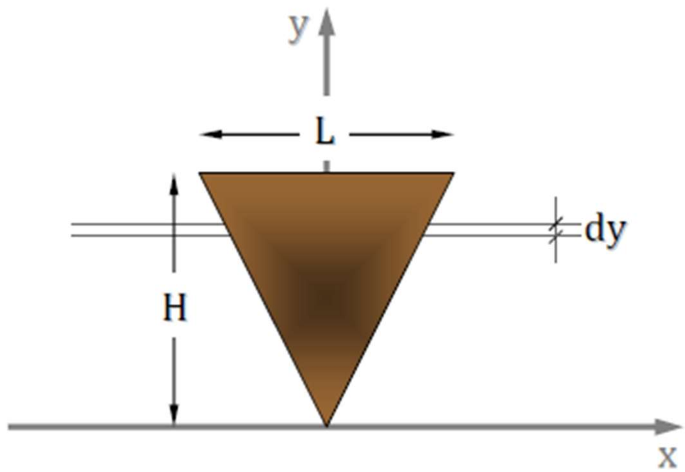
Κέντρο μάζας και Γραμμική Ορμή

Άσκηση 1. Να αποδειχθεί πως το κέντρο μάζας ομογενούς πλάκας σχήματος ισοσκελούς τριγώνου ύψους H βρίσκεται επί του ύψους και σε απόσταση 2/3H από την κορυφή.



Λύση

Τοποθετώντας το ισοσκελές τρίγωνο όπως στο σχήμα, είναι προφανές πως $x_{CM} = 0$. Άρα αναζητείται το κέντρο βάρους στον άξονα συμμετρίας y_{CM}. Για στοιχειώδες μήκος dy πρέπει λοιπόν να εκφράσουμε τον στοιχειώδη όγκο dV σαν συνάρτηση του y. Υποθέτοντας ότι το πάχος της πλάκας (κατεύθυνση z) είναι h έχουμε:

$$dV = h \cdot 2x \cdot dy = h \cdot (\frac{y}{H}L) \cdot dy$$

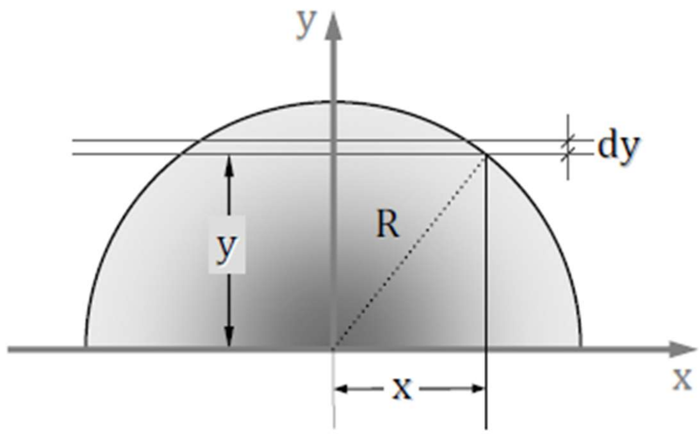
Κατά συνέπεια, για σταθερή πυκνότητα ρ_0 ισχύει:

$$dm = \rho_0 dV = \rho_0 h(\frac{y}{H}L)dy = \frac{\rho_0 h L}{H} y dy$$

οπότε η y-συντεταγμένη του κέντρου μάζας θα δίνεται από τη σχέση:

$$y_{CM} = \frac{\int_0^H y dm}{\int_0^H dm} = \frac{\int_0^H y \frac{\rho_0 h L}{H} y dy}{\int_0^H \frac{\rho_0 h L}{H} y dy} = \frac{\int_0^H y^2 dy}{\int_0^H y dy} = \frac{H^3/3}{H^2/2} = \frac{2}{3}H \Longrightarrow \boxed{y_{CM} = \frac{2}{3}H}$$

Άσκηση 2. Να βρεθεί το κέντρο μάζας ομογενούς πλάκας ημικυκλικού σχήματος ακτίνας R.



Λύση

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, ο άξονας συμμετρίας είναι ο άξονας y με $x_{CM} = 0$. Για δοσμένο y επιλέγεται στοιχειώδες dy και γίνεται προσπάθεια να εκφραστεί το αντίστοιχο μήκος x συναρτήσει του y. Από τη γεωμετρία του σχήματος συνάγεται:

$$x = \sqrt{R^2 - y^2}$$

οπότε

$$dm = \rho_0 dV = \rho_0 \cdot (h \cdot 2x) \cdot dy = \rho_0 \cdot (h \cdot 2\sqrt{R^2 - y^2}) \cdot dy = 2\rho_0 \cdot h \cdot \sqrt{R^2 - y^2} \cdot dy$$

Προφανώς τα όρια ολοκλήρωσης της ανεξάρτητης μεταβλητής y κυμαίνονται από 0 έως R:

$$y_{CM} = \frac{\int\limits_0^R y\, dm}{\int\limits_M dm} = \frac{\int\limits_0^R y \cdot (2\rho_0 \cdot h)\sqrt{R^2 - y^2} \cdot dy}{M} = \frac{2\rho_0 \cdot h \int\limits_0^R y\sqrt{R^2 - y^2}\, dy}{\rho_0 \cdot h \cdot \pi R^2/2}$$

$$\Longrightarrow y_{CM} = \frac{4\int\limits_0^R y\sqrt{R^2 - y^2}\, dy}{\pi R^2}$$

Το ολοκλήρωμα του αριθμητή υπολογίζεται με αλλαγή μεταβλητής $u^2 = R^2 - y^2$, οπότε $2udu = -2ydy$:

$$y_{CM} = \frac{4\int_R^0 -u \cdot u \, du}{\pi R^2} = \frac{4\int_0^R u^2 \, du}{\pi R^2} = \frac{4R^3/3}{\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\boxed{y_{CM} = \frac{4R}{3\pi}}$$

Άσκηση 9.35 HR

Ποδοσφαιριστής κλοτσά μια μπάλα ποδοσφαίρου μάζας 0.45 kg που ηρεμεί αρχικά. Το πόδι του ποδοσφαιριστή βρίσκεται σε επαφή με τη μπάλα για 3×10^{-3} s και η δύναμη της κλοτσιάς δίνεται από τη σχέση

$$F(t) = [(6 \times 10^6)t - (2 \times 10^9)t^2]N$$

Για $0 \leq t \leq 3 \times 10^{-3} s$, όπου το t είναι σε δευτερόλεπτα. Υπολογίστε τα μέτρα της α) ώθησης που δέχεται η μπάλα εξαιτίας της κλοτσιάς, β) της μέσης δύναμης που ασκεί στη μπάλα το πόδι του παίκτη κατά τη διάρκεια της επαφής του με τη μπάλα, γ) της μέγιστης δύναμης που ασκεί στη μπάλα το πόδι του παίκτη κατά τη διάρκεια της επαφής του με τη μπάλα και δ) της ταχύτητας της μπάλας αμέσως μετά την απώλεια επαφής της με το πόδι του παίκτη.

Άσκηση 9.91 HR

Ένα αεροβόλο όπλο εκτοξεύει 10 σφαιρίδια μάζας 2g το καθένα ανά δευτερόλεπτο με ταχύτητα μέτρου 500 m/s. Τα σφαιρίδια προσπίπτουν και ακινητοποιούνται σε ακλόνητο τοίχο. Να υπολογισθεί α) το μέτρο της ορμής κάθε βλήματος, β) η κινητική ενέργεια του κάθε βλήματος και γ) το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκείται στον τοίχο από τη δέσμη των βλημάτων που προσπίπτουν πάνω του. δ) Αν κάθε βλήμα βρίσκεται σε επαφή με τον τοίχο για 0.6 ms, να βρεθεί το μέτρο της μέσης δύναμης που δέχεται ο τοίχος σε κάθε κρούση κατά τη διάρκεια της επαφής του βλήματος με τον τοίχο. ε) Γιατί αυτή η δύναμη είναι τόσο διαφορετική από τη μέση δύναμη που υπολογίστηκε στο γ);

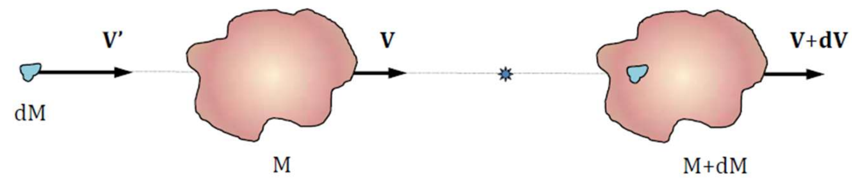
Άσκηση 9.92 HR

Ένα σώμα κινείται με 2 m/s κατά μήκος της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x. Πάνω στο σώμα δεν δρα εξωτερική δύναμη. Μια εσωτερική έκρηξη διαχωρίζει το σώμα σε δύο τμήματα, που το καθένα έχει μάζα 4 kg. Μετά τη διάσπαση του σώματος η ολική κινητική ενέργεια των θραυσμάτων αυξήθηκε κατά 16 J. Το μπροστινό τμήμα συνεχίζει να κινείται στην αρχική κατεύθυνση της κίνησης. Να βρεθούν τα μέτρα των ταχυτήτων α) του πίσω τμήματος και β) του μπροστινού τμήματος μετά την έκρηξη.

Άσκηση 3:Τρία σώματα με μάζες 5, 2, και 3 kg αποτελούν απομονωμένο σύστημα και βρίσκονται στις θέσεις (0,0), (1.5, 2) και (3, 2) αντίστοιχα. Αν οι μάζες κινούνται υπό την επίδραση εσωτερικών δυνάμεων και στο σημείο (4, 3) συγκρούονται οι μάζες 2 και 3 kg, που βρίσκεται εκείνη τη στιγμή η μάζα των 5 kg;

Άσκηση 4: Ένα βλήμα με μάζα 5m βάλλεται με αρχική ταχύτητα v_0 και γωνία κλίσης θ. Ύστερα από χρόνο t_0 το βλήμα θραύεται με έκρηξη σε τρία τμήματα με μάζες m, m και 3m. Τα δύο τμήματα με τις ίσες μάζες, αμέσως μετά την έκρηξη, αποκτούν ως προς το κέντρο μάζας του βλήματος οριζόντια ταχύτητα $v\hat{x}$ το ένα και κατακόρυφη ταχύτητα $v\hat{y}$ το άλλο. Να βρεθεί η θέση των τριών τμημάτων ύστερα από χρόνο t από τη στιγμή της έκρηξης. Εφαρμογή : $v_0 = 40$ m/s, θ=30°, t_0=1s, $t_1 = 0.5$s, v = 12 m/s, g = 10 m/s^2.

Άσκηση 5: Στοιχειώδης μάζα dM κινούμενη με ταχύτητα $\vec{V'}$ συσσωματώνεται με μάζα M κινούμενη με ταχύτητα $\vec{V}$. Να διατυπωθεί η εξίσωσή που περιγράφει τη χρονική μεταβολή της ορμής $d\vec{p}/dt$ του συστήματος.



Λύση

Παρατίθεται ο συλλογισμός για τον υπολογισμό της μεταβολής της ορμής $d\vec{p}$ του συστήματος:

- Αρχική Ορμή Συστήματος: $\vec{V}'dM + M\vec{V}$
- Τελική Ορμή Συστήματος: $(M + dM)(\vec{V} + d\vec{V}) = M\vec{V} + \vec{V}dM + Md\vec{V}$

Ο όρος $dMd\vec{V}$ (γινόμενο δύο διαφορικών) παραλείπεται ως αμελητέος. Κατά συνέπεια, η συνολική μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι:

$$d\vec{p} = \{M\vec{V} + \vec{V}dM + Md\vec{V}\} - \{\vec{V}'dM + M\vec{V}\} = Md\vec{V} + (\vec{V} - \vec{V}')dM$$

$$\Longrightarrow d\vec{p} = Md\vec{V} - (\vec{V}' - \vec{V})dM = Md\vec{V} - \vec{V}_{rel}dM$$

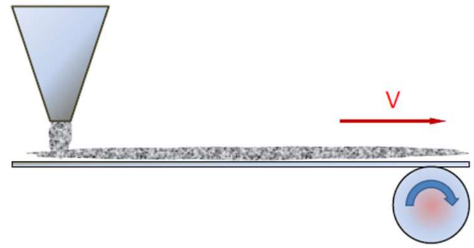
$$\Longrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = M\frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt}$$

όπου $\vec{V}_{rel}$ είναι η σχετική ταχύτητα της στοιχειώδους μάζας dM ως προς τη μάζα M.

Λαμβάνοντας δε υπόψη ότι ο λόγος $d\vec{p}/dt$ εκφράζει στην γενική περίπτωση την εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{ext}$ που επιδρά στο σύστημα, τότε η παραπάνω εξίσωση κίνησης λαμβάνει την τελική μορφή:

$$\boxed{\vec{F}_{ext} + \vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt} = M\frac{d\vec{V}}{dt}}$$

Άσκηση 6: Κινούμενος ιμάντας μεταφέρει άμμο η οποία ρίπτεται κατακόρυφα από τροφοδότη με ρυθμό dM/dt. Να υπολογισθεί η απαιτούμενη δύναμη που πρέπει να δράσει στον ιμάντα ώστε να διατηρηθεί σταθερή η ταχύτητα λόγω του πρόσθετου φορτίου.



Λύση

Προφανώς στην περίπτωση αυτή είναι $\frac{dM}{dt} > 0$ και $\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$ δεδομένου ότι ο ιμάντας κρατάει σταθερή την ταχύτητά του. Εφαρμόζοντας την εξίσωση:

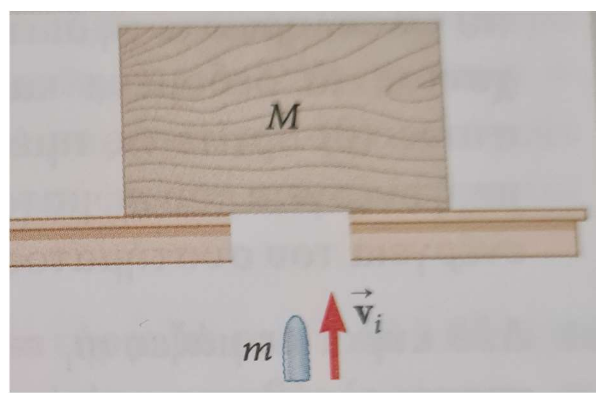
$$\vec{F}_{ext} + \vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt} = M\frac{d\vec{V}}{dt}$$

και υποθέτοντας θετική φορά προς τα δεξιά, έχουμε:

$$F \ + \ (0 - V)\frac{dM}{dt} \ = \ 0 \implies \boxed{F \ = \ V\frac{dM}{dt}}$$

M9.57 Serway

Ένα ξύλινο σώμα μάζας 1.25kg βρίσκεται ακίνητο σε ένα τραπέζι, επάνω από μια μεγάλη τρύπα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μία σφαίρα μάζας 5gr με αρχική ταχύτητα v_i εκτοξεύεται προς τα πάνω, προς τη βάση του σώματος, και μετά την κρούση ενσωματώνεται σε αυτό. Το σώμα και η σφαίρα φτάνουν σε μέγιστο ύψος 22cm. α) Περιγράψτε πως θα βρείτε την αρχική ταχύτητα της σφαίρας. Β) Υπολογίστε την αρχική ταχύτητα της σφαίρας από τα δεδομένα.



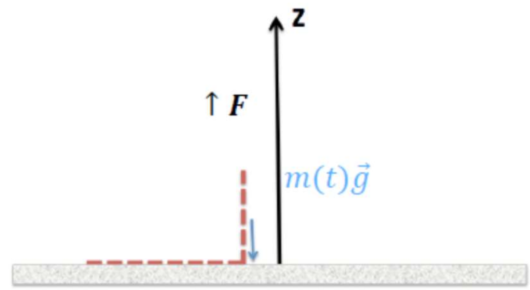
Άσκηση 7: Θεωρήστε ομογενή αλυσίδα μήκους L και μάζας M_0 στον οριζόντιο άξονα X μεταξύ των σημείων $x = 0$ και $x = L$. Ένας κινούμενος γερανός πιάνει τη χρονική στιγμή $t = 0$ το άκρο της αλυσίδας που είναι στο $x = L$ και αρχίζει να ανυψώνει την αλυσίδα με σταθερή ταχύτητα $v_0>0$, έτσι ώστε το ανυψωμένο κομμάτι της αλυσίδας να είναι πάντοτε κατακόρυφο. Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί ο γερανός ως συνάρτηση του χρόνου, μέχρι να ανυψωθεί πλήρως η αλυσίδα.

Λύση

Έστω λ η γραμμική πυκνότητα μάζας της αλυσίδας μάζας M_0 και μήκους L, οπότε:

$$M_0 = \lambda L \quad (1)$$

Επιπλέον, έστω $z(t)$ το μήκος της αλυσίδας το οποίο είναι ανυψωμένο κάθε χρονική στιγμή πάνω από το έδαφος, το οποίο θα έχει μάζα:



$$m(t) = \lambda z(t) \overset{(1)}{\Rightarrow} m(t) = \frac{M_0}{L} z(t) \quad (2)$$

Προφανώς, αρχικά η αλυσίδα βρισκόταν πάνω στο έδαφος, $z(t = 0) = 0$, και η ταχύτητα με την οποία ανυψώνεται είναι σταθερή $v\,(t) = v_0 > 0$ θα ισχύει ότι:

$$z\,(t) = v_0 * t \quad (3)$$

Άρα

$$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} m(t) = \frac{M_0}{L} v_o t \quad (4)$$

Η δύναμη που ασκεί ο γερανός κάθε χρονική στιγμή προς τα πάνω θα είναι ίση με το άθροισμα της δύναμης που απαιτείται για να αντισταθμίσει τη δύναμη της βαρύτητας του τμήματος της αλυσίδας που βρίσκεται πάνω από το έδαφος, δηλαδή $F_1 = m\,(t) * g$, καθώς και της δύναμης που απαιτείται να συνεχίσει να προσδίδει σταθερή ταχύτητα v_0 σε όλο το τμήμα της αλυσίδας που βρίσκεται ανυψωμένο. Η τελευταία, σύμφωνα με την εφαρμογή του 2ου Νόμου του Νεύτωνα σε συστήματα μεταβλητής μάζας, είναι ίση με

$$F_2 = m(t)\frac{dv(t)}{dt} + (v(t) - v_c)\frac{dm(t)}{dt}$$

όπου $v(t) - v_c$ η σχετική ταχύτητα της μάζας του κρίκου που προστίθεται στην αλυσίδα. Προφανώς η αρχική ταχύτητα του κάθε κρίκου της αλυσίδας που βρισκόταν στο έδαφος $v_c = 0$ αφού αυτός ήταν ακίνητος πριν τον σηκώσει ο γερανός, $v(t)$ η ταχύτητα της αλυσίδας που σηκώνει ο γερανός κάθε χρονική στιγμή και η οποία σύμφωνα με την εκφώνηση είναι σταθερή:

$$v(t) = v_o > 0 \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = 0$$

Με βάση τα παραπάνω η συνολική δύναμη θα είναι:

$$F = F_1 + F_2 = m(t)g + \left[m(t) * 0 + (v_o - 0) * \frac{d\big(m(t)\big)}{dt}\right] \overset{(4)}{\Rightarrow} F$$
$$= \left(\frac{M_0}{L} * v_o t\right) * g + v_0 * \left(\frac{M_0}{L} * v_o\right) \Rightarrow F = \frac{M_0}{L} * v_o * (gt + v_o)$$

Προφανώς ο παραπάνω τύπος θα ισχύει από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως ότου ανυψωθεί πλήρως η αλυσίδα, δηλαδή όταν $z(t) = L \Rightarrow v_0 t = L \Rightarrow \boldsymbol{t} = \boldsymbol{L}/\, v_0$

Στη συνέχεια η δύναμη θα είναι σταθερή και ίση με το βάρος $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M_0 g}$ γιατί πλέον η αλυσίδα θα έχει σταθερή μάζα και δε θα επιταχύνεται.