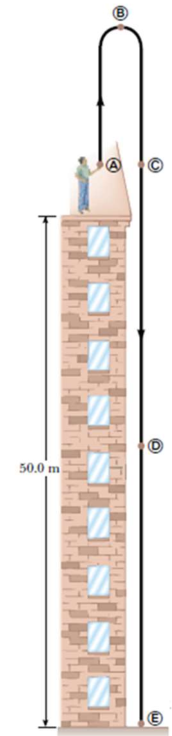
Γενική Φυσική Ι

Θέματα Σεπτεμβρίου 2022

Θέμα 3



Μία πέτρα πετιέται από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα v_0=20m/s προς τα πάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m και η πέτρα πέφτει προς τα κάτω χωρίς να χτυπήσει στην ταράτσα του κτηρίου (σχήμα). Αν θεωρήσουμε ως tA=0s τη στιγμή που η πέτρα φεύγει από το χέρι του ανθρώπου στη θέση A, υπολογίστε α) το χρόνο στον οποίο η πέτρα φτάνει στο μέγιστο ύψος (θέση B), β) το μέγιστο ύψος, γ) το χρόνο στον οποίο η πέτρα επιστρέφει στο αρχικό ύψος στη θέση A και δ) την ταχύτητα της πέτρας στο σημείο αυτό, ε) την ταχύτητα και τη θέση της πέτρας σε χρόνο t=5s, στ) τον συνολικό χρόνο μέχρι η πέτρα να φτάσει στο έδαφος.

Λύση

Θέμα 3ο Σεπτεμβρίου 2022.

$\upsilon_0 = 20\,m/s$, $H = 50\,m$ $t_A = 0$

Λύση

α) Από το Α → Β το μέγιστο ύψος η πέτρα από $\upsilon_A = 20\,m/s$ φτάνει σε τιμή $\upsilon_B = 0\,m/s$ άρα

$$\upsilon_A + (-g \cdot t_B) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_B = \frac{\upsilon_A}{g} \Rightarrow t_B = \frac{20\,m/s}{9{,}8\,m/s^2} \Rightarrow$$

$$t_B = 2{,}04\,s$$

β) Το μέγιστο ύψος είναι στο Β άρα·

$$y_B = \upsilon_A t + \left(-\frac{1}{2} g t^2\right) \Rightarrow$$

$$y_B = 20\,m/s \cdot 2{,}04\,s + \frac{1}{2}\left(-9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right) \cdot (2{,}04\,s)^2$$

$$\Rightarrow y_B = 20{,}4\,m$$

γ) Στην θέση Α θέσαμε $y = 0$ άρα από την θέση Β επιστρέφει στην θέση C με $y_C = 0$ άρα

από την εξίσωση του διαστήματος

έχουμε

$y_C = v_A t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \Rightarrow$

$0 = 20t - 4{,}905t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = t(20 - 4{,}905t)$ άρα

$t_1 = 0\,s$

$t_2 = 4{,}08\,s$ σωστή

δ) Η ταχύτητα στο C είναι

$v_C = v_A + (-g)t \Rightarrow$

$\Rightarrow v_C = 20\,m/s - 9{,}81\,m/s^2 \cdot 4{,}08\,s \Rightarrow$

$\Rightarrow v_C = -20\,m/s$ ίση και αντίθετη

της v_A

ε) Η ταχύτητα 5s μετά είναι

$v_D = v_A + (-g)\cdot t \Rightarrow$

$v_D = 20\,m/s + (-9{,}81\,m/s^2)\cdot 5\,s \Rightarrow$

$v_D = -29 m/s$

ενώ η θέση για $t = 5s$ είναι:

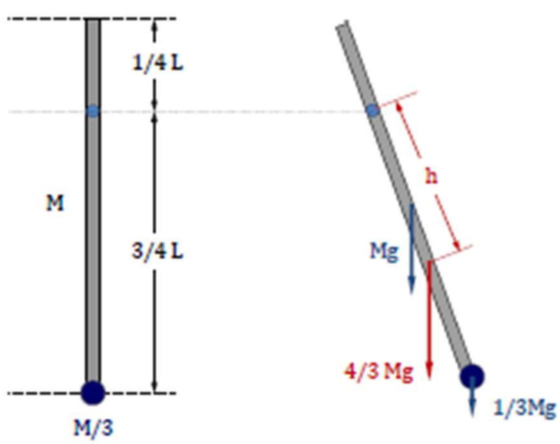
$y_D = v_A \cdot t + \frac{1}{2}(-g)\, t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_D = 20 m/s \cdot 5s + \frac{1}{2}(-9.8 m/s^2) \cdot 25 s^2$

$\Rightarrow y_D = -22,5 m.$

Θέμα 4

Δίνεται ομογενής λεπτή ράβδος, η οποία έχει μάζα M και μήκος L. A) Να υπολογίσετε αναλυτικά τη ροπή αδράνειας της ράβδου Ιο ως προς άξονα κάθετο σ' αυτήν που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου. B) Στο κάτω άκρο της ράβδου στερεώνεται μικρή σημειακή μάζα M/3. Το προκύπτον στερεό σώμα αναρτάται από το σημείο που απέχει ¼ του μήκους της ράβδου από το πάνω άκρο της, έχοντας τη δυνατότητα να περιστραφεί ελεύθερα και χωρίς τριβές γύρω από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο αυτό. Πόσο είναι η ροπή αδράνειας I του σώματος ως προς τον άξονα αυτό, ποια η εξίσωση κίνησης που προκύπτει; (Υπόδειξη υπολογίστε την Στ του συστήματος).



Λύση

Ερώτημα (α)

$I_{CM} = \frac{1}{12} M L^2$

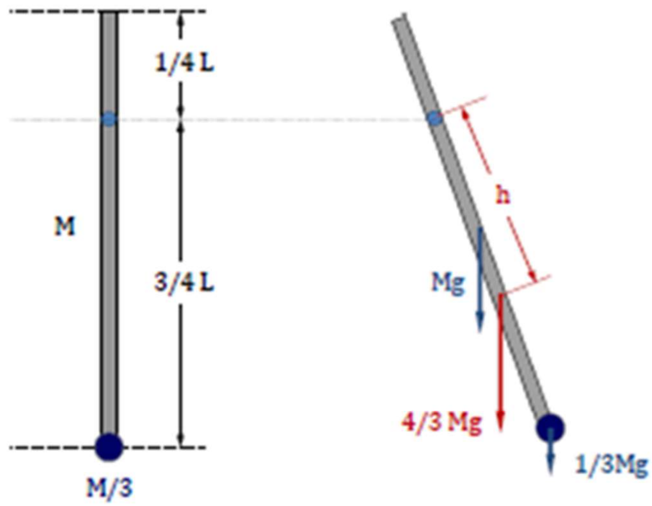
$$I = I_{CM} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \frac{M}{3}\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{9}{48}\right)ML^2$$

$$\boxed{I = \tfrac{1}{3}ML^2}$$

Όταν το σύστημα περιστραφεί κατά μικρή γωνία ϑ, τότε:

$$\sum \tau = I a_\Gamma$$

$$-mgh sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



όπου m η συνολική μάζα του συστήματος και h η απόσταση του κέντρου μάζας όλου του συστήματος από το κέντρο περιστροφής. Για μικρές γωνίες ϑ ισχύει:

$$-mgh\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \Longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\theta = 0$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την αρμονική κίνηση του στερεού σώματος.

Ερώτημα (γ)

Με βάση την παραπάνω διαφορική εξίσωση συνάγεται πως

$$\omega^2 = \frac{mgh}{I}\theta \quad , \quad m = M + \frac{M}{3} = \frac{4M}{3}$$

Η απόσταση h του κέντρου μάζας από τον άξονα περιστροφής υπολογίζεται ως εξής:

$$h = \frac{L}{4} + X_{CM} \quad , \quad MgX_{CM} = \frac{M}{3}g\left(\frac{L}{2} - X_{CM}\right) \Longrightarrow X_{CM} = \frac{1}{8}L \quad h = \frac{L}{4} + \frac{L}{8} = \frac{3L}{8}$$

Οπότε:

$$\omega^2 = \frac{(4/3M)g(3/8L)}{1/3ML^2} = \frac{3g}{2L} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}}$$