Θέμα 4

Σώμα κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση $a = 6\sqrt[3]{x}\,\frac{m}{s^2}$. Εάν γνωρίζουμε ότι για t=2s και x=27m, υπολογίστε τις εξισώσεις κίνησης του διαστήματος x, της ταχύτητας υ και της επιτάχυνσης α, συναρτήσει του χρόνου t. (**2 μονάδες**)

Λύση

Στην άσκηση αυτή η επιτάχυνση δίνεται σαν **συνάρτηση της απόστασης**, οπότε χρειάζεται προετοιμασία των διαφορικών πριν την ολοκλήρωση. Γνωρίζουμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} dv = a dt \\ v = dx/dt \end{array} \right\} \Longrightarrow v dv = a\frac{dx}{dt}dt \Longrightarrow v dv = a dx$$

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα η παραπάνω σχέση με ολοκλήρωση δίνει:

$$\int_{v_0}^{v} v dv = \int_{x_0}^{x} 6x^{1/3}dx \Longrightarrow \frac{v^2 - v_0^2}{2} = 6\frac{3}{4}(x^{4/3} - x_0^{4/3}) \Longrightarrow v^2 = 9x^{4/3} + (v_0^2 - 9x_0^{4/3})$$

$$\Longrightarrow v^2 = 9x^{4/3} + C$$

Η σταθερά C υπολογίζεται από τη συνθήκη $[x = 27, v = 27]$, η οποία δίνει

$$27^2 = 9 \cdot 27^{4/3} + C \Longrightarrow 3^6 = 3^2 \cdot 3^4 + C \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow \boxed{v = 3x^{2/3}}$$

Συνεχίζοντας την ολοκλήρωση παίρνουμε:

$$v = 3x^{2/3} \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = 3x^{2/3} \Longrightarrow \frac{dx}{3x^{2/3}} = dt \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = \int_{0}^{t} dt$$

$$\Longrightarrow x^{1/3} - x_0^{1/3} = t \Longrightarrow x^{1/3} = t + x_0^{1/3} \Longrightarrow x^{1/3} = t + C$$

Η σταθερά υπολογίζεται πάλι από τα δεδομένα $[t = 2, x = 27]$, οπότε

$$27^{1/3} = 2 + C \Longrightarrow C = 1 \Longrightarrow \boxed{x = (t+1)^3}$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το διάστημα σαν συνάρτηση του χρόνου. Οι ζητούμενες εκφράσεις της ταχύτητας και επιτάχυνσης μπορούν εύκολα πλέον να υπολογισθούν με επάλληλες παραγωγίσεις:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t+1)^3 \Longrightarrow \boxed{v(t) = 3(t+1)^2}$$

και αντίστοιχα

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}3(t+1)^2 \Longrightarrow \boxed{a(t) = 6(t+1)}$$

Θέμα 5

Δύο μάζες m1<m2 είναι ενωμένες μέσω ενός σκοινιού που περνάει από μία τροχαλία. Η τροχαλία και το σκοινί δεν έχουν μάζα. Η κάθε μάζα είναι τοποθετημένη πάνω σε διαφορετικό κεκλιμένο επίπεδο με γωνίες θ ως προς το έδαφος. Αρχικά οι μάζες βρίσκονται σε ηρεμία με τα δύο νήματα να έχουν το ίδιο μήκος L. Α) Ποιος είναι ο ελάχιστος στατικός συντελεστής τριβής μεταξύ των μαζών και των κεκλιμένων επιπέδων, ώστε το σύστημα να αρχίσει να κινείται; Β) Ποια είναι η επιτάχυνση α του συστήματος; Γ) Ποια είναι η τάση στο νήμα κατά τη διάρκεια της κίνησης; (**2 μονάδες**)

Λύση

1. Στην κάθε μάζα ασκείται το βάρος, η αντίδραση, η τάση και η τριβή. Έτσι κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου έχουμε για οριακή ισορροπία:

$$m_2 g \sin\theta - T - m_2 g \cos\theta\eta = 0$$

(θετική η προς τα κάτω φορά) και

$$-m_1 g \sin\theta + T - m_1 g \cos\theta\eta = 0$$

(θετική η προς τα πάνω φορά). Απαλείφωντας το T βρίσκουμε

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin\theta + \eta\cos\theta}{\sin\theta - \eta\cos\theta}$$

και λύνοντας ως προς η βρίσκουμε

$$\eta_0 = \tan\theta \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}.$$

2. Για $\eta < \eta_0$ το σύστημα επιταχύνεται

$$m_2 a = m_2 g \sin\theta - T - m_2 g \cos\theta\eta$$

$$m_1 a = -m_1 g \sin\theta + T - m_1 g \cos\theta\eta$$

και προσθέτωντας τις δύο σχέσεις:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1) g \sin\theta - (m_1 + m_2) g\eta \cos\theta \Rightarrow \\ a = g\left[\frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} \sin\theta - \eta\cos\theta\right] \Rightarrow \\ a = g\cos\theta(\eta_0 - \eta).\end{aligned}$$

3.

$$T = m_2(g\sin\theta - g\cos\theta\eta - a) = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \sin\theta.$$

4.

$$L = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}}$$