Θέμα 4. Οι εξισώσεις κίνησης σωματιδίου στο επίπεδο περιγράφονται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = 2t^2 + 3$ και $y(t) = 3t^2 + 1$ στους αντίστοιχους άξονες. Να βρεθούν τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης καθώς και η εξίσωση τροχιάς του κινητού αυτού

Λύση

Είναι προφανές πως τα x και y έχουν γραμμική εξάρτηση μεταξύ τους, όπως φαίνεται από την απαλοιφή του χρόνου:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 2t^2 + 3 \\ y(t) = 3t^2 + 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x(t) = 6t^2 + 9 \\ 2y(t) = 6t^2 + 2 \end{array} \right\} \Longrightarrow 3x - 2y = 7 \Longrightarrow \boxed{y = 3/2x - 7/2}$$

Η τροχιά του κινητού είναι συνεπώς μια ευθεία με κλίση $k = 3/2$. Τα διανύσματα της ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι αντίστοιχα:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(2t^2+3)\hat{i} + (3t^2+1)\hat{j}\right] = 4t\hat{i} + 6t\hat{j}$$

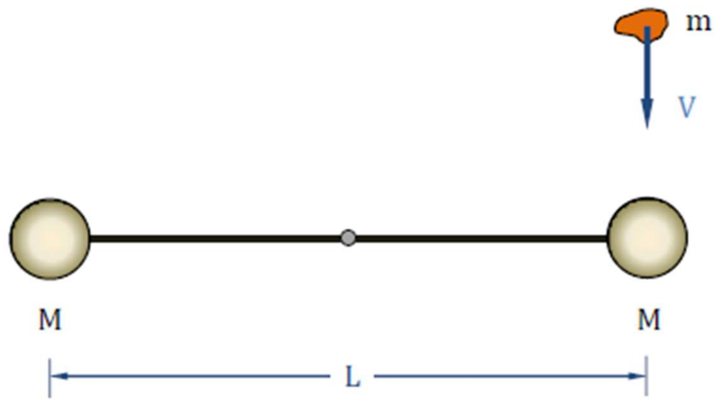
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4t\hat{i} + 6t\hat{j}\right) = 4\hat{i} + 6\hat{j}$$

Θέμα 5. Στόκος μάζας ***m*** κινούμενος με ταχύτητα ***V*** προσκολλάται σε μια από τος μπάλες ενός αλτήρα, ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές κατακόρυφα, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσον της αβαρούς ράβδου που συνδέει τις δύο μπάλες. Εάν η μάζα κάθε μπάλας είναι ***M*** το μήκος της ράβδου ***L*** να υπολογισθούν: α) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ***ω*** αμέσως μετά την προσκόλληση του στόκου στην μπάλα. β) Τον λόγο ***η*** των κινητικών ενεργειών πριν και μετά την πρόσκρουση. γ) Τη συνολική γωνία περιστροφής του αλτήρα μετά την προσκόλληση.

Λύση

Ερώτημα (α)

Είναι προφανές ότι ο αλτήρας πριν την πρόσκρουση του στόκου βρίσκεται σε ισορροπία οριζοντιωμένος. Με βάση την αρχή διατήρησης της στροφορμής του συστήματος έχουμε:



$$mV\frac{L}{2} = \left[m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 2M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\omega$$

απ' όπου μπορεί να υπολογιστεί το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω:

$$\omega = \frac{mV}{(2M+m)(L/2)} \Longrightarrow \boxed{\omega = \frac{2mV}{(2M+m)L}}$$

Ερώτημα (β)

Ο λόγος των κινητικών ενεργειών, μετά και πριν την πρόσκρουση, είναι:

$$\frac{k_f}{k_i} = \frac{1/2 I\omega^2}{1/2 mV^2} = \frac{I}{m}\left(\frac{\omega}{V}\right)^2 = \frac{(2M+m)(L/2)^2}{m}\left(\frac{\omega}{V}\right)^2 = \left(\frac{2M}{m}+1\right)\left(\frac{L\omega}{2V}\right)^2$$

και κάνοντας χρήση του προηγούμενου αποτελέσματος

$$\frac{k_f}{k_i} = \left(\frac{2M}{m}+1\right)\left(\frac{m}{2M+m}\right)^2 \Longrightarrow \boxed{\eta = \frac{k_f}{k_i} = \frac{m}{2M+m}}$$

Ερώτημα (γ)

Αμέσως μετά την προσκόλληση, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν τριβές, θα έχουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας. Δηλαδή θα ισχύει:

$$E_i = E_f \Longrightarrow k_i + U_i = k_f + U_f \Longrightarrow k_i = U_f$$

$$\Longrightarrow \eta \frac{1}{2} m V^2 = \Big[Mg - (M+m)g \Big] \frac{L}{2} sin\theta \Longrightarrow sin\theta = -\eta \frac{V^2}{gL}$$

$$\boxed{sin\theta = -\tfrac{m}{2M+m}\,\tfrac{V^2}{gL}}$$

Είναι προφανές πως το σύστημα θα ισορροπήσει αφού διαγράψει πρώτα τόξο 180^o όπως φαίνεται από το αρνητικό πρόσημο του αποτελέσματος.