Θέμα 1ο
Λύση

α) $F(x) = \frac{dV(x)}{dx}$ η σχέση που συνδέει την δύναμη με τη δυναμική ενέργεια.

Άρα $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-2x^2-2x^3+7x^4\right) \Rightarrow F(x) = +4x+6x^2-28x^3$

β) Η ολική μηχανική ενέργεια είναι ίση με $E_M = 0,4J$, η $E_M = E_A + E_K$ για κάθε x άρα στη θέση Α όπου η $E=0,8J$ το σώμα δεν θα βρεθεί ποτέ γιατί $E_A > E_M$ με αποτέλεσμα να μην μπορεί να φτάσει γιατί δεν έχει την απαιτούμενη ενέργεια.

γ) Στις θέσεις Β, Γ έχουμε μέγιστες και ελάχιστες τιμές της $V(x)$ πιο συγκεκριμένα:

$$\frac{dV(x)}{dx}=0 \Rightarrow -4x-6x^2+28x^3=0 \Rightarrow 2x\left(-2-3x+14x^2\right)=0$$

μηδενίζεται για $x_1=0$ και για $-2-3x+14x^2=0$ → $x_2=0,5$, $x_3=-0,29$

άρα $x_1=0$, $x_2=0,5m$, $x_3=-0,29m$

Για να διερευνήσουμε τις ρίζες θα πρέπει να υπολογ. την 2 παράγωγο του $V(x)$ και να βρούμε τις τιμές της για τις ρίζες. Άρα

$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -4-12x+84x^2$ άρα για $x_1=0$ $\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -4 < 0$ μέγιστο η $V(x)$

για $x_2=0,5$, $\frac{d^2V(x)}{dx^2} = 11 > 0$ η $V(x)$ ελάχιστο.

για $x_3=-0,29$, $\frac{d^2V(x)}{dx^2} = 6,54 > 0$ άρα η $V(x)$ ελάχιστο

Επομένως για $x_1=0$ (Β) η $V(x)$ είναι μέγιστη και είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας. Για $x_2=0,5$ (Γ) η $V(x)$ έχει ελάχιστη τιμή άρα είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας το ίδιο ισχύει και για $x_3=-0,29$

δ) Ένα σώμα από τη θέση Δ θα κινηθεί προς αριστερά προς τη θέση Γ (ευσταθ. ισορ) και θα συνεχίσει μέσω Β (x_1) προς το x_3 και

Θέμα 1ο

θα φτάσει στη θέση στην αριστερή πλευρά με $E_{\Delta}' = 0{,}2J = E_{\Delta}$

ε) Η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση Δ είναι

$$E_{max} = E_K + \cancel{U(x)} \Rightarrow E_K = E_{max} - E_{\Delta} \Rightarrow E_K = 0{,}2J$$

ενώ την μέγιστη τιμή της την λαμβάνει για $x_2 = 0{,}5$ όπου $V(x_2)_{min} = -0{,}2J$

άρα $E_{max} = E_K + V(x) \Rightarrow E_{K_{max}} = E_{max} - V(x)_{min} = 0{,}4J - (-0{,}2J) \Rightarrow$

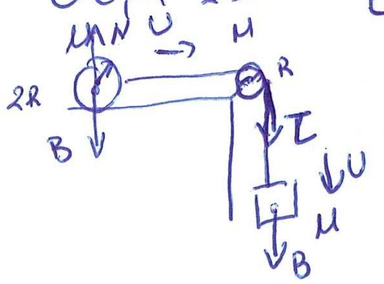
$E_{K_{max}} = 0{,}6J$

$$a_\ell = \frac{Mg R^2}{I} = \frac{Mg R^2}{M \cdot R^2 + M \cdot R^2 + MR^2} \Rightarrow \boxed{a_\ell = \frac{g}{3}}$$

$$\Sigma\tau = I a_\gamma = I \cdot \frac{a_\ell}{R} \Rightarrow Mg R = \frac{I a_\ell}{R} \Rightarrow$$

Θέμα 2ο

Λύση



Όλο το σύστημα περιστρέφεται γύρω από άξονα που συμπίπτει με τον άξονα της τροχαλίας. Από την στιγμή που κυλίεται ο κύλινδρος στην επιφάνεια του τραπεζιού κινείται με την ίδια ταχύτητα (V) που κινείται και ο κύβος.

Το βάρος B του κυλίνδρου εξουδετερώνεται από την κάθετη αντίδραση N άρα μόνο το βάρος του κύβου δημιουργεί ροπή $\tau = Mg \cdot R$ όπου R η ακτίνα της τροχαλίας και είναι η συνολική ροπή. Γνωρίζουμε ότι:

$$\Sigma \vec{\tau}_{ex} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (1)$$ όπου L η στροφορμή του συστήματος

Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε την L έτσι

- Στροφορμή κυλίνδρου $L_{K_1} = M \cdot U \cdot R$ όπου M μάζα, R ακτίνα η ακτίνα περιστ. της τροχαλίας, U η ταχύτητα κυλίνδρου - κύβου
- Στροφορμή κύβου $L_{K_2} = MUR$
- Στροφορμή τροχαλίας $L_T = I_T \frac{U}{R}$ όπου I_T η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I_T = M \cdot R^2$ άρα $L_T = M \cdot R^{\cancel{2}} \cdot \frac{U}{\cancel{R}}$

Άρα $L_{tot} = L_{K_1} + L_{K_2} + L_T = MUR + MUR + MUR \Rightarrow$

$\Rightarrow L_{tot} = 3MUR$ (2)

Θέμα 2ο

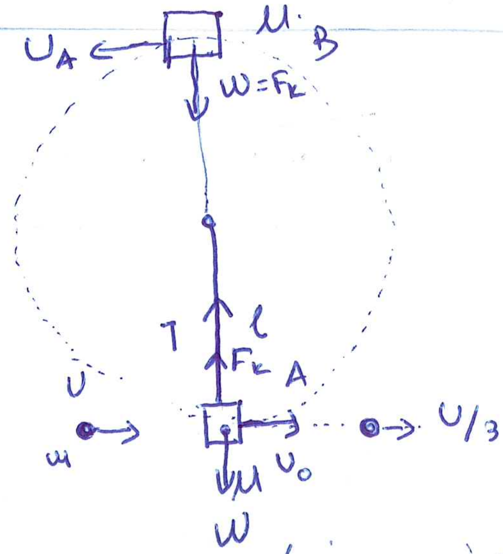
Συνέχεια

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\Sigma \tau_{ex} = \frac{dL}{dt} \Rightarrow MgR = \frac{d}{dt}(3MUR) \Rightarrow Mg\cancel{R} = 3M\frac{du}{dt}\cdot\cancel{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = g/3$$

Θέμα 4ο Λύση



Α.Δ.Ο. κατά την κρούση του συσσωμάτος

$$P_{αρχ} = P_{τελ} \Rightarrow$$

$$m\cdot U = MU_0 + m\cdot U/3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_0 = \frac{2mU}{3M} \quad (1)$$

Για ανακύκλωση οριακή συνθήκη για να συμβεί ανακύκλωση είναι στην ανώτερη θέση να έχει μηδενιστεί η τάση του νήματος και το βάρος Β να είναι ίσο με την Fκ κεντρομόλο δύναμη.

Δηλαδή, γενικά έχουμε:

$T - W = F_K$ και στην κατακόρυφη θέση.

$$W = F_K \Rightarrow Mg = \frac{MU_A^2}{l} \Rightarrow U_A^2 = g\cdot l \quad (3)$$

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας στις θέσεις ισορροπίας (ηρεμίας) και κατακόρυφη έχουμε:

$$\overset{E_{KA}}{\frac{1}{2}MU_0^2} = \overset{E_{KB}}{\frac{1}{2}MU_A^2} + \overset{E_{\Delta B}}{Mg(2l)} \quad (2)$$

Από (1) και (2)+(3) έχουμε

$$\frac{1}{2}\cancel{M}U_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{M}U_A^2 + 2\cancel{M}gl \Rightarrow U_0^2 = U_A^2 + 4gl \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4m^2U^2}{9M^2} = gl + 4gl \Rightarrow \frac{4m^2U^2}{9M^2} = 5gl \Rightarrow U^2 = \frac{9M^2}{4m^2}\cdot 5gl \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{3M}{2m}\cdot\sqrt{5gl}}$$