέρια κατάσταση όπου η ύλη ευρισκόμενη στην κατάσταση αυτή δεν έχει ούτε καθορισμένο όγκο ούτε καθορισμένο σχήμα. Αυτός ο διαχωρισμός είναι τεχνητός και τα όρια ανάμεσα στη ρευστή και στερεά κατάσταση είναι ασαφής. Για παράδειγμα η άσφαλτος και το πλαστικό θεωρούνται σαν στερεά αλλά μετά από μια μακρά χρονική περίοδο αρχίζουν να ρέουν όπως τα υγρά. Στην πραγματικότητα εάν μία ουσία χαρακτηρίζετε σαν στερεή υγρή ή αέρια εξαρτάται από την θερμοκρασία και πίεση στην οποία βρίσκεται. Γενικά ο χρόνος πού απαιτείται ώστε μία ουσία να αλλάξει σχήμα υπό την επίδραση μίας εξωτερικής δύναμης είναι εκείνος χαρακτηρίζει την ουσία σαν στερεή , υγρή η αέρια.

Η μηχανική των ρευστών σε ισορροπία ονομάζεται **υδροστατική** ενώ η μηχανική των ρευστών που βρίσκονται σε κίνηση σαν **υδροδυναμική.**

4.2 Πίεση

Ένα ρευστό σε ισορροπία ασκεί κάθετη δύναμη στην επιφάνεια του σώματος που βρίσκεται σε επαφή με αυτό (Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1

Το μέγεθος

$P = \frac{F}{A}$ (4.1)

Όπου F η κάθετη δύναμη που ασκεί το ρευστό στην επιφάνεια

Α το εμβαδόν της επιφάνειας,

Ονομάζεται **πίεση P** του ρευστού στην επιφάνεια Α.

Η πίεση είναι μονόμετρο μέγεθος . Μονάδα πίεσης είναι το

$$1Pa = \frac{1N}{1m^2}$$

4.3 Μεταβολή της πίεσης με το βάθος

Ο νόμος της υδροστατικής πίεσης λέει ότι

Η υδροστατική πίεση P σε βάθος h κάτω από ένα σημείο του υγρού στο οποίο η πίεση είναι Po, είναι αυξημένη κατά τον παράγοντα ρgh ,δηλαδή

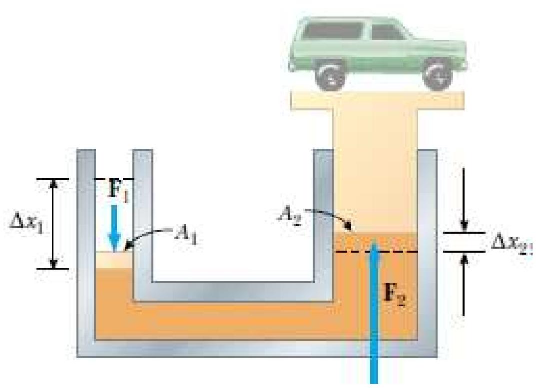
$P=P_0+\rho gh$ (4.2)

Όπου ρ η πυκνότητα του υγρού.

Η σχέση (4.2) δείχνε ότι η πίεση είναι η ίδια σε όλα τα σημεία του ίδιου βάθους h και είναι ανεξάρτητη του σχήματος του δοχείου. Επίσης εάν η πίεση Ρο αλλάξει αυτή η αλλαγή θα μεταδοθεί σε όλα τα σημεία του ρευστού. Αυτή η παρατήρηση αποτελεί και την αρχή του Pascal.

Η μεταβολή της πίεσης σε ένα σημείο ενός ρευστού μεταδίδεται αμείωτη σε όλα τα σημεία του υγρού και στα τοιχώματα του δοχείου πού το περιέχει.

Εφαρμογή της αρχής του Pascal έχουμε στο υδραυλικό πιεστήριο (Σχήμα – 4.2)



Σχήμα 4.2

Για το σχήμα 4.2 ισχύει

$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$ (4.3)

Το έργο W_1 της δύναμης F_1 στο πρώτο έμβολο ισούται με το έργο W_2 της δύναμης F_2 στο δεύτερο έμβολο. Αυτό προκύπτει από τον ακόλουθο συλλογισμό

$W_1 = F_1 \Delta x_1$ (4.4)

$W_2 = F_2 \Delta x_2$ (4.5)

Διαιρώντας κατά μέλη τις 4.4 και 4.4 πάιρνουμε

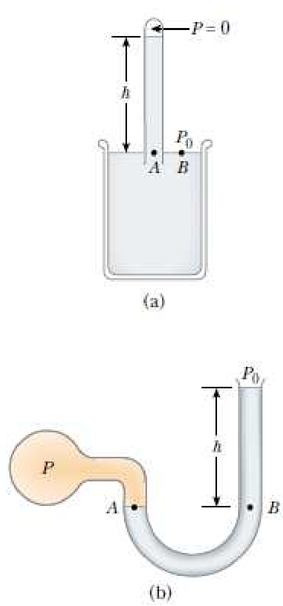
$\frac{W_1}{W_2} = \frac{F_1 \Delta x_1}{F_2 \Delta x_2} = \frac{A_1 \Delta x_1}{A_2 \Delta x_2} = \frac{V}{V} = 1$ (4.6)

Διότι ο όγκος του ρευστού παραμένει αμετάβλητος. Έτσι από την 1.6 προκύπτει ότι

$W_1 = W_2$.

4.4 Μέτρηση της πίεσης.

Την πίεση την μετράμε με ειδικά όργανα τα πιεσόμετρα ή μανόμετρα. Όταν η πίεση είναι η ατμοσφαιρική τότε το όργανο μέτρησης λέγεται βαρόμετρο.



Σχήμα 4.3

Στο σχήμα 4.3.α το δοχείο περιέχει Hg και ο λεπτός ανεστραμμένος σωλήνας Hg και αυτός . Θεωρούμε ότι κατά προσέγγιση το επάνω μέρος του κλειστού ανεστραμμένου σωλήνα είναι κενό. Τότε θα ισχύει για την πίεση στα σημεία Α και Β

$P_A=P_B$ (4.7)

διότι το υγρό στο δοχείο βρίσκεται σε ισορροπία.

Ισχύει

$P_A = P+\rho gh = \rho gh$ (4.8)

Από 4.7 και 4.8 προκύπτει ότι

$P_B=P_0=\rho gh$ (4.9)

Όπου ρ η πυκνότητα του Hg. Από την 4.9 προκύπτει ότι το ύψος που ανέρχεται η στήλη του Hg λόγω της ατμοσφαιρικής πίεσης στο σημείο Β είναι

h=0.760m=760mm.

Στο σχήμα 4.3.b φαίνεται η λειτουργία ενός μανόμετρου. Επειδή το υγρό στον σωλήνα βρίσκεται σε ισορροπία θα ισχύει

$P_A=P_B$ (4.10)

Η άγνωστη πίεση Ρ στο σημείο Α θα είναι

$P=P_A =P_B=P_0+\rho gh$ (4.11)

Όπου P_0 είναι η ατμοσφαιρική πίεση.

Η πίεση Ρ ονομάζεται **απόλυτη πίεση**

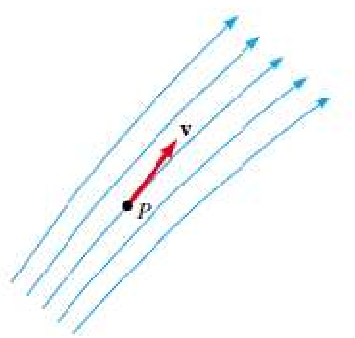
Ενώ η διαφορά

$\Delta P = P - P_0$ (4.12)

σχετική πίεση. Για παράδειγμα η πίεση που μετράμε στα ελαστικά είναι η σχετική πίεση.

4.5 Δυναμική των ρευστών

Όταν τα ρευστά βρίσκονται σε κίνηση, δηλαδή ρέουν, η ροή τους διακρίνεται σε δύο τύπους την ομαλή ή στρωτή (Σχήμα 4.4) και την τυρβώδη .



Σχήμα 4.4

Στην ομαλή ροή οι ρευματικές γραμμές δηλαδή οι τροχιές που ακολουθούν τα σωματίδια του ρευστού δεν τέμνονται.. Επίσης η ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού που διέρχονται από μία διατομή παραμένει σταθερή. Αντίθετα στην τυρβώδη ροή οι τροχιές τέμνονται και σχηματίζονται μικρές δίνες σε όλη την έκταση της ρευματικής γραμμής (Σχήμα 4.5). Η ροή από κανονική μετατρέπεται σε τυρβώδη μετά από μια χαρακτηριστική κρίσιμη ταχύτητα του ρευστού.

Σχήμα 4.5

Τα ρευστά κατά την κινησή τους εμφανίζουν τριβή ανάμεσα στα γειτονικά στρώματα του ρεστού που ολισθαίνουν μεταξύ τους. Αυτή η εσωτερική τριβή ανάμεσα στα στρώματα του ρευστού χαρακτηρίζεται με το μέγεθος ιξώδες το οποίο μας δείχνει τον βαθμό της εσωτερική αυτής τριβής εάν είναι μεγάλη η μικρή. Η εσωτερική τριβή ανάμεσα στα στρώματα του ρευστού μετατρέπει μέρος της κινητικής ενέργειας του ρευστού λόγω του ιξώδους σε εσωτερική ενέργεια.

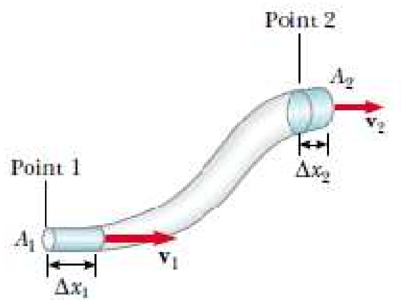
Επειδή η κίνηση των πραγματικών ρευστών είναι πολύπλοκη η μελέτη τους απλοποιείται με τις ακόλουθες παραδοχές που περιγράφουν ένα ιδανικό ρευστό.

1. Η ροή είναι χωρίς τριβές
2. Η ροή είναι στρωτή
3. Το ρευστό είναι ασυμπίεστο
4. Η ροή είναι αστρόβιλη

Η ταχύτητα ενός σωματιδίου P στο ρευστό είναι πάντα κάθετη στην ρευματική γραμμή (Σχήμα 4.4). Μία δέσμη ρευματικών γραμμών όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4

σχηματίζουν ένα σωλήνα ροής. Στην στρωτή ροή οι ρευματικές γραμμές δεν τέμνονται και είναι περιορισμένες εντός των ορίων του σωλήνα ροής.

Θεωρούμε ένα ρευστό που ρέει σε ένα σωλήνα όπως στο σχήμα 4.6.



Σχήμα 4.6

Η μάζα του ρευστού στο σημείο -1 του σωλήνα είναι

$m_1=\rho V_1=\rho A_1\Delta x_1=\rho A_1 v_1\Delta t$ (4.13)

ομοίως η μάζα του ρευστού στο σημείο -2

$m_2=\rho V_2=\rho A_2\Delta x_2=\rho A_2 v_2\Delta t$ (4.14)

Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο και η ροή είναι στρωτή, η μάζα του ρευστού στο σημείο 1 θα είναι ίση με τη μάζα στο σημείο – 2

Έτσι

$m_1=m_2$ (4.15)

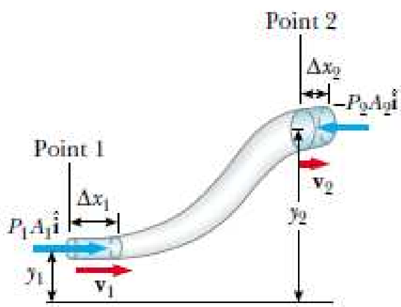
και η (4.14) γίνεται

$\mathbf{A_1 v_1=A_2 v_2=}$ **constant** (4.16)

Η (4.16) είναι η **εξίσωση συνεχείας** για τα ρευστά

4.5 Εξίσωση του Bernoulli

Η σχέση ανάμεσα στην πίεση P την ταχύτητα v και το ύψος y που βρίσκεται ένα ρευστό (Σχήμα 4.7) περιγράφεται από την εξίσωση του Bernoulli



Σχήμα 4.7

$P+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g y=constant$ (4.17)

Η σχέση (4.17) δείχνει ότι η πίεση ενός ρευστού ελαττώνεται όσο αυξάνει η ταχύτητα του. Επίσης η πίεση ενός ρευστού ελαττώνεται όσο αυξάνει το ύψος στο οποίο βρίσκεται το ρευστό. Αυτό εξηγεί γιατί η πίεση είναι χαμηλή στους υψηλούς ορόφους των κτηρίων.

Εάν το ρευστό είναι σε ισορροπία τότε

v=0 και η (4.1 7) γίνεται

$P+\rho g y=constant$ (4.18)

Για τα δύο σημεία θα έχω

$P_1+\rho g y_1=P_2+\rho g y_2 \dashrightarrow (P_1-P_2)=\rho g(y_2-y_1) \rightarrow \Delta P=\rho g h$ (4.19)

Σε συμφωνία με την (4.11)

Όπου $h=y_2-y_1$ (4.20)

2